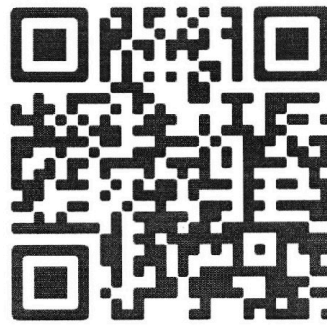




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

- ✓ 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего было n карасей.

Всего выловлено 5 карасей всего выр.

C_n^5 . Из них карасик (где вылов 3 шара); $(n-3) \cdot (n-4) \cdot C_{n-3}^2$ т.к.

3 карася где есть шары и ост. 2 шары из $n-3$ не вылов. кар.

$$P_5 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

Для 6 кар: (аналогично)

$$P_6 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

~~$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} \cdot \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{5! \cdot (n-3)! \cdot (n-5)!}{2 \cdot n! \cdot (n-5)!}$$~~

$$P_5 = \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} \cdot \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{5! \cdot (n-3)! \cdot (n-5)!}{2 \cdot n! \cdot (n-5)!}$$

$$= \frac{60}{(n-2)(n-1)(n)}.$$

$$P_6 = \frac{(n-3)!}{3! \cdot (n-6)!} \cdot \frac{n!}{6! \cdot (n-6)!} = \frac{6! \cdot (n-3)! \cdot (n-6)!}{3! \cdot (n-6)! \cdot n!}$$

$$= \frac{120}{(n-2)(n-1)(n)}.$$

$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{120}{(n-2)(n-1)n} \cdot \frac{60}{(n-2)(n-1)n} = 2.$$

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

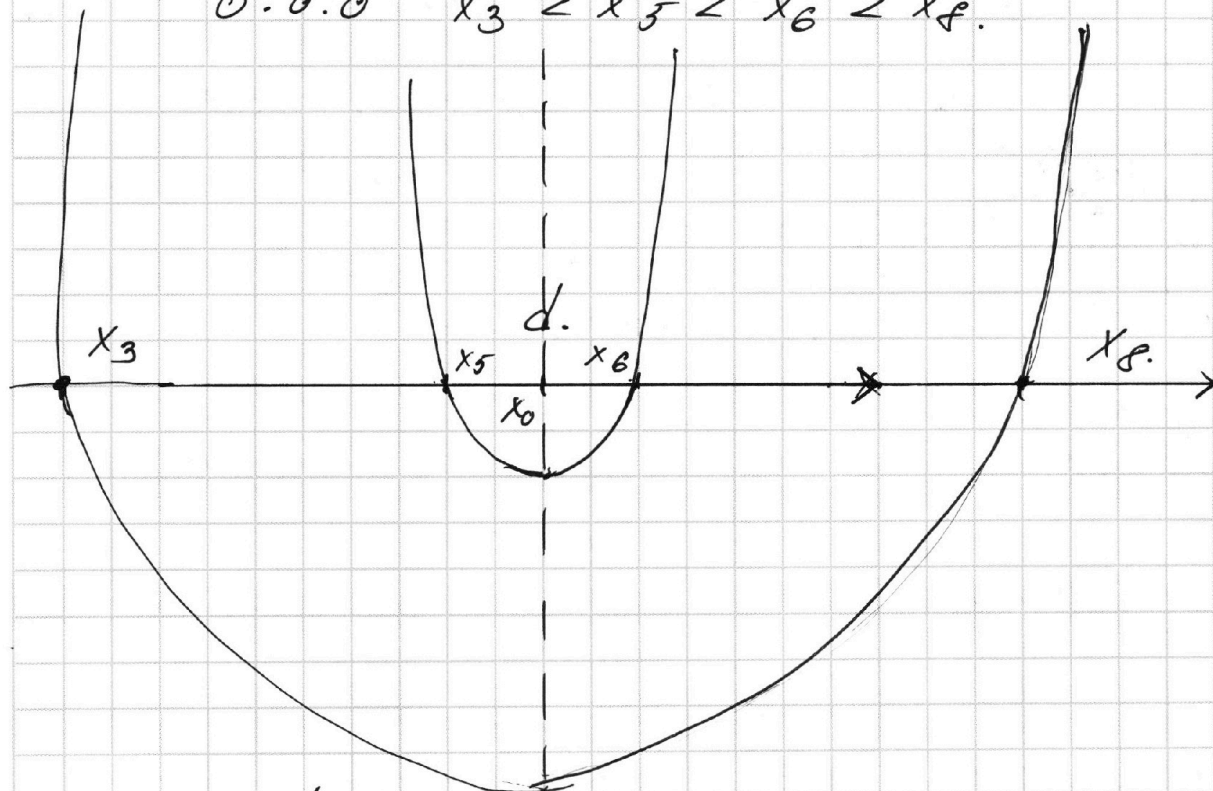
Буду решать графически.

построим графически функции

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad (2)$$

и обозначим их точки пересечения с осью Ox как $x_3; x_5; x_6; x_8$ соответственно.
Б.о.о $x_3 < x_5 < x_6 < x_8$.



Пусть d - расстояние ар. пр., тогда.

$$|x_6 - x_5| = d. \quad |x_5 - x_3| = 2d \text{ и } |x_8 - x_6| = 2d.$$

Пусть x_0 - вершина параболы (1). и

$$|x_0 - x_5| = |x_0 - x_6| = \frac{d}{2} \Rightarrow |x_3 - x_0| = 2 + \frac{1}{2} d$$

$$|x_8 - x_0| = 2 + \frac{1}{2} d \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_0$ - вершина параболы (2).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к они совпадают запишем уравнение и к равенства

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{8} \quad | \cdot 8$$

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2; \quad a^3 - 5a^2 + 4a = 0.$$

$a_1 = 0$. Найдем ост. корни, $a \neq 0$. поделим на a .

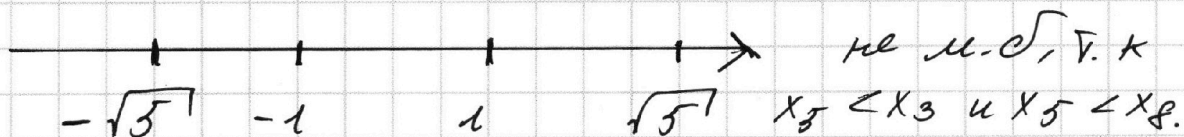
$$a^2 - 5a + 4 = 0. \quad a_2 = 1; \quad a_3 = 4.$$

Подставим и проверим.

$a \neq 0$.

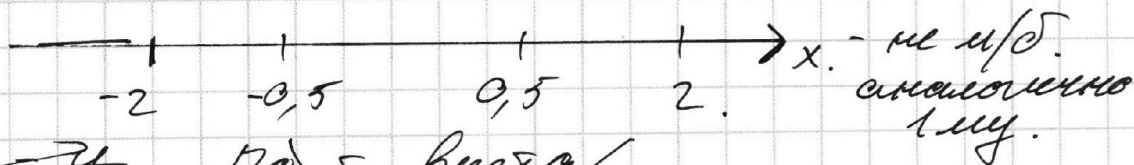
$$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{5(6)} = \sqrt{5}; \quad x_{6(5)} = -\sqrt{5}.$$

$$4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_3 = -1; \quad x_4 = 1.$$



$$a = 1. \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 0,5.$$



~~$a = 4$~~

~~По т. Виета~~

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad | - 4x_1x_2$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 4ca}{a^2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ca}{a^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ca}}{|a|}, \text{ тогда}$$~~

~~$$5|x_5 - x_6| = |x_3 - x_8|$$~~

~~$$5 \frac{b^2 - 4ca}{|a|}$$~~

$$a = 4.$$

$$x^2 - (16 - 4)x + 4 - 5 = 0$$

$$x^2 - 12x - 1 = 0.$$

$$x_5 = 6 - \sqrt{37} \quad x_6 = 6 + \sqrt{37}$$

$$4x^2 - (64 - 16)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0$$

$$2^2: | 4x^2 - 48x + 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 = 0.$$

$$x^2 - 2^{2.3}x + 2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1 = 0.$$

$$x^2 - 12x + 889 = 0.$$

$$D = 144 + 4 \cdot 889 = 3700 = 37 \cdot 10^2$$

$$x_3 = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 - 5\sqrt{37}$$

$$x_8 = 6 + 5\sqrt{37}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & 2 \cdot 2\sqrt{37} & x_5 & 2\sqrt{37} & x_6 & 2 \cdot 2\sqrt{37} & x_8 \\ \hline 6 - 5\sqrt{37} & & 6 - \sqrt{37} & & 6 + \sqrt{37} & & 6 + 5\sqrt{37} \end{array}$$

подкорня.

$$\text{ответ: } a = 4.$$

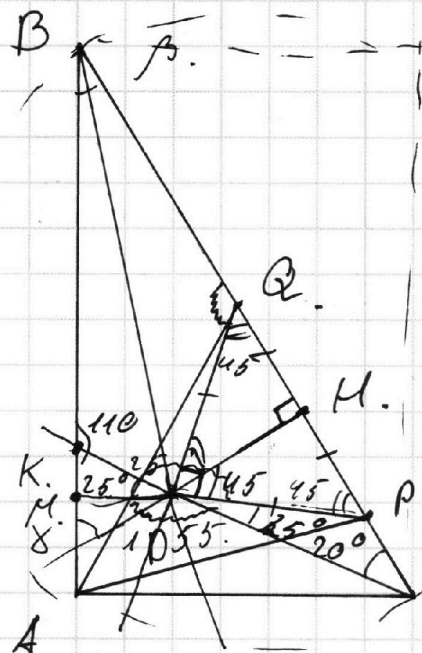


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - п/у.
BC - гип. Q, P $\in$ (BC):
: AB = BP и AC = CQ.
D $\in$ $\triangle ABC$ и DQ = DP.
 $\angle DCB = 20^\circ$. $\angle PDQ = 90^\circ$
Найти: $\angle DBC$.

Реш - ие.

т.к. DQ = DP, то D - сяр. пер
отр PQ. Пусть ея осн - H.

$\triangle QDP$ - п/у и р/б. $\Rightarrow$
 $\angle DQP = \angle DPH = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle PDC = 135^\circ$ (еще $\angle$
 $\angle DPH$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDC = 25^\circ$ ($\angle$ $\triangle DPC$)

$\angle BQD = 135^\circ$

Проведем (CD). $CD \cap BA = K$?

тогда. $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow K = (CD) \cap (BA)$
 $\Rightarrow BP^2 + CQ^2 = BC^2$
(PD) $\cap$ (BA) = M.

$\angle KDM = \angle PDC = 25^\circ$

$\angle MDC = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$

$\Rightarrow \angle KDP = 155^\circ \Rightarrow \angle KDQ = 65^\circ$

$\Rightarrow$ по $\angle$ $\triangle MDB$ и $\angle$ $\triangle DBQ \Rightarrow \angle OBC =$
 25°

ОТВЕТ: 25°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

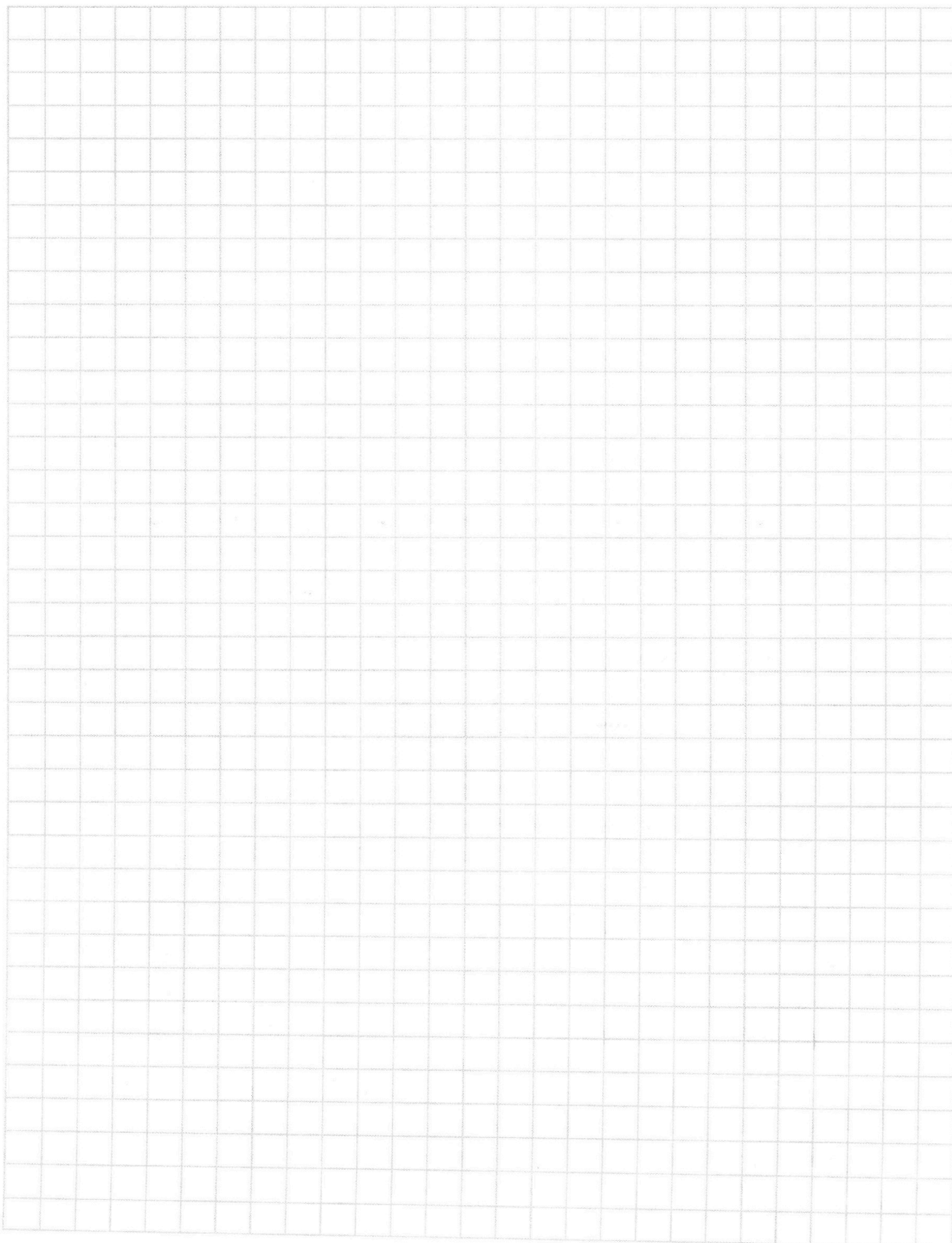
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



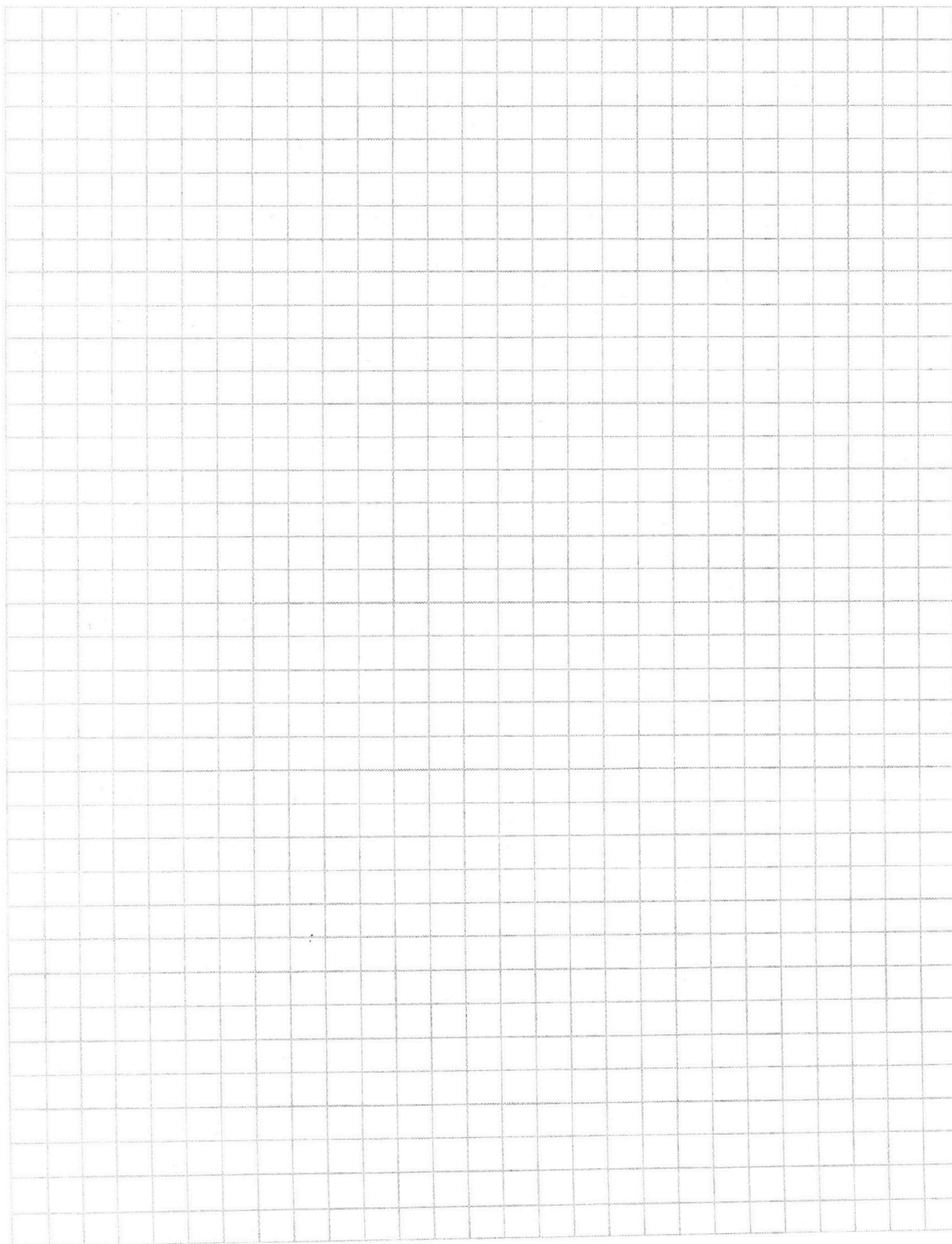


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 8x + 9 \dots$$

$$\dots x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27.$$

$$|x + y| + |x - y| = 1. \text{ В.}$$

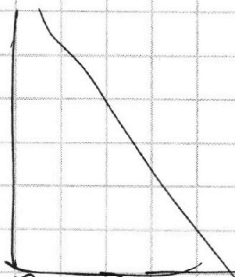
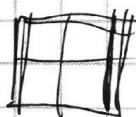
~~$x > y$~~

$$x + y > 0.$$

$$x > -y.$$

$$x - y > 0$$

$$x > y.$$



$$CQ^2 + BP^2 = BC^2$$

~~$AC^2 + AB^2 = BC^2$~~

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$\beta + 135^\circ + \alpha = 180.$$

$$\beta + \alpha = 45.$$

$$\beta + 45^\circ + 90^\circ + \alpha = 180$$

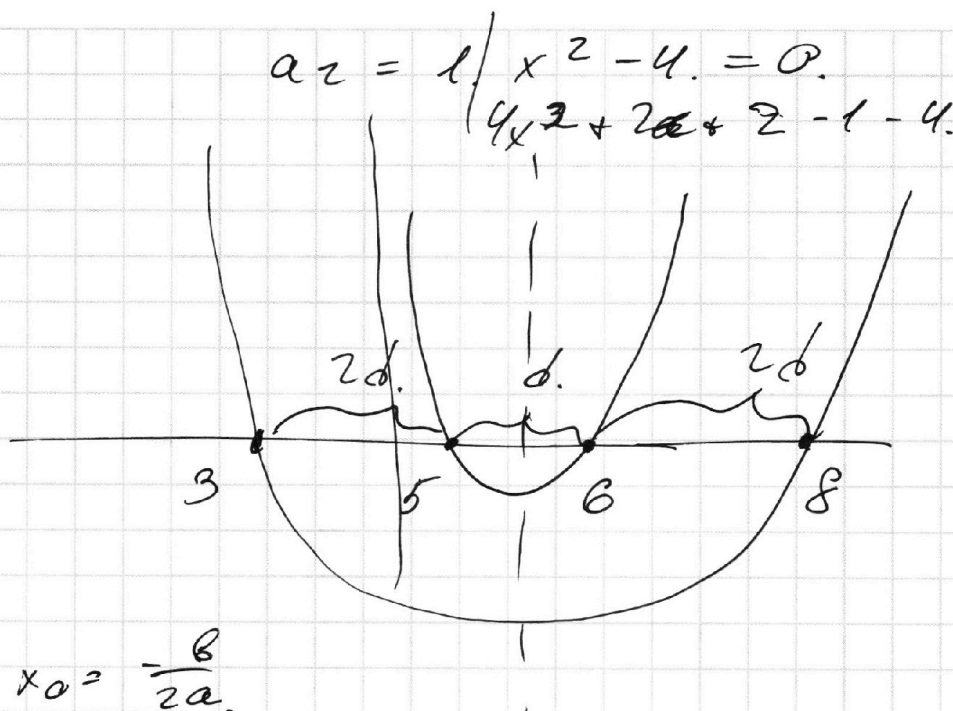


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{8} \quad | \cdot 8.$$

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2.$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0. \quad | : a$$

$a \neq 0 \quad \text{и.о.о. } a \neq 0$

$$a^2 - 5a + 4 = 0.$$

$$a_1; a_2.$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$a_{3,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1; \\ 4. \end{cases}$$

$$1 - 1 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4).$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5).$$

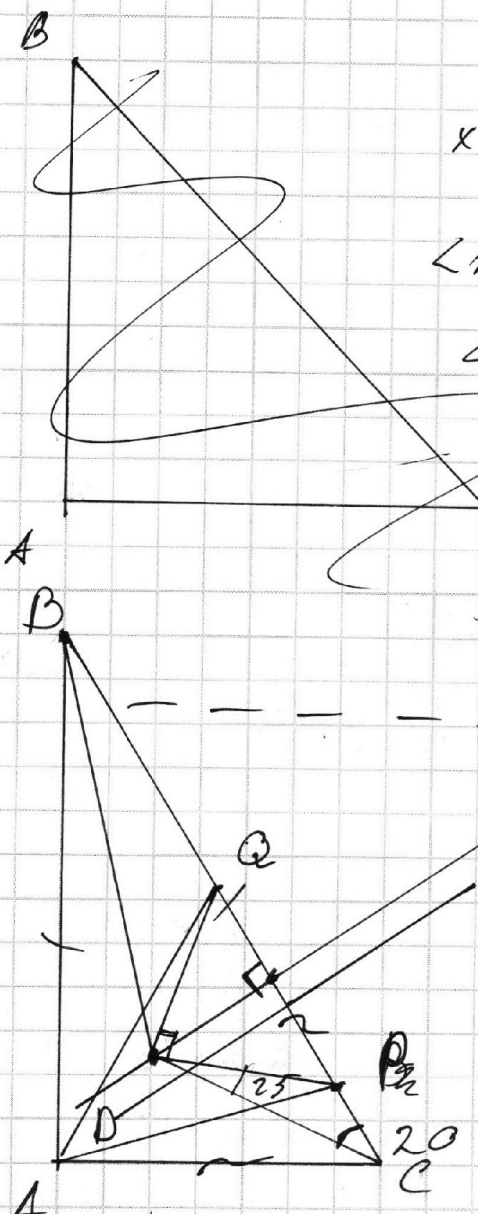


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 6x + 9 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27.$$

$$\angle ABC = \beta \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$\angle ACB = \gamma \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

$$p = \frac{C_5^3}{C_5^2}$$

$$5!$$

$$C_{n-3}^2$$

$$C_5^3 \cdot C$$

$$p = C_n^6$$

$$\frac{n! \cdot 6! \cdot (n-6)!}{n! \cdot 5! \cdot (n-5)!} =$$

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \right| = \frac{6}{n-5!}$$

$$5!$$

$$5! \cdot (n-5)! =$$

$$\frac{6!}{6! \cdot (n-6)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 40000$$
$$\sum_{i=1}^n 9 \cdot 10^i \quad (9 \cdot 1 + 9 \cdot 10 + \dots + 9 \cdot 1000)$$
$$99999 \dots$$

$$9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 1$$

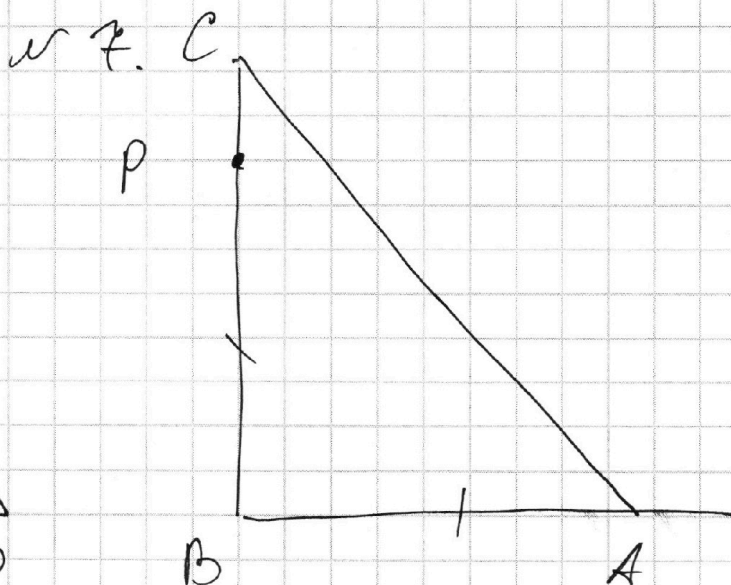
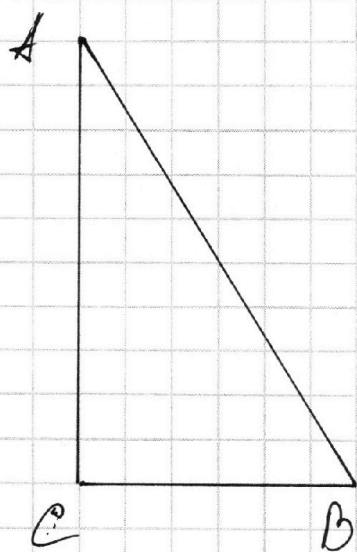
$$729 \cdot 10^9 + 729 \cdot 10^6 + 729 \cdot 10^3$$

$$+ 729$$

$$729 + 729 \cdot 10^3$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ + 891 \\ \hline 9801 \\ \times 9801 \\ \hline 799 \\ + 7990 \\ \hline 88209 \\ + 88209 \\ \hline 960299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 999 \\ \hline 891 \\ + 8910 \\ + 89100 \\ \hline 98901 \\ \times 98901 \\ \hline 88999 \\ + 889990 \\ + 8899900 \\ \hline 980809 \\ + 9808090 \\ + 98080900 \\ \hline 9890109 \\ + 9890109 \\ \hline 98802099 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 128 + 8 - 1025 = -1 \\
 -68 \overline{) 125} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 43 \overline{) 625} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 22 \overline{) 25} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 545 \overline{) 5} \end{array} \end{array} \\
 \underline{65} \quad \underline{10} \quad \underline{25} \quad \underline{5} \\
 -31 \quad -36 \quad -22 \quad 5 \\
 \underline{30} \quad \underline{35} \quad \underline{20} \quad \underline{5} \\
 -12 \quad -12 \quad -20 \quad 109 \\
 \underline{10} \quad \underline{10} \quad \underline{25} \quad \underline{5} \\
 -25 \quad -10 \quad -25 \quad 0 \\
 \underline{25} \quad \underline{25} \quad \underline{25} \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$b \pm \sqrt{37}$$

$$-109 \overline{) 7} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 39 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (x_1 - x_2)^2 &= b^2 \\
 &= \frac{b^2 - 4ac}{a^2}
 \end{aligned}$$

$$12 \pm 2\sqrt{37}$$

$$54 \cdot \frac{109}{12 \cdot 4}$$

$$49 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 109$$

$$2 \cdot 3 \cdot 235 \sqrt{109}$$

$$b \cdot 25 = 450 \sqrt{109}$$

$$x_{1,2} =$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 = \frac{c}{a x_2}$$

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\begin{array}{r}
 1025 \\
 -136 \\
 \hline
 889 \\
 889 \overline{) 37}
 \end{array}$$

$$ax_2$$

$$x_1 - 2x_1 x_2 + x_2 = \frac{-b - 2c}{a}$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = \frac{-b - 2c}{a}$$

$$\begin{array}{r}
 148 \\
 74 \\
 37 \\
 \hline
 2 \\
 2
 \end{array}$$

$$D = 144 + 4 = 148$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2. \quad x = 2^4.$$

$$4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0. \quad x^2 - 0,25 = 0$$

$$x = \pm 0,5.$$

$$x_5 = 0,75 \times 3 \quad x_8 = 0,75. \quad x_6 = 2.$$

$$-2 \quad -0,5 \quad 0,5. \quad 2. \quad x.$$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3

$$x^2 - 12x + -1 = 0.$$

$$4x^2 = 48x + 2^{10} + 2^6 = 2^{12} - 2^2 = 0.$$

$$2^2 x^2 - 2^4 \cdot 3x + 2^{10} + 2^6 - 2^{12} - 2^2 = 0$$

$$x^2 - 2^2 \cdot 3x + 2^8 + 2^4 - 2^{10} - 1 = 0.$$

$$256 + 16 - 1024 - 1.$$

783	3 - 1024
-6	261 256
18	468
-18	+ 16
0	784

$$x^2 - 2^2 \cdot 3$$

$$= 783.$$

783	3
261	3
87	3
29	

$$x^2 - 12x - 783 = 0$$

$$D = 144 + 2^2 \cdot 3^6 \cdot 29^2 =$$

$$= 2^4 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^6 \cdot 29^2 =$$

$$= 2^2 \cdot 3^2 (2^2 + 3^4 \cdot 29^2)$$

$$68125 =$$

x 841	
81	
+ 8841	
6728	

$$= 68121 + 4$$

x 29	
29	
261	
58	
841	