



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. ~~[4 балла]~~ Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. ~~[2 балла]~~ Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. ~~[5 баллов]~~ Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

4. ~~[4 балла]~~ В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. ~~[5 баллов]~~ Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & = z(z+4) \\ xz = 4y + y^2 & = y(y+4) \\ yz = 4x + x^2 & = x(x+4) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$(1) \quad xyz = (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$(2) \quad xy = 4z + z^2 \Rightarrow z+4 = \frac{xy}{z}$$

$$\text{Аналогично: } x+4 = \frac{yz}{x} \quad y+4 = \frac{xz}{y}$$

Раскроем скобки в (1):

$$xyz = (x+4)(y+4)(z+4) = xyz + 4xy + 4xz + 4yz + 16x + 16y + 16z + 64$$

$$0 = 4xy + 4xz + 4yz + 16(x+y+z) + 64 \quad | :4$$

$$(3) \quad 0 = xy + xz + yz + 4x + 4y + 4z + 16$$

по (2):

$$(x+4)^2 = (x+4) \cdot \frac{yz}{x} = yz + \frac{4yz}{x} = 4(x+4) + yz = 4x + yz + 16$$

$$\text{Аналогично: } (y+4)^2 = 4y + xz + 16$$

$$(z+4)^2 = 4z + xy + 16$$

} сложим

$$(4) \quad 4x + 4y + 4z + (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 4x + 4y + 4z + 4x + xz + yz + 16 + 32$$

По (3), преобразуем (4):

$$(16 + 4x + 4y + 4z + xy + xz + yz) + 32 = 0 + 32 = 32$$

$$\text{Ответ: } (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99 \dots 99}_{25000} = 10^{25000} - 1$$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$1) \quad 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} = \underbrace{99 \dots 97}_{24999} \underbrace{00 \dots 00}_{50000}. \text{ Это значит, что последняя}$$

число 10^{75000} равно 75000 нулей, а в числе $3 \cdot 10^{50000}$ - 1 цифра 3 и 50000 нулей $\Rightarrow$ последние 50000 нулей остались нулями, 50001 цифра слева - 10 - 3 = 7, а оставшиеся 24999 нулей увеличатся на 1, т.е. станут нулями

$$2) \quad \underbrace{99 \dots 97}_{24999} \underbrace{00 \dots 00}_{50000} + 3 \cdot 10^{25000} = \underbrace{99 \dots 97}_{24999} \underbrace{00 \dots 02}_{4999} \underbrace{00 \dots 00}_{25000}$$

$$3) \quad \underbrace{99 \dots 97}_{24999} \underbrace{00 \dots 02}_{4999} \underbrace{00 \dots 00}_{25000} - 1 = \underbrace{99 \dots 97}_{24999} \underbrace{00 \dots 01}_{4999} \underbrace{99 \dots 99}_{25000}$$

Тогда всего цифр 9 - $24999 + 25000 = 50000 - 1 = 49999$

Ответ: 49999 цифр 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть в мире n коробок. Пусть $P(A)$ - вероятность посылки, при которой можно выбрать 5 коробок

$$P(A) = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5}$$

C_{n-3}^5 - ил. функций, в наших коробках
найдено, поэтому выписанным будет
любой набор из этих трех коробок и еще
любой двух

C_n^5 - кол-во наборов для мира

$$P(A) = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 2!} = \frac{5!}{2n(n-1)(n-2)}$$

2) Пусть $P(B)$ - вероятность выписать, если ~~используя~~ выбрать 8 коробок. Аналогично п.1:

$$P(B) = \frac{C_{n-3}^8}{C_n^8} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \cdot 8!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \cdot 5!} = \frac{8!}{n(n-1)(n-2) \cdot 5!}$$

3) Вероятность увеличится в $\frac{P(B)}{P(A)}$ раз

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{8!}{n(n-1)(n-2) \cdot 5!} \cdot \frac{2n(n-1)(n-2)}{5!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{28}{5} = 5,6$$

ответ: в 5,6 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

без

$$2x^2 - (8-4)x - 2.64 - 16 - 4 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 74 = 75.4$$

$$b_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{75.4}}{2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

Такая последовательность существует!

$$b_1 = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$b_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$b_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$b_5 = 1 + \sqrt{3}$$

$$b_3 = 1 - 3\sqrt{3}$$

$$b_6 = 1 + 3\sqrt{3}$$

а может быть равно 2

Ответ: $a = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

~~а, а, а, а, а~~ - решение

$$(2) 2x^2 - (a^2 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

~~а, а, а, а, а~~ - решение

Пусть $\{b_1, b_5\}$ - решение первого (1) уравнения, а $\{b_2, b_7\}$ - решение второго (2) уравнения.

По 1. Внеси:

$$b_1 + b_5 = \frac{a^2 - a}{1}$$

$$b_2 + b_7 = \frac{a^2 - a^2}{2}$$

Пусть b_1 - первый элемент арифм. прогрессии, а d - ее разность
 $b_2 = b_1 + d$ $b_7 = b_1 + 6d$ $b_2 + b_7 = 2b_1 + 7d$
 $b_4 = b_1 + 3d$ $b_5 = b_1 + 4d$ $b_4 + b_5 = 2b_1 + 7d \Rightarrow b_2 + b_7 = b_4 + b_5$

$$b_2 + b_7 = b_4 + b_5 \Rightarrow \frac{a^2 - a}{1} = \frac{a^2 - a^2}{2}$$

$$a(a-1) = \frac{a \cdot a(a-1)}{2}$$

Рассмотрим случаи $a \neq 1$ и $a = 0$:

Если $a = 0$:

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$b_1, b_5 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ - решение}$$

действ. чисел. $\Rightarrow a \neq 0$

Если $a = 1$:

$$x^2 - (1^2 - 1)x + \frac{2-1}{3} = x^2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \text{решений в действ. числах нет.} \Rightarrow a \neq 1$$

Тогда:

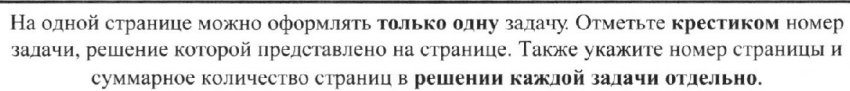
$$x(x-1) = \frac{a \cdot a(a-1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$$

Если $a = 2$:

$$x^2 - (4-2)x + \frac{2-8}{3} = x^2 - 2x - 2 = 0$$

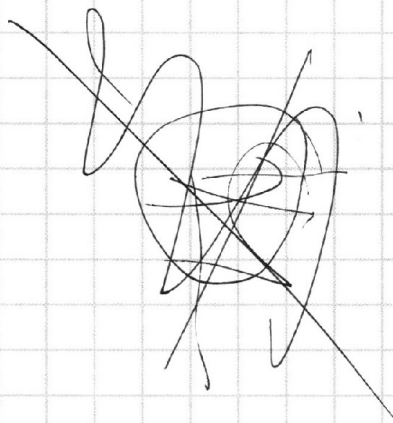
$$b_1, b_5 = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$b_2, b_7 = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

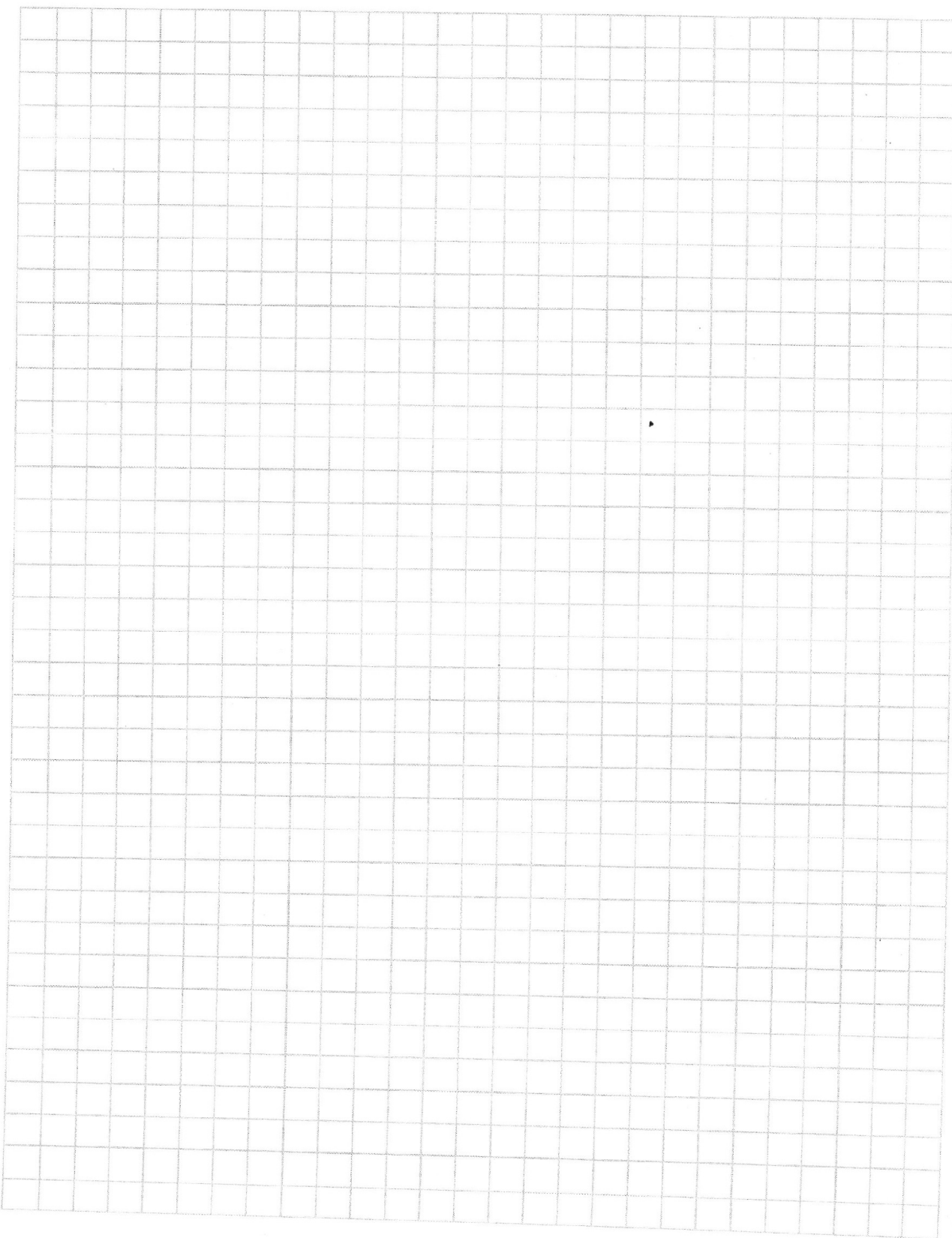
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AB^2 = (AP - BP)(PC)$
 $BP^2 = BP \cdot PC - AP \cdot PC$
 $AP \cdot PC = BP \cdot PC - BP^2$
 $AP \cdot PC = AB \cdot (BC - AB)$
 $AP \cdot PC = AC \cdot (BC - AB)$
 $AP \cdot PC = AB \cdot BC - AB^2$

$225 - 100 = 125$
 $5 \cdot x = 125$
 $x = 25$
 $AP = 25$
 $BP = 5$
 $PC = 5$
 $AC = 5$
 $AB = 5$
 $BC = 5$
 $AD = 5$
 $BE = 5$
 $CE = 5$

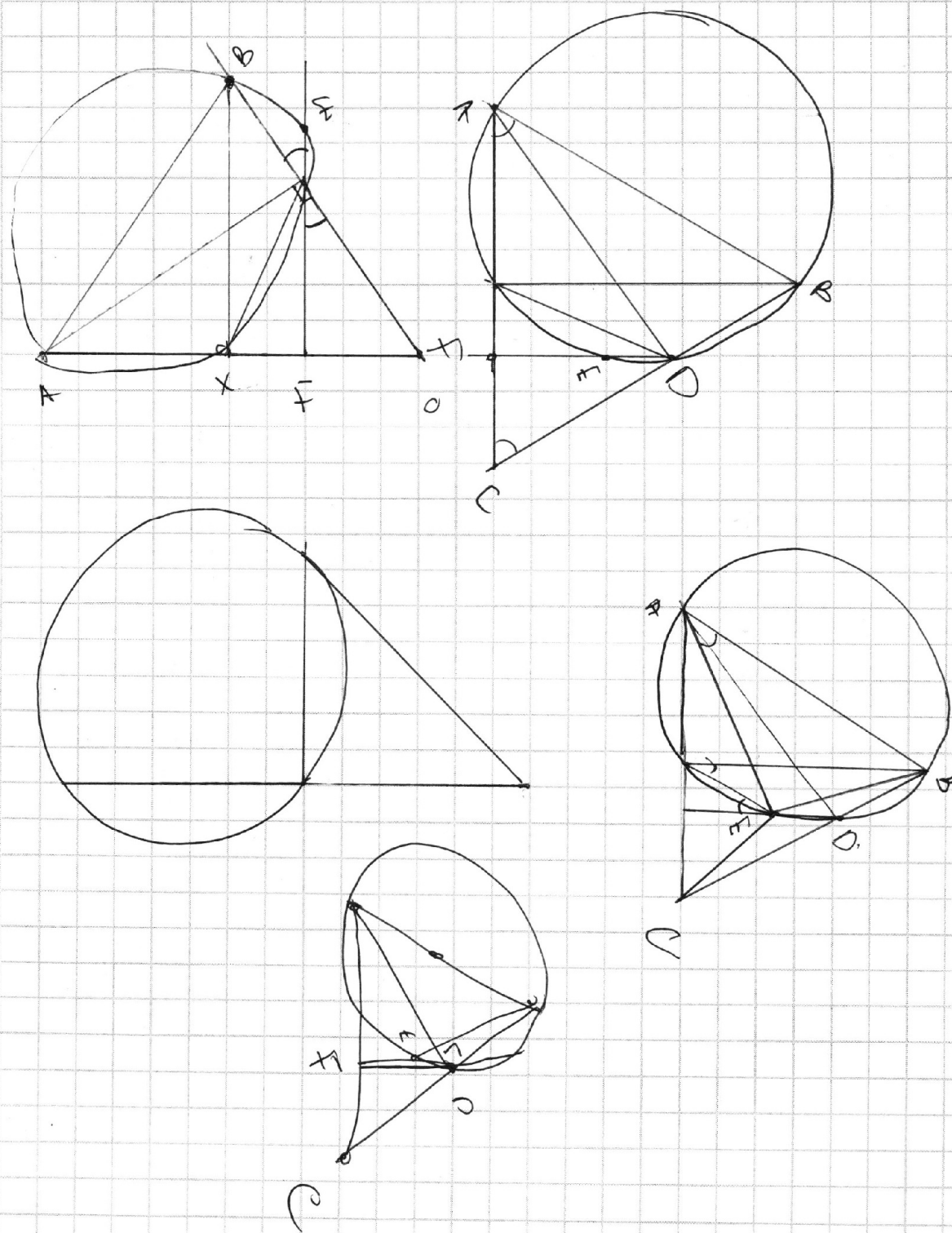


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

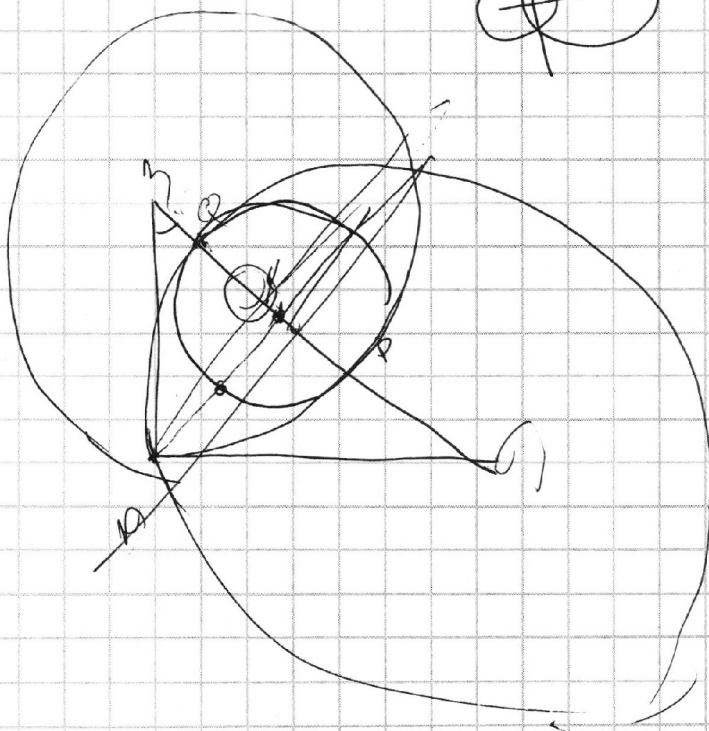
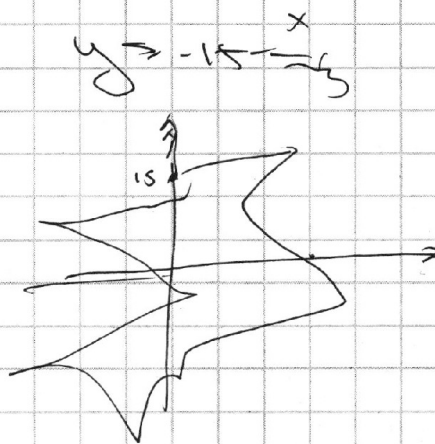
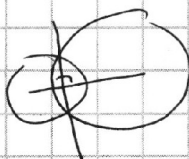
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq 0$$
$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}}|$$

$$2y - 30 = 6$$

$$y = 18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

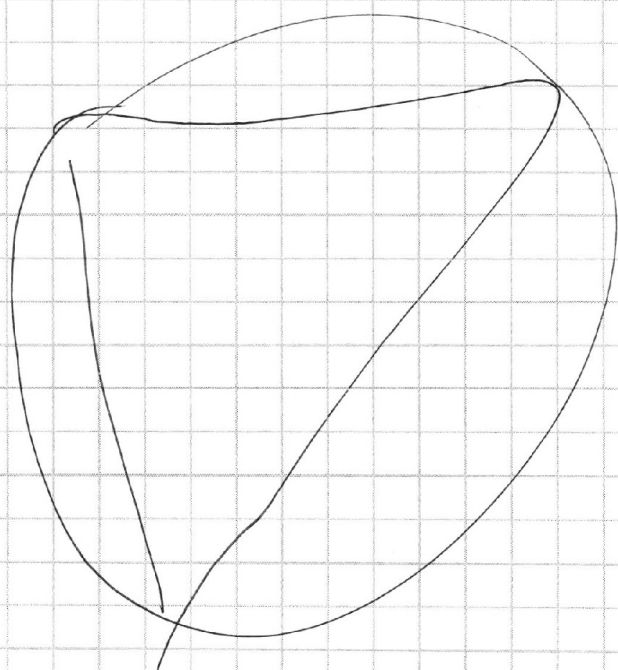
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



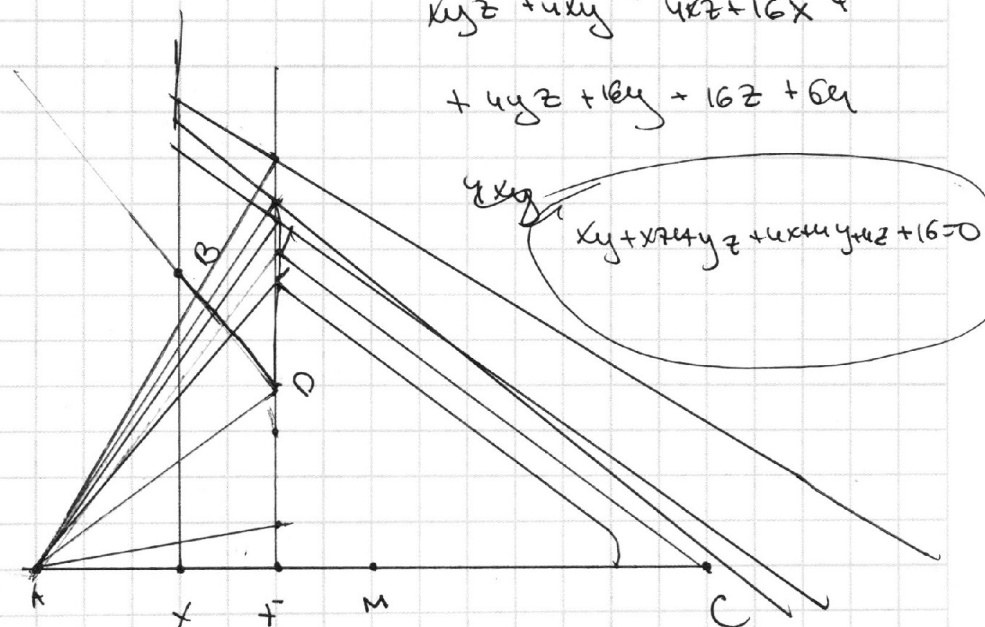
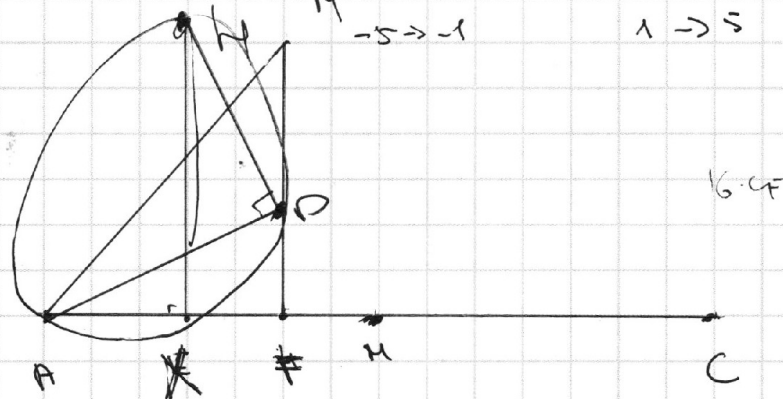
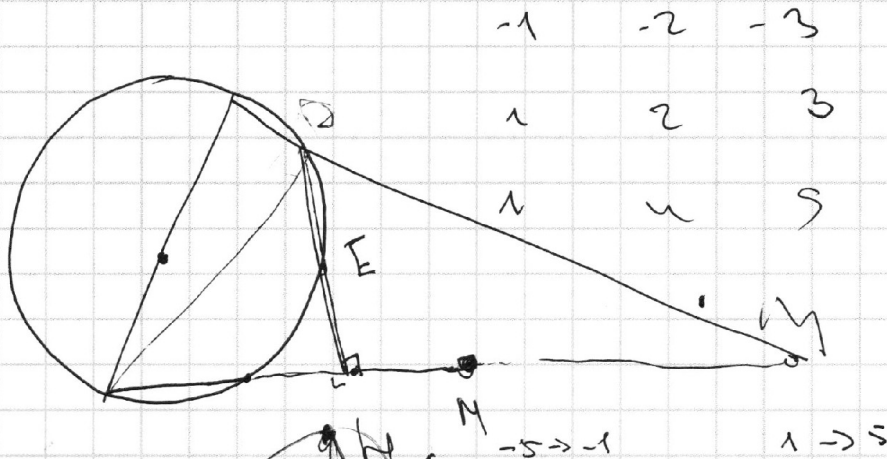


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^2}{5} = 0$$

$$a^2 - a = \frac{a^2 - a^2}{2}$$

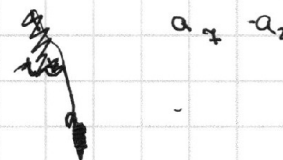
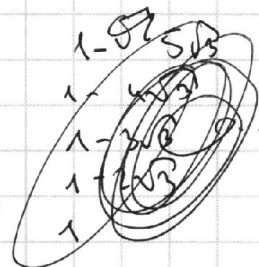
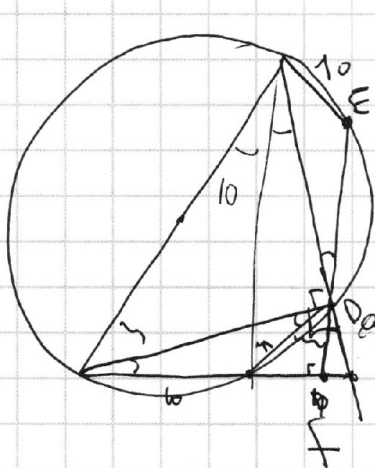
$$a(a - 1) = \frac{a \cdot a(a - 1)}{2}$$

$$1 = \frac{a}{2}$$

$$a = 1$$

$$a = 2$$

$$a = 0$$



$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6, a_7 \\ 1 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{array}$$

~~181~~

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 16$$

$$x+y = \frac{xy}{2}$$

$$\frac{x^2 y^2}{x^2} + \frac{x^2 y^2}{y^2} + \frac{y^2 x^2}{x^2}$$

$$\frac{y^2}{x} = x + y$$

$$(x+y)^2 \cdot xy = (x+y) \frac{y^2}{x} = y^2 + \frac{4y^2}{x} = y^2 + 4x + 16$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 4z(z+u)$$

$$yz = x(x+u)$$

$$xz = y(y+u)$$

$$(x+u)^2$$

$$x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 4x = xy$$

$$\begin{aligned} 2xy &= 8z + 2z^2 \\ 2yz &= 8x + 2x^2 \\ 2xz &= 8y + 2y^2 \end{aligned} \quad \Bigg\} +$$

$$2xy + yz + 2xz = 8(x+y+z) + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$8(x+y+z) + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 = ?$$

$$\frac{yz}{2x} \cdot xy = y^2$$

$$\frac{y(y+u)}{x(x+u)} \cdot z(z+u) = y^2$$

$$y = \frac{(y+u)z(z+u)}{x}$$

$$xy^2z^2 = xyz(x+u)(y+u)(z+u)$$

$$xyz = (x+u)(y+u)(z+u)$$

$$x \leq y \leq z$$

$$\begin{array}{ccc} -5 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ - 300 \\ \hline 99700 \end{array}$$

$$(10^{25000} - 1)^3 =$$

$$= 10^{25000 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{25000 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{25000 \cdot 1} - 1$$

$$10^3 - 10^1 =$$

$$1000 - 30 = 970$$

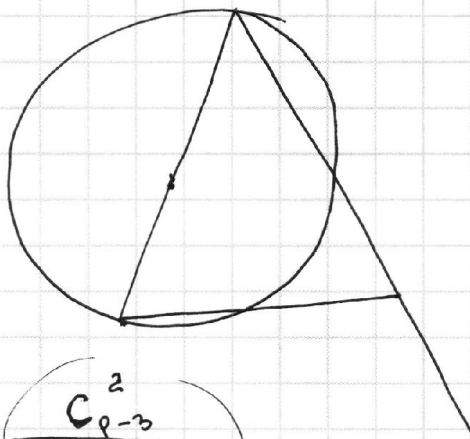
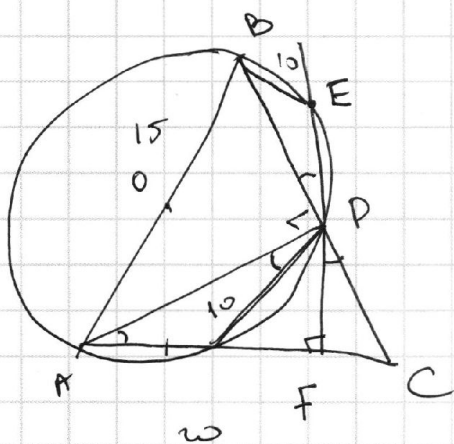


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{C_{p-3}^5}{C_{p-3}^8} = \frac{(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)(p-7) \cdot 1!}{C_{p-3}^5}$$

$$\frac{C_{p-3}^2}{C_p^5}$$

P

1 -

$$x^2 - 2x - 1$$

$2\sqrt{3}$

$$2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 16 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$x + 74 \cdot x =$$

$$= 4 \cdot 15 = 4 \sqrt{10 \sqrt{3}}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 8 \pm 12}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

