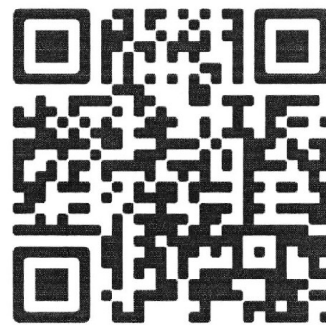




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Заметим, $x, y, z \geq 0$ и перемножим выражения, получим

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = xyz + 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) + 27$$

$$0 = xy + yz + zx + 3(x + y + z) + 9$$

$$-(xy + yz + zx) = 3(x + y + z) + 9$$

Сложим изначальное выражение, получим.

$$xy + yz + zx = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-3(x + y + z) - 9 = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z)$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 = -9 + 27 = 18$$

Ответ: $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☒ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$
 $\underbrace{99 \dots 9}_{40000} = 10^{40000} - 1 \Rightarrow \underbrace{99 \dots 9}_{40000}^3 = (10^{40000} - 1)^3 =$
 $= 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$. По действию:
из 10^{120000} вычтем $3 \cdot 10^{80000}$. Тогда последние 80000 разрядов
или были 0, или и остались, тогда не менее 80001 разрядов
из 0 будет 7, а все разряды, начиная с 80001 из 0
станутся 9, единица в начале пропадет. В результате
числа 39999 добавим. К числу $10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000}$ добавим
 $3 \cdot 10^{40000}$. Тогда последние четыре разряда 40001 с 0 на 3.
К числу $10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000}$ вычтем 1. Тогда
разряд 40001 с 3 перейдет на 2, разряды меньше 40001
из 0 перейдут в 9, остальные не изменятся. К результату
затем число добавим 40000 добавим, придет девятка,
которая до этого была в числе, или не в числе. Тогда
всего девяткам 4-числа 79999.
Ответ: 79999 девяткам

8) $\triangle APO$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по т. Пиф. $AO^2 = AP^2 + OP^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9) AD^2 = AC^2 - DP^2 - PC^2 = AP^2 + DP^2 \Rightarrow AC^2 - 2DP^2 - AP^2 - PC^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 - 2DP^2 - AP^2 - (AC - AP)^2 = 0 \Rightarrow 100 - 2DP^2 - AP^2 - (10 - AP)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 2DP^2 - AP^2 - 100 + 20AP - AP^2 = 0 \Rightarrow DP^2 = -AP^2 + 10AP$$

$$10) \triangle ABE - \text{прямоугольный} \Rightarrow \text{по Пифагору: } AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{11}$$

$$\cancel{AB \cdot AP = AE \cdot AD}$$

$$11) \triangle APD - \text{прямоугольный} \Rightarrow \text{по Пифагору: } AD^2 = AP^2 + DP^2 = AP^2 + 10AP - AP^2 = 10AP = AD^2$$

$$12) AB \cdot AP = AE \cdot AD \Rightarrow 6AP = \sqrt{11} \cdot \sqrt{10AP} \Rightarrow 36AP^2 = 110AP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AP = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } AP = \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

Пусть есть n коробов, тогда в $n-3$ нет шара.

Узнаем, как ~~выиграем~~ ^{выиграем} вероятность $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-3-1}{n-1} \cdot \frac{n-3-2}{n-2} \cdot \dots$
к $\frac{n-3-3}{n-3} \cdot \dots \cdot \frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)}$, где $\frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)} = \frac{3}{6}$. Это число,

потому что выбрали 5 коробов из n , там самое, что выбрали

$n-5$ коробов из n ($C_n^5 = C_n^{n-5}$), а не потому, что уменьшили

кол-во коробов общие и кол-во коробов без шара. Поэтому решением

выбрать 6 коробов, что равно выбрать $n-6$ коробов. Тогда шанс

выиграем стал $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-3-1}{n-1} \cdot \frac{n-3-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-3-(n-2)}{n-(n-2)}$.

Заметим, что шанс 6 коробов отличается от шанса 5 коробов

лишь одним множителем $\frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)}$, который равен $\frac{1}{2}$.

Тогда шанс увеличился в $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, то есть вдвое.

Ответ: шанс увеличился вдвое.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р5

$$a_5 = a_3 + 2d, \quad a_6 = a_3 + 3d, \quad a_8 = a_3 + 5d$$

$$a_3 + a_8 = a_3 + a_3 + 5d = a_3 + 2d + a_3 + 3d = a_5 + a_6$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0, \quad a_5 \text{ и } a_6 - \text{корни, тогда по т. Виета}$$

$$a_5 + a_6 = \frac{-(-(a^2 - a))}{1} = a^2 - a$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0, \quad a_3 \text{ и } a_8 - \text{корни, тогда по т. Виета}$$

$$a_3 + a_8 = \frac{-(-(a^3 - a^2))}{4} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a_3 + a_8 = a_5 + a_6 \Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow (a^2 - a)(1 - \frac{a}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a-1)(1 - \frac{a}{4}) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = 1 \text{ или } a = 4.$$

I. $a = 0$. Тогда $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = x^2 - 5 = 0$, корни $\pm\sqrt{5}$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - 4 = 0, \text{ корни } \pm 1.$$

Будем без ограничений обычными числами. Возраст (для всех

сужаев), тогда $a_3 < a_5 < a_6 < a_8$. Тогда $a_6 = 55, a_5 = 55 \Rightarrow$

$$d = 55 - (-55) = 110, \quad a_3 = -1, \quad a_5 = a_3 + 2d = -1 + 220 = 219$$

-противоречие $\Rightarrow a \neq 0$

II. $a = 1$. Тогда $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = x^2 - 4 = 0$, корни ± 2

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - 1 = 0, \text{ корни } \pm \frac{1}{2}$$

$$a_5 = -2, \quad a_6 = 2, \quad d = a_6 - a_5 = 2 - (-2) = 4, \quad a_3 = -\frac{1}{2},$$

$$a_5 = a_3 + 2d = -\frac{1}{2} + 8 = 7.5 \neq -2 - \text{противоречие, } a \neq 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. $a \geq 4$, Range $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 \geq x^2 - 12x - 1 \geq 20$
корни $6 \pm \sqrt{37}$ ($D = (-12)^2 - 4 \cdot (-1) = 148$, $x = \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$)

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 \geq 4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 \geq 20 \Rightarrow x^2 - 12x + 2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1 \geq 20$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot (-889) = 144 + 3556 = 3700$$

корни $x = \frac{12 \pm \sqrt{3700}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$.

$$a_5 = 6 - \sqrt{37}, \quad a_6 = 6 + \sqrt{37}, \quad d = a_6 - a_5 = 6 + \sqrt{37} - 6 - (-\sqrt{37}) = 2\sqrt{37}$$

$$a_3 = 6 - 5\sqrt{37}, \quad a_5 = a_3 + 2d = 6 - 5\sqrt{37} + 2 \cdot 2\sqrt{37} = 6 - \sqrt{37}, \quad a_6 = a_3 + 3d = 6 - 5\sqrt{37} + 3 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + \sqrt{37}, \quad a_8 = a_3 + 5d = 6 - 5\sqrt{37} + 5 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + 5\sqrt{37}.$$

При $a \geq 4$ условие выполняется

Таким образом из всех возможных a , наименьшее при $a \geq 4$.

Ответ: $a \geq 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

Пусть $a = x - \frac{15}{2}$, $b = \frac{4}{6\sqrt{3}}$, тогда

$$|a+b| + |a-b| \leq 3.$$

I. $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a+b + a-b \geq 2a \leq 3$

II. $b \geq a \geq 0 \Rightarrow a+b + b-a \geq 2b \leq 3$

III. $a \geq 0 \geq b \Rightarrow a-b + a+b \geq 2a \leq 3$

IV. $b \geq 0 \geq a \Rightarrow b-a + a+b \geq 2b \leq 3$

V. $0 \geq a \geq b \Rightarrow -a-b + -a+b \geq -2a \leq 3$

VI. $0 \geq b \geq a \Rightarrow -a-b + -b+a \geq -2b \leq 3$

Итаким образом $-1,5 \leq a, b \leq 1,5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 7

Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$,
 $P \in BC$, $AB = BP$, $Q \in BC$, $AC = QC$
 $DP \perp PQ$ и $\angle PDQ = 90^\circ$, $\angle DCB = 20^\circ$
 Найти: $\angle DBC$.

1) Пусть $\angle BAQ = \alpha$, $\angle QAP = \beta$, $\angle PAC = \gamma$.
 $\alpha + \beta + \gamma = 90$

2) $AC = QC \Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA = \beta + \gamma$

3) $AB = BP \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \alpha + \beta$

4) $\angle QAP + \angle APQ + \angle PQA = 120^\circ$ - по сумме углов Δ и равно $\alpha + \beta + \beta + \gamma + \beta = 120$
 $\alpha + \beta + \gamma + 2\beta = 120$, $\alpha + \beta + \gamma = 90 \Rightarrow 2\beta = 30 \Rightarrow \beta = 15 \Rightarrow \angle QAP = 45$

5) $\triangle DQP \sim \triangle DPA$, $DQ = DP$, $\angle QDP = 90^\circ \Rightarrow \angle DPQ = \angle DQP = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ$

6) $\angle BAP = \angle APB = \alpha + 45$, $\angle BPD = 45 \Rightarrow \angle DPA = \alpha$

7) Аналогично $\angle DQA = \gamma$

8) $\angle ACQ = 180 - 2(45 + \gamma) = 90 - 2\gamma \Rightarrow \angle ACD = 70 - 2\gamma \Rightarrow \angle AEC = 110 + \gamma$
 $(AP \cap CD = E)$

9) $\angle EDP = 180 - 110 - \gamma - \alpha = 70 - \gamma - \alpha = 25$ ($\alpha + \beta + \gamma = 90$, $\beta = 15$, $\alpha + \gamma = 75$)

10) $\angle DBC = 180 - \angle DCB - \angle BDC = 180 - 20 - 90 - 25 - \angle BPQ = 45 - \angle BPQ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$g^3 = 729$$

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 999 \sim 999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40000 \\ \times 999 \\ \hline 3991 \\ 39910 \\ 399100 \\ \hline 39801 \end{array}$$

$$(10000 - 1)^3 = 10000^3 - 3 \cdot 10000^2 + 3 \cdot 10000 - 1$$

$$(a-b)^3 = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$

$$(10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$\begin{array}{r} 88209 \\ \times 999 \\ \hline 88209 \\ 882090 \\ 8820900 \\ \hline 8820999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 999 \\ \hline 8991 \\ 89910 \\ 899100 \\ \hline 998001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 998001 \\ \times 999 \\ \hline 8982009 \\ 89820090 \\ 898200900 \\ \hline 997002999 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g^1 = 1 \\ g^2 = 3 \\ g^3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 40000 \\ g = 72999 \end{array}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$\begin{array}{r} 99700000 \\ 3000000 \\ \hline 99700000 \end{array}$$

$$a^2 \quad D_1 = 16$$

$$D = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20 > 0$$

$$u x^2 - (a^3 - a^2)x + 1a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$D = (a^3 - a^2)^2 - 4 \cdot 4(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) = a^6 - 2a^5 + a^4 - 32a^4 - 32a^2 +$$

$$+ 16a^6 + 64 = 12a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 + 64 > 0$$

$$+ 32$$

$$12 \cdot 2^6 - 2^6 - 31 \cdot 2^4 - 32 \cdot 2^2 + 2^6$$

$$12 \cdot 2^6 - 2^6 - 31 \cdot 2^4 - 2^2 = 2^4(12 \cdot 4 - 31 - 3) = 2^4 \cdot 29$$

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 99 \sim 9 = 100000 - 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 40000 \\ 99 \sim 9 = 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120000 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120000 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80000 \\ - 3 \cdot 10 \\ 40000 \\ + 310 \\ - 1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+z)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) = 27$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = xy + yz + zx$$

$$xy = z(z+3)$$

$$yz = x(x+3)$$

$$zx = y(y+3)$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2$$

$$x = \frac{z(z+3)}{y}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$yz = \frac{z(z+3)}{y} \cdot \left(\frac{z(z+3)}{y} + 3\right)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = \frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2}$$

$$y = \frac{z+3}{y} \left(\frac{z^2 + 3z + 3y}{y}\right)$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) = (x+y+z)^2$$

$$y^3 = (z+3)(z^2 + 3z + 3y)$$

$$y^3 = z^3 + 3z^2 + 3yz + 3z^2 + 9z + 9y$$

$$y^3 - 3yz - 9y = z^3 + 6z^2 + 9z = z(z+3)^2$$

$$y(y^2 - 3z - 9) = z(z+3)^2$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x+y+z)(x+y+z-6)$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 1 + 1 + 1) - 9 = (x+y+z)^2$$

$$3((x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2) - 9 = (x+y+z)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = a_3 + 2d, \quad a_6 = a_3 + 3d, \quad a_8 = a_3 + 5d \quad (x-5)(x-1) = x^2 - 6x + 5$$

$$a_3 + a_8 = a_5 + a_6 = 2a_3 + 5d$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad \text{По в. формуле} \quad a_5 + a_6 = a^2 - a$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad \text{По в. формуле} \quad a_3 + a_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} = \frac{a}{4}(a^2 - a) \Rightarrow (a^2 - a)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0, \quad a = 1, \quad a = 4.$$

$$x^2 - 5 = 0, \quad x = \pm\sqrt{5} \quad - \text{возникли лишние корни при } a=0$$

$$4x^2 - 4 = 0, \quad x = \pm 1$$

$$x^2 + 1 - 5 = 0, \quad x = \pm 2$$

$$4x^2 - 1 = 0, \quad x = \pm \frac{1}{2} \quad - \text{не сбу при } a=1$$

$$x^2 - 12x - 1 = 0, \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

$$4x^2 - 48x + 2^4 + 2^5 - 2^{12} - 4 = 0$$

$$x^2 - 12x + 2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x - 889 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 889}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$a_3, \quad a_4 = a_3 + d, \quad a_5 = a_3 + 2d$$

$$\begin{array}{r} 1025 \\ - 136 \\ \hline 889 \\ \times 889 \\ \hline 3556 \\ + 144 \\ \hline 889 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1025 \\ - 128 \\ \hline 897 \\ - 8 \\ \hline 889 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -1, \quad a_5 = -\sqrt{5}, \quad a_6 = \sqrt{5}, \quad a_8 = 1. \quad - \text{Кубина}$$

$$a_2 = 1, \quad a_3 = -2, \quad a_5 = -\frac{1}{2}, \quad a_6 = \frac{1}{2}, \quad a_8 = 2.$$

$$d = 1, \quad a_3 = -2 \Rightarrow a_5 = 0 \quad - \text{выброс}$$

$$a_2 = 4, \quad a_3 = 6\sqrt{3}z, \quad a_5 = 6 - \sqrt{3}z, \quad a_6 = 6 + \sqrt{3}z, \quad a_8 = 6 + 5\sqrt{3}z$$

$$d = 2\sqrt{3}z, \quad a_5 = a_3 + 2d = a_3 + 4\sqrt{3}z$$

$$a_8 = a_3 + 5d = a_3 + 5\sqrt{3}z$$

$$a_2 = 4$$

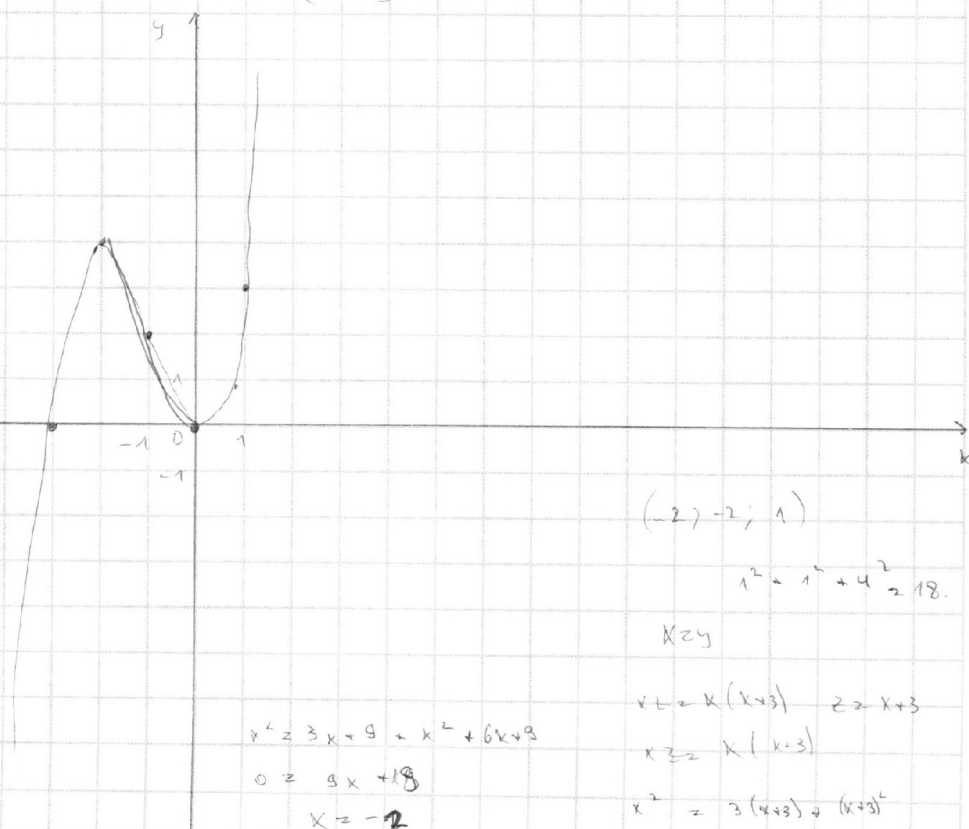
$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \left(\frac{z+3}{x+3} \right)$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \left(\frac{y+3}{x+3} \right) \Rightarrow x^3 + 3x^2 = y^3 + 3y^2$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{z+3}{x+3}$$

$$x^3 + 3x^2 = z^3 + 3z^2 \quad y^3 + 3y^2 = z^3 + 3z^2$$

$$x^2(x+3) = y^2(y+3) = z^2(z+3)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(x+z)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 = \frac{y^2z^2 + x^4y^4 + z^4x^4}{x^2y^2z^2}$$

6 кор 1 и кор 5
7 кор $\frac{4}{7}$ Макс из кор 2
8 кор $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$

$$y(x+z) = 3(x+z) + x^2 + z^2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy \cdot \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-3-1}{n-1}$$

$$(y-3)(x+z) \geq x^2 + z^2$$

$$\cdot \frac{n-3-2}{n-2} - \frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)}$$

$$(y-3)(x+z) \geq (x+z)^2 - 2xz$$

$$(x+z)(x+z-y+3) - 2y(y+3) \geq 0$$

max 12 20 $\frac{3}{6}$
max 10 10

$$x^2 + y^2 + z^2 - y - yz - 2x + 3(x+y+z) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) \geq 3x + 3y + 3z + 2x$$

~~max 6 кор 2 3 5 7 11~~

$$-x^3 \left(\frac{(xy)^2}{2} + \frac{(yz)^2}{x} + \frac{(zx)^2}{y} \right)$$

$$2xy \geq 6z + 2z^2$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 6(x+y+z) \geq 0$$

$$2yz \geq 6x + 2x^2$$

$$x=y, z=-2x$$

$$2(x-3)^2 + 6(2x+2) \geq 0$$

$$2zx \geq 6y + 2y^2$$

$$\frac{xy \cdot yz}{zx} = \frac{z(z+3) \cdot x(x+3)}{y(y+3)}$$

$$0 + 3x^2 + 3y^2 \geq 0 \geq 0, x \geq 0$$

$$x^2 - 2xz + z^2 + 6x + 3z \geq 0$$

$$y^2 = \frac{z(z+3)x(x+3)}{2(z+3)}$$

6 кор 5 11

~~max 11 11 11~~

$$x^2y^2z^2 \geq xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$P(1) \geq \frac{1}{2}$$

7 кор 5 11

$$xyz \geq (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = 8$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$11 = EP^2 + AP^2$$

$$AO^2 = DP^2 + AP^2$$

$$AO^2 = 36 - BD^2$$

$$\frac{BD}{AE} = \frac{DT}{TE} = \frac{BT}{AT} = k$$

$$100 = AO^2 + DC^2$$

$$DC^2 = DP^2 + PC^2$$

$$AO^2 = 100 - DP^2 - PC^2$$

$$100 - DP^2 - PC^2 = DP^2 + AP^2$$

$$100 - 2DP^2 - PC^2 - AP^2 = 0$$

$$100 - 2DP^2 - (10 - AP)^2 - AP^2 = 0$$

$$100 - 2DP^2 - 100 + 20AP - AP^2 - AP^2 = 0$$

$$DP^2 = -AP^2 + 10AP$$

$$AO^2 = AP^2 - AP^2 + 10AP, AO^2 = 10AP$$

$$AO^2 = \frac{11 \cdot 25}{3}$$

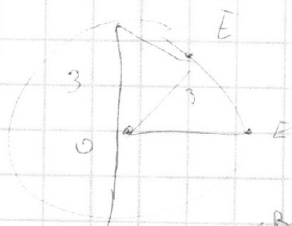
$$AP = \frac{AO^2}{10}$$

$$AP = \frac{11 \cdot 25}{30} = \frac{11 \cdot 5}{18} = \frac{11 \cdot 10}{36}$$

$$6 \cdot \frac{AO^2}{10} = 511 \cdot AO$$

$$AO = \frac{511 \cdot 10}{6}$$

$$AO = \frac{511 \cdot 5}{3}$$



$$\angle BOE \leq 90$$

$$BE^2 = BO^2 + OE^2 - 2BO \cdot OE \cdot \cos \alpha$$

$$25 = 9 + 9 - 18 \cos \alpha \leq 26$$

$$AB=6, BE=5, AE=511$$

$$AC=10$$

$$AD = AT + TD = k \cdot TE + \frac{BT}{k}$$

$$\begin{array}{r} 25 \cdot 11 \\ \times 11 \\ \hline 250 \\ + 275 \\ \hline 275 \end{array} \quad \begin{array}{r} 90 \\ 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\angle ADE = \angle ABE$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABE$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{AP}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 18}$$

$$AB \cdot AP = AE \cdot AD$$

$$6 \cdot AP = 511 \cdot AD$$

$$6 \cdot \frac{AO^2}{10} = 511 \cdot AO$$

$$\frac{3}{5} AO = 511 \quad AO = \frac{5}{3} 511$$

$$AO^2 = \frac{25}{9} \cdot 11, AP = \frac{25 \cdot 11}{30}$$

$$\sim 4$$

$$B \sim \text{роза}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a = x - \frac{15}{2}$$

$$b = \frac{15}{653}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$a \geq b \geq 0$$

$$a \geq 0 \geq b$$

$$0 \geq a \geq b$$

$$b \geq a \geq 0$$

$$b \geq 0 \geq a$$

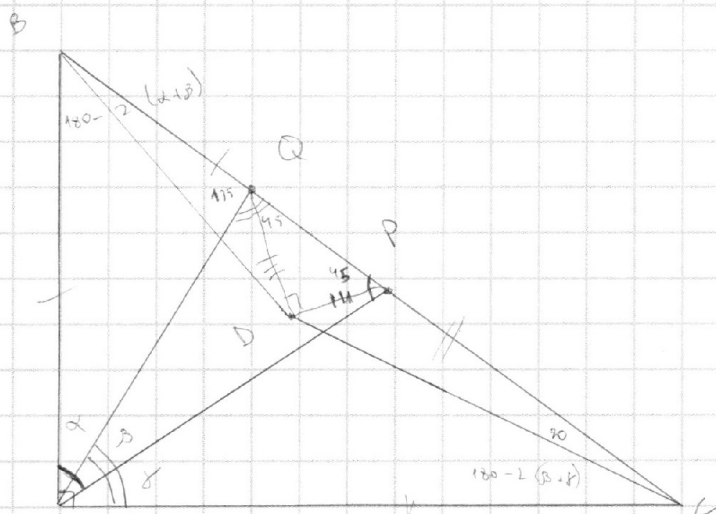
$$a+b + a-b \geq 2a \leq 3$$

$$a+b + b-a \geq 2b \geq 3$$

$$a-b + a+b \geq 2a \leq 3$$

$$-a-b + -a+b \geq -2a \leq 3$$

$$b-a + a+b \geq 2b \geq 3$$



$$AB \geq AD, AC \geq CD$$

$$2\beta \geq 90$$

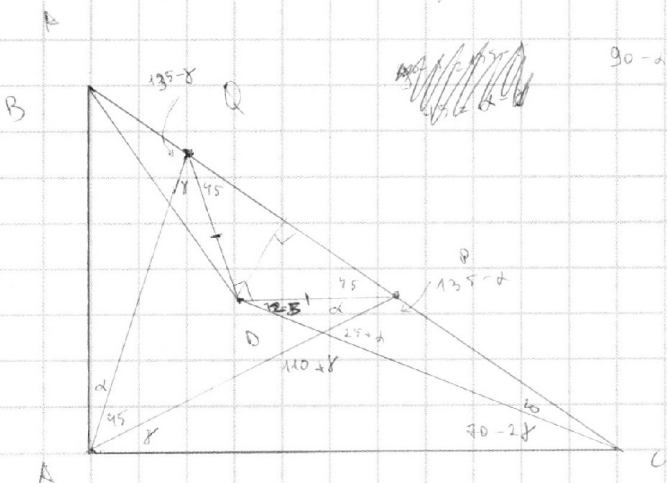
$$\beta \geq 45$$

$$\angle A + \angle P + \angle C \geq 160^\circ$$

$$\alpha + \beta + \beta + \gamma + \beta \geq 180^\circ$$

$$360 - \alpha - 3\beta - \gamma \geq 180$$

$$90 - \alpha + 135 - \gamma \geq 180$$



$$25 - \alpha \geq \alpha + 70 - \gamma$$

$$135 - \alpha$$

$$25 \geq 70 - \gamma$$

$$25 + \alpha$$

$$\gamma \geq 45$$

$$2\alpha + 25 \geq 70 - \gamma$$

$$\alpha + \gamma + \alpha = 55$$

$$25 + \alpha \geq \alpha$$

$$BQ^2 + CQ^2 \geq BC^2$$

$$BQ^2 + QP^2 + PQ^2 \geq BQ^2 + QP^2 + PC^2 + 2BQ \cdot QP + 2QP \cdot PC + 2QP \cdot PC \geq BC^2$$

$$BQ^2 + QP^2 + QP^2 + PC^2 \geq BQ^2 + 2BQ \cdot QP + PQ^2 + PQ^2 + PC^2 + 2PQ \cdot PC + PC^2 \geq BC^2$$

$$PQ^2 \geq 2BQ \cdot PC$$

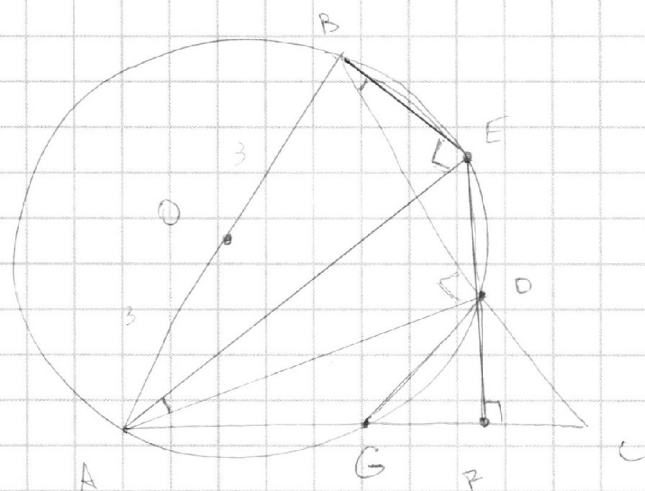


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



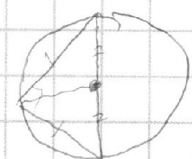
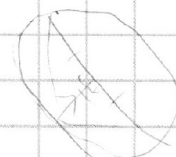
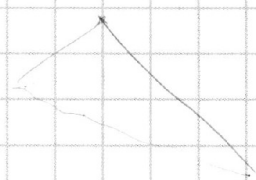
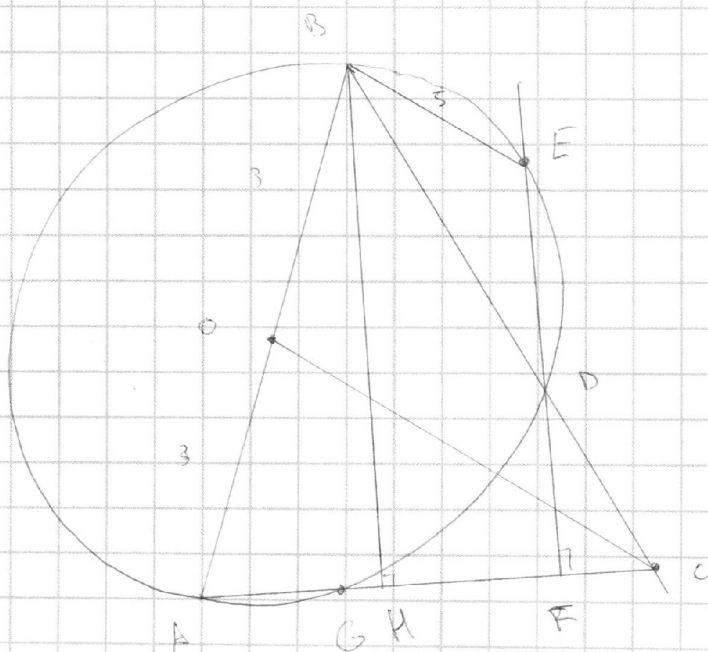
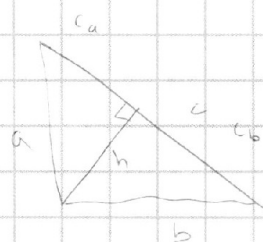
$$\begin{aligned} AC &= 10 \\ AB &= 6 \\ BE &= 5 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} AC=10 \\ AB=6 \end{array} \right\} \text{ и } BC=8$$

$$AE = \sqrt{36}$$

$$BD = \sqrt{36 - AD^2}$$

$$a^2 = c_a^2 + h^2$$

$$b^2 = c_b^2 + h^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(-2; -2; 1)$$

sum: 18

$$xz = ky$$

$$ky = z(z+3)$$

$$yz = ky(ky+3)$$

$$kyz = y(y+3)$$

$$kz = y+3$$

$$z = \frac{y+3}{k}$$

$$kyz = \frac{y+3}{k} \left(\frac{y+3}{k} + 3 \right)$$

$$y \frac{y+3}{k} = ky(ky+3)$$

$$\frac{y+3}{k} = k^2 y + 3ky$$

$$y+3 = k^3 y + 3k^2 y$$

$$k^3 y + 3k^2 y - y - 3 = 0$$

$$y(k^3 + 3k^2 - 1) - 3 = 0$$

$$k^2 y(k+3) = (y+3)$$

$$y(k^3 - 1) + 3(k^2 y - 1) = 0$$

$$x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$$

$$(x+d)^2(x+d+3)$$

$$(x^2 + 2xd + d^2)(x+d+3) =$$

$$= x^3 + x^2 d + 3x^2 + 2x^2 d + 2xd^2 + 6xd +$$

$$+ d^3 x + d^3 + 3d^2 =$$

$$= x^3 + 3x^2 d + 3x^2 + 3xd^2 + d^3 + 6xd + 3d^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

$$27$$

$$-3(x+y+z) - 9 = 3(xy+yz) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy+yz)$$

$$y = \frac{3}{k^3 + 3k^2 - 1}$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (xy + 3x + 3y + 9)(z+3)$$

$$xyz = xyz + 3xy + 3xz + 9x + 3yz + 9y + 3z + 9$$

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy+yz) + 9$$

$$-3(x+y+z) = 2(xy+xz+yz) + 9$$

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z)$$

$$(x+y+z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy+xz+yz)$$