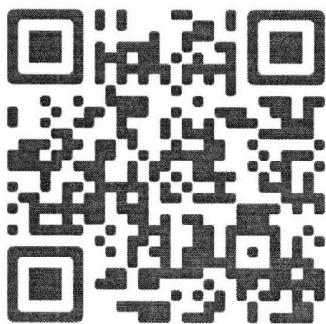
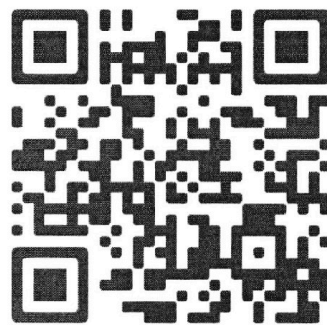




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, где $1 \leq a \leq 9$. $A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$.
Произведение $A \cdot B \cdot C$ должно быть квадратом, значит все делители должны входить в него в четной степени.
 101 — простое число, значит $B \cdot C$ должно делиться на 101 , чтобы оно входило в $A \cdot B \cdot C$ в четной степени.
Число C двузначное, значит оно не может делиться на 101 , потому что оно простое и больше, чем C . Значит B делится на 101 . Такие у нас есть условие, что B имеет в своей записи цифру 7 , значит единственные подходящие для B значения = $\underline{707}$.
Запишем произведение $A \cdot B \cdot C$:
 $\overline{aaaa} \cdot 707 \cdot C = 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot a \cdot C$
 a — однозначное число, значит оно не ~~имеет~~ ^{делится на 11, значит} в своей записи C 11 , чтобы 11 входило в $A \cdot B \cdot C$ в четной степени. Так как C в своей записи должен иметь цифру 1 , то единственным вариантом для C : $\underline{11}$.
 $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a$. Чтобы произведение было квадратом, a должно быть равно 7 .
Получаем тройку чисел $7777, 707, \cancel{11}$
Ответ: $(7777, 707, 11)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нелишнее преобразуем к:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

Конца x и y поменяем к стало:

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

Значение k не изменилось, значит:

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}, \text{ так как числа } x \text{ и } y \text{ по условию}$$

положительны, то числитель не равен 0, значит

если числители одинаковые, а знаменатели разные, при этом значение равно, то знаменатели равны.

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$(x-4)(y+4) = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow xy$$

$y = x-4$, т.к. x и $y > 0$, то $x > 4$. Подставим $x-4$ вместо y и преобразуем M :

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12(x^2 - 4x) = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = 64$$

Значит M может принимать только значение 64.

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

перенесем все в одну часть

$$(\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) + (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y = \cos 2\pi y \quad \text{по формуле косинуса двойного угла}$$

$$\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = \cos(\pi x - \pi y) \quad \text{по формуле косинуса разности.}$$

Получаем уравнение: $\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y)$

$$\cos 2\pi y = \cos(\pi - \pi x + \pi y) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Этого можно и то же, т.к.} \\ \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) \end{array} \right)$$

~~Косинус равен в 2-х случаях: 1) $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$ или $2\pi k$, либо 2) $\cos \alpha = \cos(-\alpha + 2\pi k)$, т.е. $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$~~

$$1) 2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k \quad | : \pi$$

$$2y = 1 - x + y + 2k$$

$$\boxed{y = 1 - x + 2k}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{подходит пар } (x, 1 - x + 2k), k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2\pi y = -\pi + \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$2y = -1 + x - y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{-1 + x + 2k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

подходит пар $(x, \frac{-1 + x + 2k}{3}), k \in \mathbb{Z}$

$$a) (x, 1 - x + 2k), k \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x; \frac{-1 + x + 2k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Заменим $\arccos \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7}$ по основному арктригонометрическому тождеству, получаем

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi, \text{ так как аргументы}$$

в арксинуса принимают значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$,

то единственно возможным случаем, удовлетворяющим неравенству при $\arcsin \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$, то есть пара $(7, 4)$ не подходит.

Осталось посчитать к-во пар, учитывая ОДЗ:

1) $y = 1 - x + 2k$. Если мы возьмем нечетное x , то $1 - x$ — четное, так как $2k$ — четное, то $2k + 2$, мы получим, что y четное, значит принимает значения $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

Если x четное, то наоборот y нечетное, то есть принимает значения $\{-3, -1, 1, 3\}$

т.к. $1 - x$ нечетное
а $2k$ — четное

2) $y = \frac{x-1+2k}{3}$, если x — нечетное, то $x-1+2k$ — четное число

то есть y — четное, если же x — четное, то $x-1+2k$ — нечетное, тогда y — нечетное. Получим также те же пары как и в 1) пункте. Осталось посчитать:

1) x нечетное y четное: значений x $\{-7, -5, \dots, 7\}$ — 5 значений y $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$ — 5 значений
и пара $(7, 4)$ не подходит, то есть 39



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) x -четное, y -нечетное

7 значений x $(-6, -4, \dots, 4, 6)$ - 4 значения y $(-3, -1, 1, 3)$

~~Всего~~ $7 \cdot 4 = 28$ пар.

Всего пар получается $28 + 39 = 67$

Ответ: 67.

* В подготовке пар мы понимаем, что можем взять любое k , по этому любое значение y произвольной четности мы можем получить при данном x .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас было x 11-классников. Посчитаем вероятность Пети и Васи попасть на концерт в начале месяца. Для этого мы должны посчитать количество четверок, где есть Петя и Вася, и поделить на количество всех четверок:

$$1) \quad \frac{1}{C_x^4} \cdot \frac{C_{x-2}^2}{2!} \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2!} \cdot 4! \quad \left(\begin{array}{l} \text{делим на } 2!, \\ \text{т.к. учитываем} \\ \text{без повторений} \\ \text{отличающихся} \\ \text{перестановкой} \end{array} \right)$$

Всего C_x^4 четверок

$$\text{Вероятность в начале месяца: } \frac{(x-2)(x-3)}{C_x^4 2!} = \frac{(x-2)(x-3)}{\frac{x!}{(x-4)! 4!} 2!} =$$

$$= \frac{4! (x-2)(x-3)}{(x-3)(x-2)(x-1)(x)} = \frac{24}{2! x(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)}$$

Пусть в конце месяца продали n билетов, $n > 4$ посчитаем вероятность Пети и Васи попасть на концерт

$$2) \quad \frac{1}{C_x^{n-4}} \cdot \frac{C_{x-2}^2}{2!} \cdot \frac{(x-2)(x-3) \dots (x-n+1)}{(n-2)!} \cdot \frac{2!}{(n-2)!}$$

Всего $n-4$: C_x^{n-4}

$$\text{Вероятность: } \frac{(x-2)(x-3) \dots (x-n+1)}{C_x^{n-4} 2!} = \frac{n! (x-2)(x-3) \dots (x-n+1)}{(x-n+1)(x-n+2) \dots (x-1)(x)}$$

$$= \frac{n!}{x(x-1)(n-2)!} = \frac{(n-1)(n)}{x(x-1)}$$

По условию $\frac{n(n-1)}{x(x-1)} = \frac{12 \cdot 11}{x(x-1)} \Leftrightarrow n^2 - n = 12 \cdot 11$

Корни этого уравнения $n=12$ подходит и $n=-11$ не подходит, т.к. $n \in \mathbb{N}$

Ответ: 12.

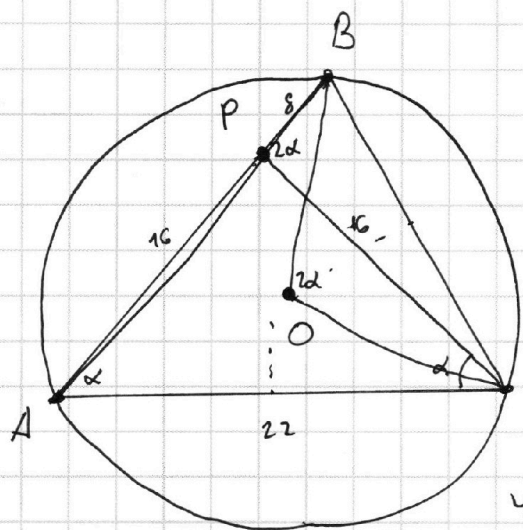


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Так как точка P принадлежит ω_2 и $O \in \omega_2$, то 4-ник BPOC - вписанный, а значит $\angle BPC = \angle BOC$, т.к. они опираются на одну дугу.

Пусть $\angle A = \alpha$ тогда $\angle BOC = 2\alpha$, потому что в ω_1 угол BAC вписанный, а угол BOC центральный.

$\angle CPB = \angle BOC = 2\alpha$ из вписанности.

Рассмотрим $\triangle APC$: $\angle APC = 180 - \angle BPC = 180 - 2\alpha$

$$\angle PAC = \alpha$$

$$\angle ACP = 180 - \alpha - 180 + 2\alpha = \alpha, \text{ значит}$$

$\triangle APC$ - равнобедренный, ^{тогда} ~~то есть~~ $AP = PC = 16$

Найдем по теореме косинусов из $\triangle APC$ угол A:

$$46^2 = PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{16^2 - 11^2}{16^2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 27}{16}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

Теперь мы можем найти $S_{\triangle ABC}$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

Множество точек 2-го неравенства расположено

внутри окружности с центром $(0,0)$ и радиусом 6.

Множество точек 2-го неравенства образует точки с координатами $(4\sin\alpha, 4\cos\alpha)$ и 2-мя

прямыми, параллельными осям координат. Эти

прямые делят плоскость на 4 части, и для неравенства подходят значения x и y такие, что $x + 4\sin\alpha$ и $y - 4\cos\alpha$ разных знаков, т.е.

$$1) x \leq -4\sin\alpha \quad y \geq 4\cos\alpha$$

$$2) x \geq -4\sin\alpha \quad y \leq 4\cos\alpha.$$

Фигура $F(\alpha)$ нарисована ниже.

Периметр состоит из сумм отрезков AB и CD и дуг AC и BD

Сумма дуг AC и BD постоянна и равна $\frac{2\pi R}{2} = 6\pi$

Найдем сумму AB и CD :

$$AB = 2\sqrt{9 - 16\cos^2\alpha} \quad \text{по Т. Птоп.}$$

$$CD = 2\sqrt{9 - 16\sin^2\alpha}$$

$$M = 6\pi + 2\sqrt{9 - 16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 16\sin^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y =$$

$$= \cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = -\cos 2\pi y = \cos(\pi - 2\pi y)$$

$$\pi x - \pi y = \pi - 2\pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 1 - 2y + 2k$$

$$x + y = 1 + 2k$$

$$x = 5$$

$$k = 2$$

$$y = 0$$

$$y = 1 + 2k - x$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7}$$

$$\left(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$-(\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4}) > -\pi$$

$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

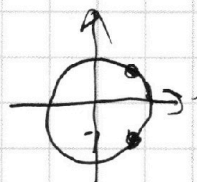
$$\frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

из 61 scope less ~

$$\arcsin \frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x \neq 7}$$

$$y \neq 4$$



$$\pi x - \pi y = \pi - 2\pi y + 2\pi k$$

$$\pi x - \pi y = 2\pi y - \pi + 2\pi k$$

$$x - y = 2y - 1 + 2k$$

$$3y = x + 1 - 2k$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{1 - 2k}{3}$$

$$\begin{aligned} &(\sin 0 - \sin \pi) \cdot \sin 0 = \\ &= \underbrace{\cos 0}_{1} (\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\cos \pi}_{-1}) \end{aligned}$$

$$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1$$

$$\boxed{-7 \leq x \leq 7}$$

$$\boxed{-4 \leq y \leq 4}$$

$$-4 \leq y \leq 3$$

$$-7 \leq x \leq 6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

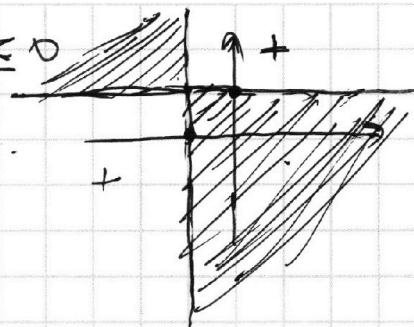
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$(x+1)(y-1) \leq 0$$



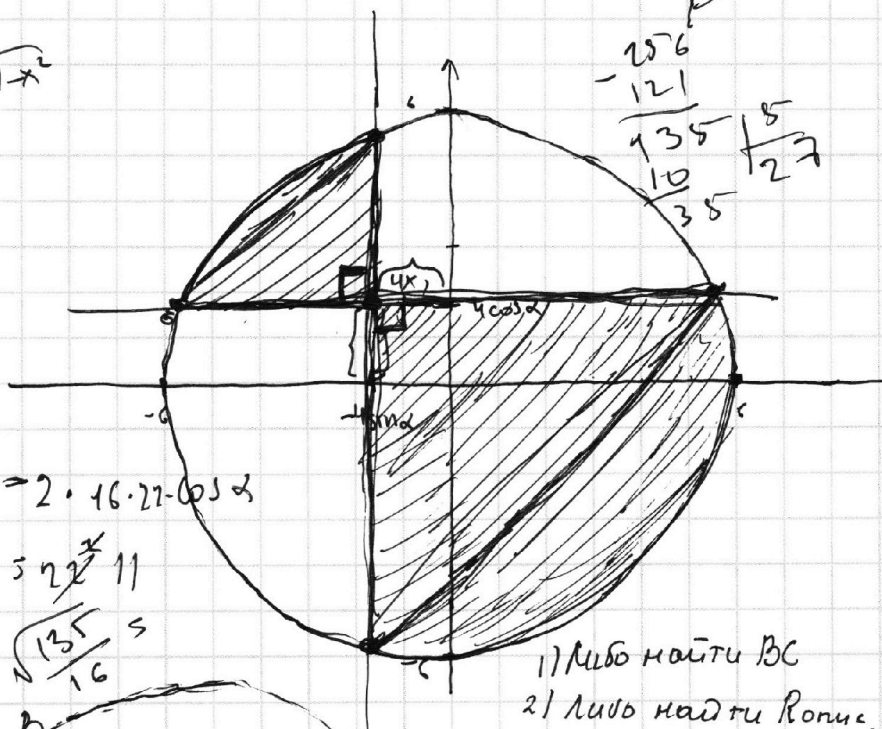
$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$\cos \alpha = x \quad 4 \cos \alpha = 4x$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$$

$$-4 \sin \alpha = -4\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 440 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$



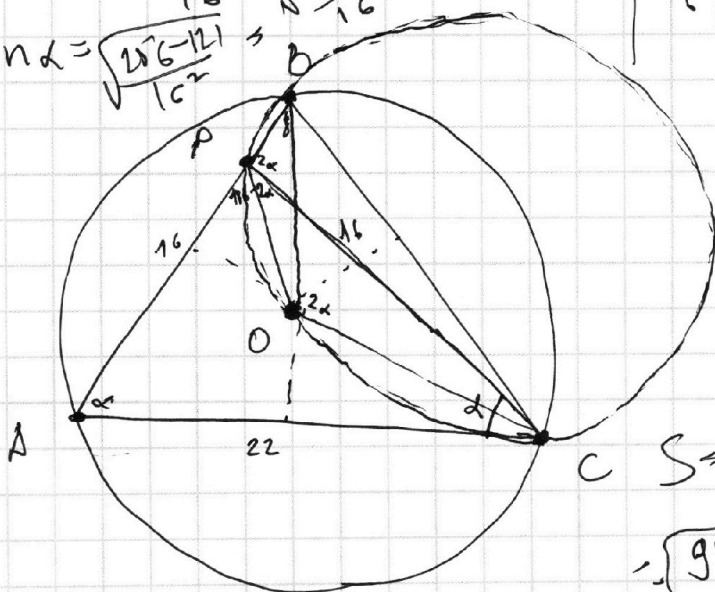
$$\begin{array}{r} 256 \\ -121 \\ \hline 135 \\ 10 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ 27 \end{array}$$

$$256 = 256 + 484 = 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha = 22 \cdot 11$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{256-121}}{16} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$



1) либо найти BC
 2) либо найти Rопис.

$$PC = 16$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{9 \cdot 15}}{16}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - (x^2 - 8x + 16)(x-4) - 12(x)(x-4) \quad n! = 24 \cdot 11?$$

$$x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 - (12x^2 - 48x) = x^3 - 24x^2 + 96x - 64$$

11-мессингов

4 билета П, В.

$$\frac{P \quad B \quad (x-2) \quad (x-3)}{C_{x-2}} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)!} = \frac{4!(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{24}{(x-5)(x-4)} \quad \text{Вероятность в начале месяца}$$

$$\frac{264}{(x-5)(x-4)} \quad \text{Вероятность в конце месяца}$$

$$\frac{(x-2)(x-3) \dots (x-n+1)}{C_{x-2}} = \frac{(x-2) \dots (x-n+1)}{(x-2)!} = \frac{n!}{n!(x-2-n)!}$$

$$= \frac{n!}{(x-n-1)(x-n)(x-n+1) \dots (x-2)} = \frac{n!}{(x-n-1)(x-n)} = \frac{264}{(x-5)(x-4)}$$

$$n! \leq 264 \quad n=5 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \text{ - много.}$$

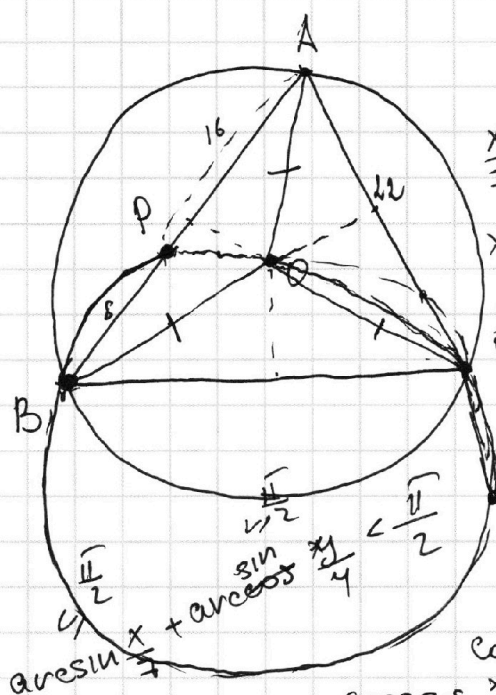


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABC} = ?$

minimum

$$\frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$x \neq \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$16 \cdot 24 = 22 \cdot (22 + x)$$

$$192 = 242 + 11x$$

$$x = \frac{50}{11}$$

$$\frac{16}{12} = \frac{32}{32}$$

$$C (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{16}{192}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\arccos \frac{x}{7}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y) + (\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) =$$

$$= \cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$$

$$2\pi y = -\pi + \pi x - \pi y + 2\pi k$$

$$3y = -1 + x + 2k$$

$$\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y) = \cos(\pi - \pi x + \pi y) \quad y = \frac{-1 + x + 2k}{3}$$

$$1) \quad 2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k$$

$$2y = 1 - x + y + 2k$$

$$y = 1 - x + 2k, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\left(x; \frac{1-x+2k}{3}\right)$$

$$2) \quad 2\pi y = \pi$$

$$2y = x + y - 1 + 2k$$

$$y = x - 1 + 2k$$

$$(x; x - 1 + 2k)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(A, B, C)

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{7777} \text{ или } \overline{7777}$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$x=5$$

$$y=1$$

$$C = \frac{1}{5.1} = \frac{1}{1.5} = \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$

$$A = 11 \cdot \overline{a0a} = 11 \cdot \overline{a} \cdot \overline{101}$$

простое

$$A = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x^2 - 8x + 16)(x-y)^3 =$$

$$B : 101$$

$$B = 707$$

$$= x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

целая

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 7 \cdot 101 \cdot C = 101 \cdot 7 \cdot 11 \cdot a \cdot C$$

$$C = 11$$

$$a \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot 11^2$$

$$a=7$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$11 \cdot 16 - 44 \cdot 4 + 64 = 176 - 176 + 64$$

$$(x-4)(y+4) = xy + 4x - 4y - 16 = xy + 12x - 48x + 64 =$$

$$x - y - 4 = 0$$

$$(x = y + 4)$$

$$(f(y); +\infty)$$

$$x^3 - y^3 = x^3 - (x-4)^3 = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = 12x^2 - 48x + 64$$

min в точке $x=2$

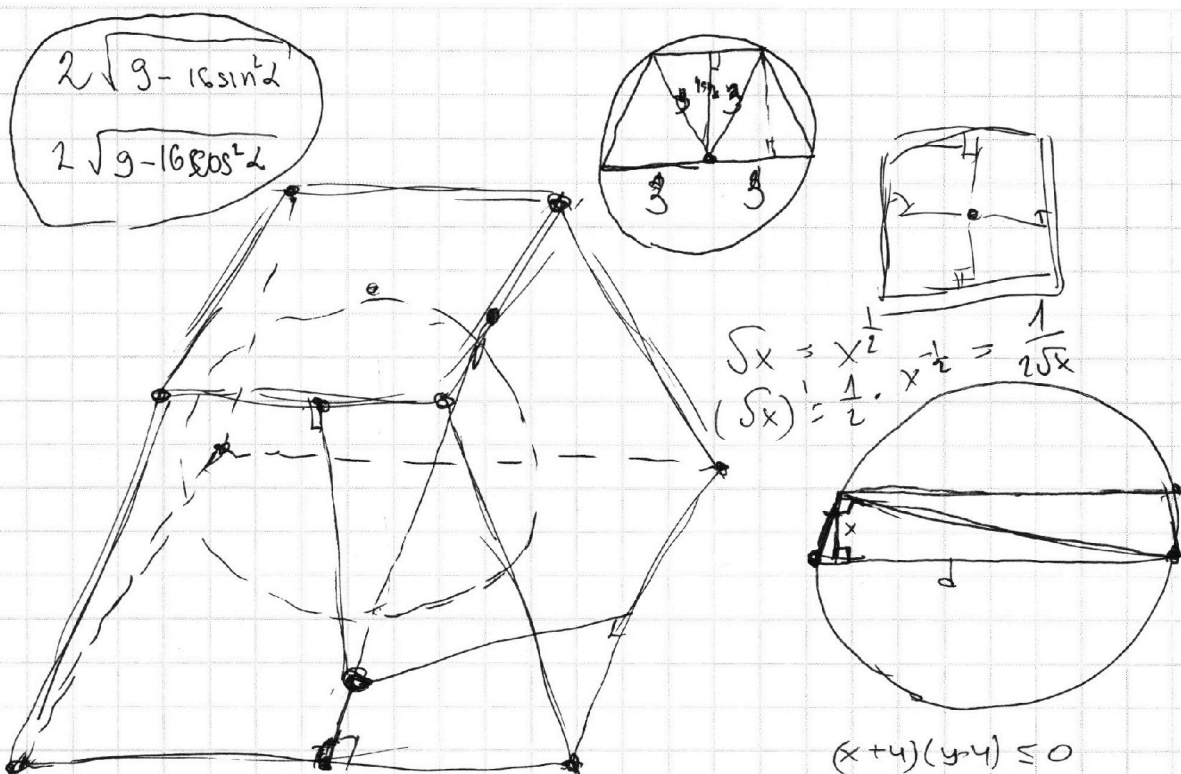


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

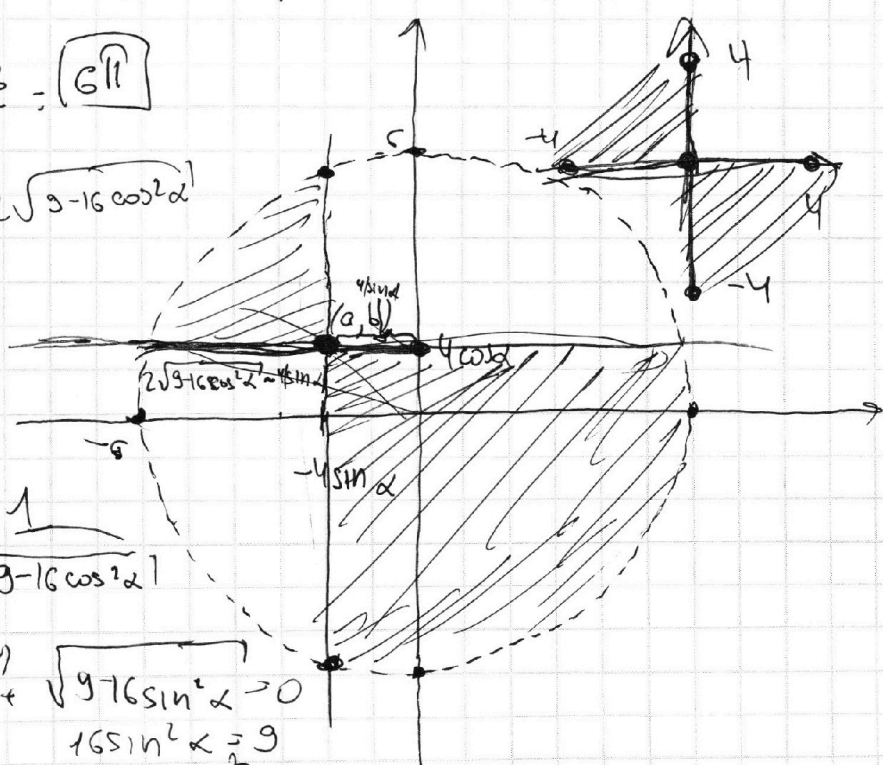


$$2\pi R = \frac{2\pi \cdot 6}{2} = [6\pi]$$

$$f = 2\sqrt{9-16\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-16\cos^2\alpha}$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{9-16\sin^2\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{9-16\cos^2\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9-16\cos^2\alpha} + \sqrt{9-16\sin^2\alpha} &= 0 \\ 16\cos^2\alpha &= 9 & 16\sin^2\alpha &= 9 \\ \cos\alpha &= \frac{3}{4} & \sin\alpha &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) y = 1 - x + 2k$$

$k = -6$
 $k = -5$
 $k = -4$
 $k = -3$
 $k = -2$

$$x = -7:$$

$$y = 1 + 7 + 2k = 8 + 2k$$

$$x = -2$$

$$y = -4, -2, 0, 2, 4$$

$$x = -6$$

$$y = 7 + 2k$$

$$x = -6$$

$$y = 3, 1, -1, -3$$

$$x = -5$$

x чет:

$$y: -3, -1, 1, 3$$

x - нечет y - чет

$$-2, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$$

$$8 \cdot 5 = 40$$

x нечет

$$y: -4, -2, 0, 2, 4$$

$$2) y = \frac{x+1-2k}{3}$$

$$x = 7 \quad y = -4, -2, 0, 2, 4$$

$$x = 7$$

$$y = \frac{8-2k}{3}$$

$$y = 4$$

$$y = 2$$

$$y = 0$$

$$y = -2$$

$$y = -4$$

$$x = 6 \quad y = \frac{7-2k}{3}$$

$$2k = 3$$

$$7 - 3y$$

$$x: -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$$

$$7 \cdot 5 = 35$$

$$x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$7 \cdot 4 = 28$$

$$28 + 35 + 4 = 32 + 35 = 67$$

$$67 \text{ Б.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

