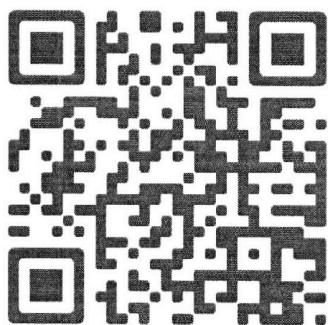




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 8$ ,  $BE = 6$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$  являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle BCA = 50^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 = z(z-2) \\ yz = -2x + x^2 = x(x-2) \\ zx = -2y + y^2 = y(y-2) \end{cases}$$

I Заметим, что  $xy \cdot yz \cdot zx = z(z-2) \cdot x(x-2) \cdot y(y-2)$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x-2)(y-2)(z-2)$$

$x, y, z$  нечетные по условию

$$xyz = (x-2)(y-2)(z-2)$$

Заменим  $xy = -2z + z^2$ :

$$(z^2 - 2z)z = (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$z^2(z-2) = (x-2)(y-2)(z-2). \text{ Заметим, что}$$

$z \neq 2$ , иначе  $xy = -2z + z^2 = 0 \Rightarrow$  хотя бы  $y=0$ ,

а по ум.  $x, y$  нечетные. Значит,

$$z^2 = (x-2)(y-2) \quad (x-2)(y-2) = xy - 2(x+y) + 4$$

II Подставим  $xy$ :  $z^2 = z^2 - 2z - 2(x+y) + 4$

$$z = x+y-2 \quad \text{Подставим } z$$

выражение, значит, которое нужно найти:  $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

$$\begin{aligned} (2-(x+y)-2)^2 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + (x+y)^2 = \\ &= x^2 - 4x + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - \\ &- 2x - 2y - 2z + 12 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y) - 2(2-(x+y)) + 12 = 2x - 2y - 2z = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 8 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 5 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~III~~  $zx = -2y + y^2$  (из системы)

IV  $(2 - (x+y))x = y^2 - 2y$

$$2x - x^2 - yx = y^2 - 2y$$

$$yx = z^2 - 2z \text{ (из системы)}$$

$$2x - x^2 - (-2z + z^2) = y^2 - 2y$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 5$$

$$+ 5 \text{ (из III пункта)} = 3 + 5 = 8$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} = 10^{30001} - 1$$

$$n^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1 =$$

$$= 1 \underbrace{0 \dots 0}_{90003} + 3 \underbrace{0 \dots 0}_{30001} - 3 \underbrace{0 \dots 0}_{60001} 1 =$$

$$= 1 \underbrace{0 \dots 0}_{60001} \underbrace{30 \dots 0}_{30001} - 3 \underbrace{0 \dots 0}_{60001} 1 =$$

$$= \underbrace{99 \dots 9}_{30000} \underbrace{70 \dots 0}_{30000} 2 \underbrace{9 \dots 9}_{30001}$$

Ответ: 60001





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

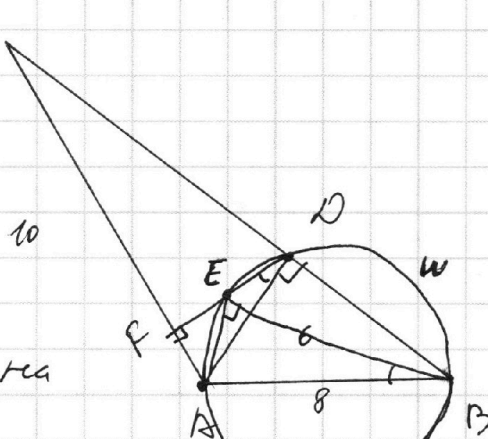
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle D = 90^\circ$  (т.к. опирается на диаметр  $AB$ )  $\Rightarrow$

$\angle AEB = 90^\circ$  (т.к. опирается на диаметр  $AB$ )

$\angle EDA = \angle EBA$  (т.к. опираются на одну дугу)



Для  $\triangle AEB$   $BE = 6$ ,  $AB = 8$ ,  $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow$  из г. Пифагора

получим, что  $AE = 2\sqrt{7} \Rightarrow \sin \angle EBA = \frac{2\sqrt{7}}{8}$

$= \frac{\sqrt{7}}{4}$ .  $\angle EDA = \angle EBA \Rightarrow \sin \angle EBA = \sin \angle EDA = \frac{\sqrt{7}}{4}$

~~по теореме~~  $\sin \angle EDA = \frac{AF}{AD}$  ( $DF \perp AC$  по ум.)

из метр. соотн. прямоуго. тр-у.  $AC \cdot AF = AD^2$

$AC = 10$ ,  $AD = \frac{AF}{\sin \angle EDA}$  ( $\angle FDA = \angle EDA$  т.к.  $E \in DF$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AF^2}{10 \sin^2 \angle EDA} \Rightarrow AF = 10 \cdot \sin^2 \angle EDA =$

$= 10 \cdot \frac{7}{16} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$

Ответ:  $\frac{35}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего  $x$  коробов  
для пяти коробов вероятностей выпрыгива:

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cancel{1} \cdot (x-3)!}{2! \cdot (x-5)!} : \frac{x!}{5! \cdot (x-5)!}, \text{ т.к. } \cancel{\text{не выпрыгивает}}$$

когда выпрыгивает, ~~то~~ значит, что точно были открыты 3 выпрыгива и 2 какие-то остальные,

а общее кол-во случаев  $\frac{x!}{5! \cdot (x-5)!}$  т.к. 5 коробов.

То есть, вероятность выпрыгива  $\frac{5! \cdot (x-3)!}{2! \cdot (x-5)! \cdot x!}$

Для 7 коробов:

аналогично, вероятность выпрыгива для 7 коробов

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (x-3)!}{4! \cdot (x-7)!} : \frac{x!}{7! \cdot (x-7)!} = \frac{7! \cdot (x-3)!}{4! \cdot x!}$$

значит, вероятность увеличилась в

$$\frac{7! \cdot (x-3)!}{4! \cdot x!} : \frac{5! \cdot (x-3)!}{2! \cdot x!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{210}{60} =$$

$= 2,5$  раз

ответ: 2,5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

Пусть корни будут  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$

$$x_1 = a_0 + 5k, x_2 = a_0 + 6k \quad (\text{т.к. 6-й и 7-й члены арифм. прогрессии})$$

$$2) 3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

Пусть корни  $x_3$  и  $x_4$ ,  $x_3 < x_4$ .

$$x_3 = a_0 + 3k, x_4 = a_0 + 8k \quad (\text{т.к. 4-й и 9-й члены арифм. прогрессии})$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - 2a = 2a_0 + 11k$$

$$x_3 + x_4 = (a^3 - 2a^2) = 2a_0 + 11k \quad (\text{как из г. Внета: } ax + bx + c = 0, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a})$$

$$\frac{a^2 - 2a}{3} = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = a(a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

$$\textcircled{I} a=0: x^2 - 0x + 0 - 0 - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7}$$

$$3x^2 - (0 - 0)x + 6 - 0 = 0 \quad \emptyset, \text{ т.к. } 3x^2 \geq 0$$

Значит,  $a=0$  не подходит

$$\textcircled{II} a=2: x^2 - 0x + 4 - 2 - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}$$

$$3x^2 - (2^3 - 2 \cdot 2^2)x + 6 - 32 = 3x^2 - 26 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{26}{3}}, x_4 = \sqrt{\frac{26}{3}} \Rightarrow \text{противоречие, т.к. } x_2 - x_1 =$$

$$= k = 2\sqrt{5}, \text{ а } x_4 - x_3 = 5k = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$\textcircled{IV} a=3: x^2 - (3^2 - 2 \cdot 3)x + 9 - 3 - 7 = x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1.5 + \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{\sqrt{13}}{2} \quad 3x^2 - (3^3 - 2 \cdot 3^2)x + 6 - 3^5 = 0 \Rightarrow x_3 = 1.5 - \frac{5\sqrt{13}}{2}, x_4 = 1.5 + \frac{5\sqrt{13}}{2};$$

$$\text{из первого уравнения } x_2 - x_1 = k = \sqrt{13}, \text{ из второго } x_4 - x_3 = 5k = 5\sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} k = \sqrt{13} \\ 5k = 5\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ поскольку}$$

Ответ:  $a = 3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~BP = DP~~

①  $AB = BP$  (по ум.)  
 $\angle ABC = 40^\circ$  (т.к.  $\angle BCA = 50^\circ$ )  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle BAP = 70^\circ = \angle BPA$

②  $AC = CQ$  (по ум.)  
 $\angle BCA = 50^\circ$  (по ум.)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle CAQ = 65^\circ = \angle CQA$

③  $\angle BAP + \angle CAQ - \angle QAP = \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  из II и I пунктов  $\angle QAP = 45^\circ$ , а т.к.  
 $\angle PQR = 90^\circ$  (по ум.) /  $\angle PQR = 90^\circ$  (по ум.)  $\Rightarrow$   $\angle PQR = 90^\circ$   
 и A и D лежат в одной полупрямой от QR,  
 D - центр. ошн. окр.  $\triangle AQR \Rightarrow AD \cdot DQ = DP$

④  $\angle DQR = \angle DRQ = 45^\circ$  (т.к.  $QR = DQ$  и  $QR = DR$ )  
 $\Rightarrow$  из I пункта следует, что  $\angle AQR = 20^\circ$ , а из  
 II пункта, что  $\angle AQR = 25^\circ$

⑤ Из IV пункта  $AD = DQ = DP \Rightarrow$  из IV пункта  
 $\angle QAD = 20^\circ$ ,  $\angle DAP = 25^\circ$ .  $\angle AQR = \angle AQR$ ,  $\angle DQR = 45^\circ$   
 $\angle AQR = \angle AQR + \angle BQR = 65^\circ$ , а т.к.  $\angle ABC$  есть  $\angle ABC = 40^\circ$ ,  
 $\angle BAQ = 25^\circ \Rightarrow \angle BAD = \angle BAQ + \angle QAD = 45^\circ$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

VI) Пусть высоты  $DN_2$  и  $DN_1$  на  $AB$  и  $BC$  соответств. ( $DN_2 \perp AB$ ,  $DN_1 \perp BC$ )  
Из V пункта  $\angle BAD = 45^\circ \Rightarrow \triangle AN_2D$  равнобедрен.  
~~равноб.~~ Пусть  $AD = X$  ( $= QD =$  ~~QP~~ т.к.  $D$  центр опис. окр.  $\triangle AQP$ ).  $DN_2 = \frac{X\sqrt{2}}{2}$ .  
Р-ции  $\triangle QDN_1$ : он равнобедренный (т.к.  $\angle N_1 = 90^\circ$ ,  $\angle DQP = 45^\circ$  (IV пункт)), а т.к.  $QD = X$ , то  $DN_1 = \frac{X\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN_1 = DN_2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow D$  равноуд. от сторон угла  $ABC \Rightarrow$   
 $\Rightarrow BD$  - бис.  $\angle ABC \Rightarrow \angle ABC = \frac{\angle ABC}{2} = 20^\circ$   
Ответ  $20^\circ$



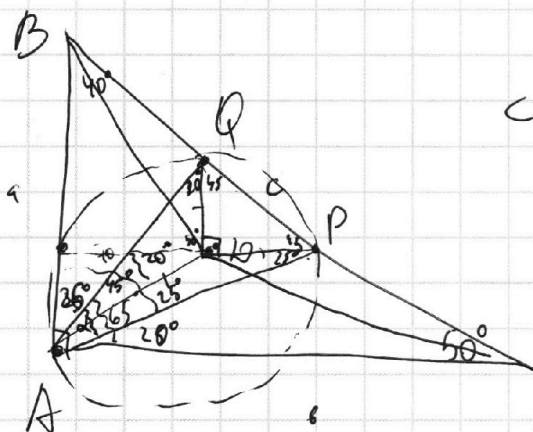
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7.



$$\angle B(A \approx 50^\circ)$$

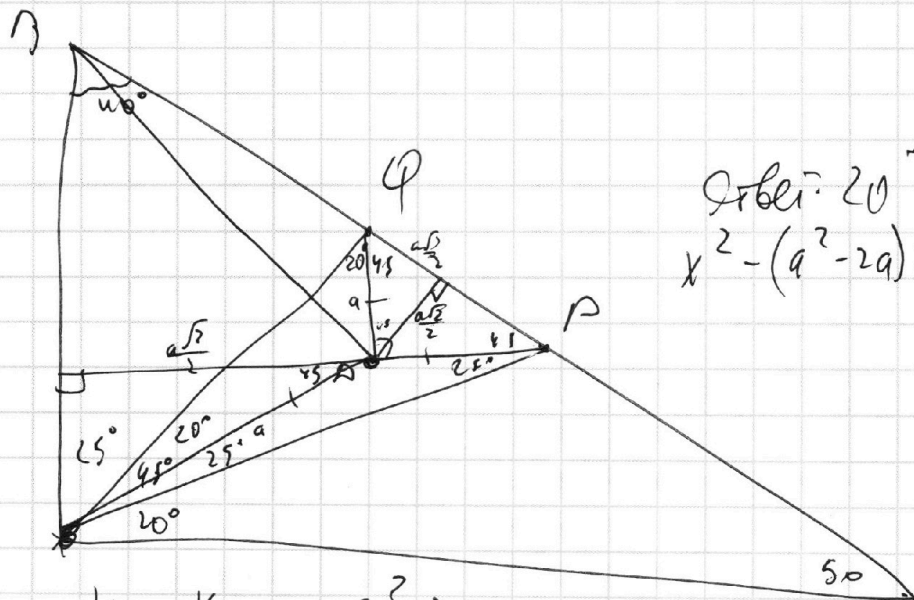
$$\angle BCL = ?$$

$$45 + 65 = 110$$

$$70 + 65 - \alpha = 90 \quad \alpha = 45^\circ$$

$$a^2 + b^2 = (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

$$45, 90^\circ \rightarrow \text{центр } P \text{ осн. Окр.}$$



$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^3 - a - 7 = 0$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - 2a$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \quad a \cdot (a-3)(a-2)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дана 5:

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (x^2 - 3)!}{5! \cdot (x-5)!} = \frac{1 \cdot (x-3)!}{2! \cdot (x-5)! \cdot \frac{x!}{5! \cdot (x-5)!}} = \frac{5! \cdot (x-3)!}{2! \cdot x!}$$

Дана 7:

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot (x-3)!}{4! \cdot (x-7)!} = \frac{x!}{7! \cdot (x-7)!} = \frac{(x-3)! \cdot 7! \cdot (x-7)!}{4! \cdot (x-7)!}$$

$$= \frac{(x-3)! \cdot 7!}{4! \cdot x!}$$

Сравн  $\frac{(x-3)!}{x!} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \frac{(x-3)!}{x!} = 60 \frac{(x-3)!}{x!}$

$$\frac{210}{60} = 2,5$$

Ответ: 6 2,5 раз

NS.

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$x_1, x_2 = 6-a \text{ и } 7-a$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$x_3, x_4 = 4-a \text{ и } 9-a$$

Пусть  $x_1 < x_2$ ,  $x_3 < x_4$ ,  $x_1 = x + 5k$ ,  $x_2 = x + 6k$ ,  $x_3 = x + 3k$ ,  $x_4 =$

$$= x + 8k \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \quad a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \quad a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0 \quad a(a-2)(a-3) = 0$$

$$a = 0:$$

$$x^2 + (0-0)x + 0-0-7 = 0 \quad a = 5:1$$

$$x^2 = 7 \quad x^2 = \pm \sqrt{7} \quad 3x^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow a \text{ не подходит}$$

$$a = 2:$$

$$x^2 + 4 - 2 - 7 = 0 \quad x^2 = 5 \quad x = \pm \sqrt{5}$$

$$3x^2 - (8-8)x + 6-32 = 0$$

$$a = 3:$$

$$x^2 - 3x + 9 - 3 - 7 = 0 \quad x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (x-3)^2 = 10$$

$$3x^2 = 25 \quad x = \pm \frac{5}{\sqrt{3}} \quad x^2 - 3x - 79 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$z(z-2)$$

$$x(x-2)$$

$$y(y-2)$$

$$x^2 y^2 = z^2 (z-2)^2$$

$$y^2 z^2 = x^2 (x-2)^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{x(x-2)}$$

$$x^2 y^2 z^2 = x y z (z-2)(x-2)(y-2)$$

$$x y z = (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$z \cdot z(z-2) = (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$z^2 = (x-2)(y-2)$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 =$$

$$2z = 4 - 2x - 2y$$

$$z = 2 - x - y$$

$$x = 2 - z - y$$

$$I = x^2 - 2x - 2x + y^2 - 2y - 2y + z^2 - 2z - 2z + 12 =$$

$$= xy + yz + zx - 2x - 2y - 2z + 12 =$$

$$= xy + yz + zx - 2x - 2y - (4 - 2x - 2y) + 12 =$$

$$= xy + yz + zx + 8 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2y + 8 =$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 5$$

$$\frac{z^2}{2z} + zx + x^2 - 2x + 8 =$$

$$(2-z-y)y = -2z + z^2$$

$$2y - y^2 - yz = -2z + z^2$$

$$2y - y^2 - x^2 + 2x = -2z + z^2$$

$$II \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2x - 2z = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3 \Rightarrow \text{ответ: } 8.$$

$$n^2 9 \dots 9$$

$$= 10^{300001} - 1$$

$\sqrt{2}$

$$n^3 = 10^{300003} - 1 + 3 \cdot 10^{300001} - 3 \cdot 10^{300000} + 1$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0 \quad x_1 + x_2 = a^2 - 2a$$

$$x^2 - \left(\frac{a^3 - 2a^2}{3}\right)x + \frac{6 - a^5}{3} = 0 \quad x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

rem  
 $x_1 < x_2, x_3 < x_4$   
 $x+5k \quad x+6k \quad x+7k \quad x+8k$

$$a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \quad a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a-2)(a-3) = 0 \quad \text{атер.}$$

1)  $a=0$ : I  $x^2 - (0 - 2 \cdot 0)x + 0 - 0 - 7 = 0$

$$x^2 = 7 \quad x_1 = -\sqrt{7}; x_2 = +\sqrt{7}$$

II:  $x^2 - \left(\frac{0-0}{3}\right)x + \frac{6-0}{3} = 0 \quad x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \emptyset$

2)  $a=2$ :

$$x^2 - (2^2 - 2 \cdot 2)x + 4 - 2 - 7 = x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}$$

$$x^2 - \left(\frac{8-8}{3}\right)x + \frac{6 - \frac{32}{3}}{3} = x^2 - \frac{26}{9} = 0$$

3)  $a=3$ :

$$x^2 - (9-6)x + 9-3-7 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{27-9}{3}\right)x + \frac{6-3^5}{3} = x^2 - 3x + 2 - 81 = x^2 - 3x - 79 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 79 = 9 + 316 = 325 = 5 \cdot 65 = 5(5\sqrt{13})^2$$

$$x = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2} \Rightarrow 5k = 5\sqrt{13} \Rightarrow a = 3 \quad \text{можется}$$