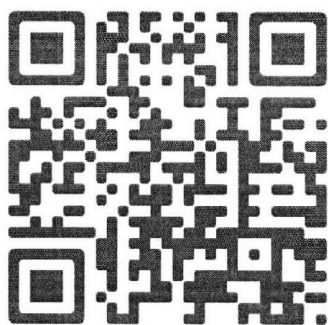




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .
4. [4 балла] В телеингре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle DCB = 20^\circ$ .



1 2 3 4 5 6 7  
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \text{ где } x, y, z \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  перемножим все три равенства:

$$xy \cdot yz \cdot zx = (3z + z^2)(3x + x^2)(3y + y^2)$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z+3)(x+3)(y+3) \quad \left| : xyz \right. \quad \begin{matrix} xyz \neq 0. \end{matrix}$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (xy + 3x + 3y + 9)(z+3)$$

$$xyz = xyz + 3xy + 3xz + 9x + 3yz + 9y + 9z + 27$$

$$3(xy + yz + xz) + 9(x+y+z) + 27 = 0$$

необходимо найти:

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 9 \cdot 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27, \text{ при этом}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 = xy - 3z \\ x^2 = yz - 3x \\ y^2 = zx - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

- подставим в A.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} A &= xy + yz + zx - 3(x + y + z) + 6(x + y + z) + 27 = \\ &= xy + yz + zx + \cancel{3(xy + yz + zx)} + 3(x + y + z) + 27 \end{aligned}$$

Мы знаем, что:

$$3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) + 27 = 0 \quad (:3)$$

$$(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0 + 18 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x+z)} (x+3)^2 + (y+3)^2 + \cancel{(z+3)}^2 = 18,$$

если ~~быть~~ ~~такая~~ система имеет хотя бы 1 решение в нулевых числах.

Ответ: 18







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем сколько 9 в числе  $n^3$ .

Будем считать их с конца числа.

Сначала идёт 40.000 „9“ подряд,  
затем 2 на 40.001 месте, ~~в~~ много  
„0“ и „7“ на 80.001 месте, после  
этой „7“ все „9“ до 120.000 места,  
получается, что их после „7“:

$$120.000 - 80.001 \Rightarrow \text{так} = 120.000 - 80.000$$

$$- 1 = 40.000 - 1 = 39.999 \Rightarrow \text{Всего}$$

„9“ в числе  $n^3$ :

$$40.000 + 39.999 = 40.000 + 40.000 - 1 =$$
$$= 80.000 - 1 = 79.999$$

Ответ: 79.999



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

Найти:  $AF$

$$AC = 10; AB = 6; BE = 5$$

1) Из условия:

$A, E, D, B \in \omega$ ,

где  $AB$  - диаметр  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ. \text{ П. к. } \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ, \text{ т. к. смежные.}$$

2) Пусть  $\angle EAB = \alpha \Rightarrow \angle CDF = \alpha$ , т. к.

$AEDB$  - впис. и  $B, D, C$  - на 1 прямой.

$\angle CDE$  - внешний для  $AEDB \Rightarrow$  в прямоугольном  $\triangle CDA$ ,  $\angle CDA = 90^\circ$ :  $DF$  - высота  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BCF = 90 - \alpha \text{ в } \triangle CDF; \angle CAD =$$

$$= 90 - (90 - \alpha) \text{ в } \triangle CDA \Rightarrow \angle CAD = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3) \triangle AEB \sim \triangle AFD \sim \triangle DFC \sim \triangle ADC$$

по двум углам;  $\alpha$  и  $90^\circ$ .  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{из } \triangle AFD \sim \triangle DFC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4) \text{ из } \triangle DFC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{FC}{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD^2 = AC \cdot FC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Из } \triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} AD^2 = AF \cdot AC \\ CD^2 = FC \cdot AC \end{array} : \Rightarrow \frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AF}{FC} = \left( \frac{AD}{CD} \right)^2$$

$$\text{Из } \triangle AEB \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \left( \frac{AE}{BE} \right)^2 = \frac{AE^2}{BE^2}$$

$$5) \triangle AEB - \text{прямоугольный, с } \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  по теореме Пифагора:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 =$$

$$= 11 \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{11}{5^2} = \frac{11}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{AF = \frac{11}{25} FC} \quad CF = \frac{25}{11} AF$$

$$6) AF + FC = AC = 10 \Rightarrow AF + \frac{25}{11} AF = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11 + 25}{11} AF = 10 \Rightarrow \frac{36}{11} AF = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{10}{\frac{36}{11}} = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть коробок  $n$ .

Посчитаем вероятность выиграть, когда игрок открывает 5 коробок.

Вероятность выигрыша = кол-во различных благоприятных выигрышных выборов коробок, т.е. в 5 из количества 3 с шариком : на кол-во всевозможных выборов коробок - таких  $C_n^5$   
Из  $n$  выбрать 5 разных коробок.

Кол-во благоприятных выборов коробок, это когда игрок выбирает конкретные 3 коробки, в которых мячики и еще  $5 - 3 = 2$  другие различные коробки уже из  $n - 3$ , т.е. 3 уже выбран  $\Rightarrow C_{n-3}^2 \Rightarrow$  Вероятность выигрыша, из  $n$  для игрока, открывающего 5 коробок:

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь посчитаем вероятность выигрыша  
когда игрок открывает 6 карточек.

Вероятность выигрыша считается  
аналогичным образом.

кол-во всевозможных выборов  
карточек -  $C_n^6$

кол-во благоприятных выборов  
карточек, это когда игрок выдвигает  
конкретные 3 карточки, в которых  
механи и ещё  $6 - 3 = 3$  другие  
различные карточки уже из  $n - 3$ , т.к.  
3 уже выбрали  $\Rightarrow C_{n-3}^3 \Rightarrow$  Вероят-  
ность выигрыша, для игрока, открыв-  
вая 6 карточек;  $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$ ; необходимо

найти во сколько раз увеличилась  
вероятность выигрыша  $\Rightarrow$  необходимо





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найти значение величины:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^3 \cdot C_n^5}{C_n^6 \cdot C_{n-3}^2} =$$

$$= \frac{\left( \frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 3!} \cdot \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \right)}{\left( \frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2!} \right)} =$$

$$= \frac{\cancel{(n-3)!} \cdot n!}{(n-6)! (n-5)! \cdot 5! \cdot 3!} \cdot \frac{(n-6)! \cdot \cancel{(n-5)!} \cdot 2! \cdot 6!}{n! (n-3)!} =$$

$$= \frac{2! \cdot 6!}{5! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 6}{6} = 2$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5

Запишем эту непостоянную  
арифметическую прогрессию. С  
первым членом  $b$  и разностью  
прогрессии  $d$ :

$$b, \quad b+d, \quad b+2d, \quad \dots$$

$$b_n = b + d(n-1)$$

$$y \quad x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad 2 \text{ корня}$$

$$b + 4d \text{ и } b + 5d \Rightarrow \text{по теореме Виета:}$$

$$2b + 9d = a^2 - a$$

$$(b + 4d)(b + 5d) = a - 5.$$

$$y \quad 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$2 \text{ корня} \quad b + 2d \text{ и } b + 7d \Rightarrow \text{по теореме Виета}$$

$$2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$(b + 2d)(b + 7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - a = 2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2 \quad | -4a^2 + 4a$$

$$a^3 - a^2 - 4a^2 + 4a = 0$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$\text{т.к. } a^2 - 5a + 4 = (a-1)(a-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = 1$$

$$\text{или } a = 4.$$

$$\text{т.к. } a = 0 \Rightarrow 2b + d \cdot 9 = 0$$

$$(b + 4d)(b + 5d) = a - 5$$

$$b^2 + 9bd + 20d^2 = a - 5$$

$$-(b + 2d)(b + 8d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$b^2 + 9bd + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6d^2 = a - 5 - \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \quad | \cdot 4$$

$$24d^2 = 4a - 20 - 2a^4 - 2a^2 + a^6 + 4$$

$$24d^2 = a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 4a - 16 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть  $a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 24d^2 = 0 - 0 - 0 + 0 - 16 = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = -\frac{16}{24} < 0 \Rightarrow d^2 < 0 \Rightarrow !!!,$$

таким образом  $d$  - не целое.  $\Rightarrow a \neq 0$ .

2) Пусть  $a = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 24d^2 = 1 - 2 - 2 + 4 - 16 = -15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24d^2 = -15 \Rightarrow d^2 = -\frac{15}{24} < 0 \Rightarrow d^2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow !!!$ , таким образом  $d$  - не целое.  $\Rightarrow a \neq 1$ .

$$a \neq 1 \text{ и } a \neq 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3) 24d^2 = 4^6 - 2 \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 16 =$$
$$= 4^2 (4^4 - 2 \cdot 4^2 - 2) = 16 (256 - 32 - 2) =$$

$$= 16 \cdot 222 \Rightarrow 24d^2 = 16 \cdot 222 \quad | :8$$

$$3d^2 = 2 \cdot 222 \quad | :3 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot 74 = 148 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 2 \cdot 2 \cdot 37$$

$$a = 4 \Rightarrow 2b + 9d = 16 - 4 = 12$$

$$16 + 4b^2 + 9bd + 20d^2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 9bd + 20d^2 = -1 \quad | \cdot 2 \cdot 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$4a^2 + 2b \cdot 9d + 36d + 18d + 80d^2 + 4 = 0$$~~

~~$$(2b)^2 + 2b \cdot 18d + 80d^2 + 4 = 0$$~~

Пусть  $d = 2\sqrt{37}$

$$2b + 9d = 16 - 4 = 12$$

$$2b + 18\sqrt{37} = 12 \quad | :2$$

$$b + 9\sqrt{37} = 6 \Rightarrow b = 6 - 9\sqrt{37}$$

$$(6 - 9\sqrt{37})^2 + 9 \cdot 2\sqrt{37} \cdot (6 - 9\sqrt{37}) + 20 \cdot 4 \cdot 37 = -1$$

$$36 - 108\sqrt{37} + 81 \cdot 37 + 18\sqrt{37} \cdot 6 =$$

$$- 36 - 18\sqrt{37} \cdot 9 \cdot \sqrt{37} + 80 \cdot 37 = -1$$

$$1 + 36 + 81 \cdot 37 + 80 \cdot 37 - 37 \cdot 18 \cdot 9 + \sqrt{37}(-108 + 18 \cdot 6 - 18 \cdot 9) = 0$$

$$37(1 + 81 + 80 - 162) + \sqrt{37} \cdot 0 = 0$$

$$37 \cdot 0 + \sqrt{37} \cdot 0 = 0 \quad \checkmark \text{ и}$$

$$24d^2 = 16 \cdot 222 \Rightarrow \text{при } a=4 \text{ сущ. } b \text{ и } d,$$

что все условия выполняются, т.е.

сущ. арифм. прогресс. и сбалансиров.

корни. при  $a=4$ ;  $b=6-9\sqrt{37}$ ;  $d=2\sqrt{37}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы доказали, что при  $a = 4$ , есть  
такие корни, и доказали, что  
других  $a$  быть не может  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Ответ:  $a = 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

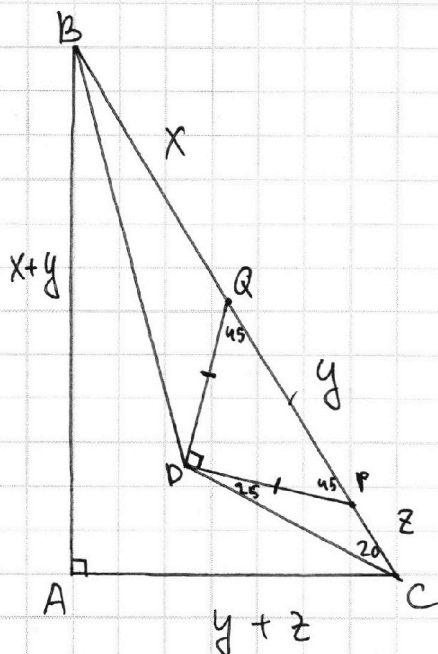
5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



✓ 7

1) Введём обозначение:

$$BQ = x; \quad QP = y; \quad PC = z$$

( $Q \in BP$  - отрезку т. к.

имеем  $BP + CQ \leq BC$  и

$$BA + CA \leq BC \Rightarrow !!!$$

пер - в  $\Delta$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BP = BA = x + y;$$

$$CQ = CA = y + z \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  2) По теореме Пифагора:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 =$$

$$= (x+y+z)^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2xz$$

3)  $\Delta QPD$  - прямоугол. и равнобед.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle PQD = \angle QPD = 45^\circ \text{ и } DQ = DP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PQ^2 + DP^2 = QD^2 \Rightarrow 2DQ^2 = y^2 \text{ и}$$

$$y^2 = 2xz \Rightarrow 2DQ^2 = 2xz \Rightarrow DQ^2 = xz \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow DQ = \sqrt{xz};$$

4) По теореме косинусов для  $\triangle DQC$ :

$$DC^2 = DQ^2 + QC^2 - 2 DQ \cdot QC \cdot \cos 45^\circ$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - 2\sqrt{xz} \cdot (y+z) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - \sqrt{2xz} \cdot (y+z)$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - y(y+z)$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - y^2 - yz$$

$$DC^2 = xz + z^2 + yz = z(x+y+z) =$$

$$= CP \cdot CB \Rightarrow CD^2 = CP \cdot CB \Rightarrow \text{по теореме}$$

точки C для дмс. дкр.  $\triangle PBD \Rightarrow$

$$\Rightarrow CD^2 = CP \cdot CB \Rightarrow CD - \text{касат. к}$$

$$\text{дмс. дкр. } \triangle PDB \Rightarrow \angle PDC = \angle PBD$$

$$5) \angle DPQ = 45^\circ - \text{внешний дкр. } \triangle DPC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DPQ = \angle PDC + \angle PCB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PDC = 45 - 20 = 25^\circ \Rightarrow \angle PBD = 25^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DBC = 25^\circ \Rightarrow \text{Ответ: } 25^\circ$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓✓

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{(n-3-2)! \cdot 2!} = \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$C_n^5 = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

$$C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)!}{(n-3-3)! \cdot 3!} = \frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 6} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

✓

$$C_n^6 = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}$$

---

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

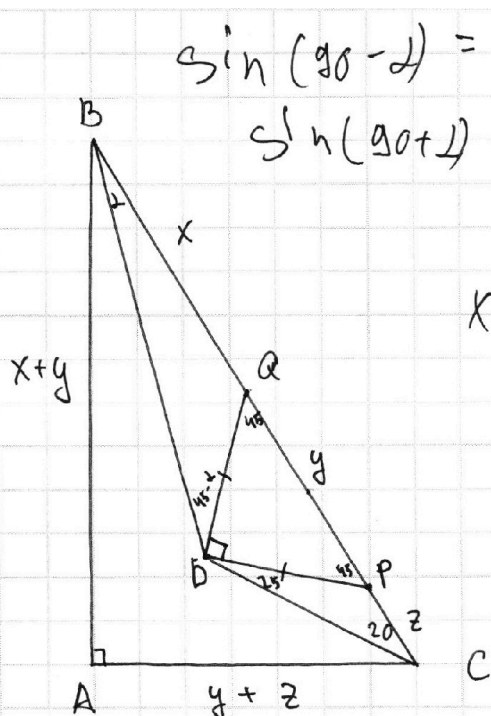


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(90-2) = \cos 2$$

$$\sin(90+2) = \cos 2$$

$$\cos(90-2) = \sin 2$$

$$\cos(90+2) = -\sin 2$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+y+z)^2$$

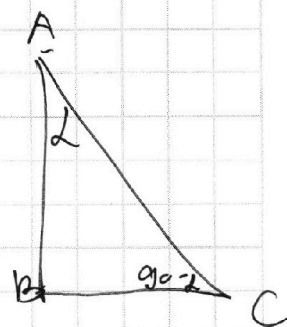
$$x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$y^2 = 2zx$$

$$2DQ^2 = y^2$$

$$DQ^2 = zx$$



$$\cos(180-2)$$

$$\frac{BC}{AC}$$

$$DQ = DP = \sqrt{zx}$$

$$BC^2 = PD^2 + z^2 - 2z \cdot DP \cdot \cos(180-45) =$$

$$= BC^2 = xz + z^2 - 2z \cdot \sqrt{xz} \cdot \cos(90-45)$$

$$\cos(180-45) = \cos(90+90-45) = -\sin(90-45) = -\sin 45$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$y^2$~~

$$bC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - 2\sqrt{xz}(y+z) \cdot \cos 45$$

$$bC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - \sqrt{2xz}(y+z)$$

$$bC^2 = xz + \cancel{y^2} + z^2 + 2yz - \cancel{y^2} - yz =$$

$$= xz + z^2 + yz = z(x+z+y)$$

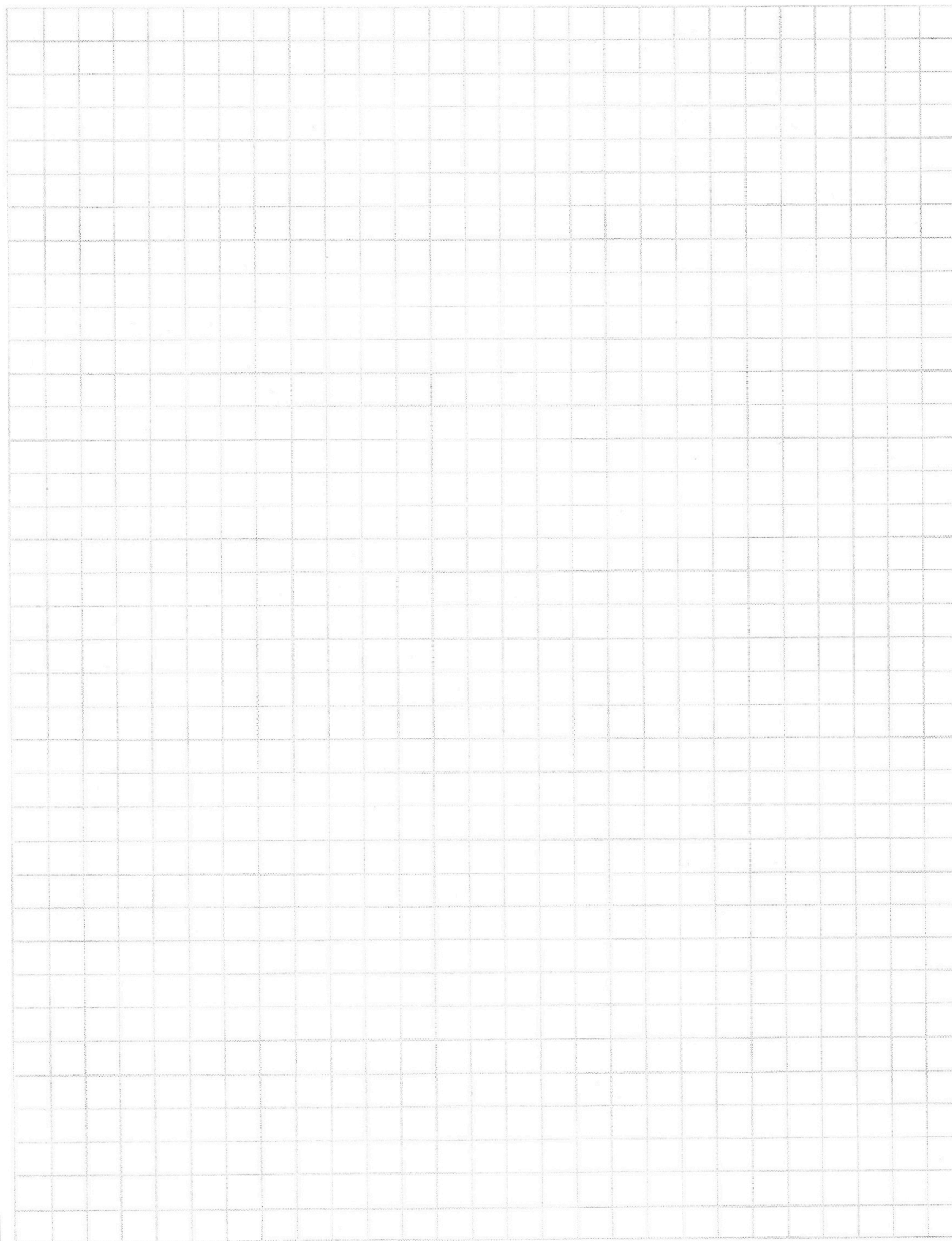


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 + 9bd + 20d^2 = a - 5$$

$$b^2 + 9bd + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$6d^2 = a - 5 - \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$24d^2 = 4a - 20 - 2a^4 - 2a^2 + a^6 + 4$$

$$24d^2 = a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 4a - 16$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 192 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 34 \\ \hline 222 \overline{) 3} \\ - 21 \quad \overline{) 74} \\ \hline 12 \quad \times 2 \\ - 22 \quad \overline{) 148} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \overline{) 12} \\ \hline 27 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$b \rightarrow b+d \rightarrow b+2d, b+3d \dots$$

$$b_n = b + (n-1)d$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$b+4d \quad \text{и} \quad b+5d$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$b+2d \quad \text{и} \quad b+7d$$

$$b+4d + b+5d = a^2 - a$$

$$(b+4d)(b+5d) = a-5$$

$$2b + 9d = a^2 - a$$

$$(b+4d)(b+5d) = a-5$$

$$2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$(b+2d)(b+7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2$$
$$4a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a(a-1)(a-4) \neq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1  
 1 2 1  
 1  
 $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot 1$   
 2

$\sqrt{3}$   $\sqrt{AF(AC-AE)}$

$AD^2 = AF \cdot AC$

$\frac{CD}{10} = \frac{CF}{CD}$

$AF^2 + FD^2 = AF \cdot AC$

$25 + 36 = 61$

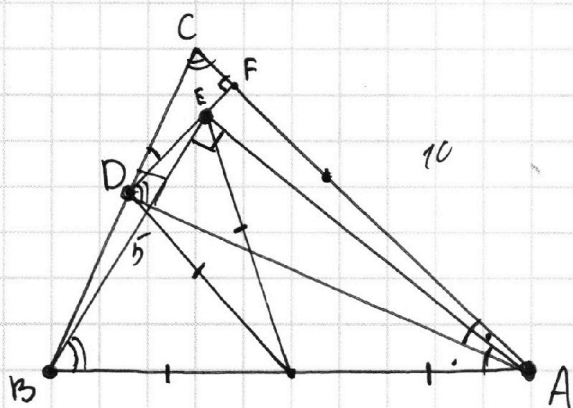
$AF(AC-AF) = FD^2 \sqrt{61}$

$DE \cdot AB + BD \cdot EA = AD \cdot BE$

$AC = 10$

$AB = 6$

$AF = \frac{FD^2}{CF}$   
 $\left(\frac{BE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \frac{CF}{AF}$   
 $BE = 5$   $CD^2 = CF \cdot 10$



$\frac{AD}{AC} = AF?$

$AD^2 = AF \cdot 10$

0 30 45 60 90  
 $\sin$   $\frac{1}{2}$   $\frac{\sqrt{2}}{2}$   $\frac{\sqrt{3}}{2}$   $1$

$\cos$   $\frac{\sqrt{3}}{2}$   $\frac{\sqrt{2}}{2}$   $\frac{1}{2}$   $0$

$\frac{5}{6} = \frac{CF}{CD} = \frac{FD}{AD}$

$= \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$

$AF = \frac{AE \cdot AD}{6}$

$AF = \frac{AE}{AB} \cdot AD$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 9999.090109^3 =$$

$$n^3 = ?$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ \times 9999 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ \times 9999 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9199 \\ 9199 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 9 \\ 9 \\ 9 \end{array}$$

$$n \left[ 9999.9999 \dots - 99 \right]$$

$$40.000$$

$$n^3 = ?$$

$$n+1 = 10^{40.000}$$

$$(10^{40.000})^3 = n^3$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$n^3 = A^3 - 3n^2 - 3n - 1$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 999 \\ \hline 88999 \\ 88999 \\ 88999 \\ \hline 88999999 \\ 1099991 \\ 889991 \\ \hline 88999999 \\ \times 999 \\ \hline 88999999 \\ 88999999 \\ 88999999 \\ \hline 88999999999 \\ 88999999999 \\ 88999999999 \\ \hline 8899999999999 \end{array}$$

$$100 = 10^2$$

$$n+1 = A$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

$$z(z+3) = xy \quad z^2 + 3z + 3z + 9$$

$$z+3 = \frac{xy}{z} \quad xy + 3z + 9$$

$$z^2 + 3z + 3z + 9 = \frac{xy^2 z^2}{x^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} = ?$$

$$\frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + x^4 z^4}{x^2 y^2 z^2} \quad | n3$$

$$z = \frac{3y + y^2}{x} \quad (9 \cdot 100^2 + x 100^{2-1} + y \cdot 100^{2-2})^3$$

$$yz = \frac{3y^2 + y^3}{x} = 3x + x^2$$

$$3y^2 + y^3 = 3x^2 + x^3 \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y)(xy)$$

$$x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2 = 0 \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = \cancel{xyz} (xy + 3x + 3y + 9)(z+3)$$

$$\cancel{xyz} = \cancel{xyz} + 3xy + 9x + 3xz + 3yz + 9y + 9z + 27$$

$$3xy + 3xz + 3yz + 9x + 9y + 9z + 27 = 0$$

$$xy + yz + xz + 3(x + y + z) + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 18 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$3(x + y + z) = \cancel{9} - 9 - xy - yz - xz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 18 - 2xy - 2yz - 2xz + 27$$

$$(x-1)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz + 9$$

$$yz - 3x + xy - 3z + xz - 3y - 2xy - 2yz - 2xz + 9 \\ - 3(x + y + z) - (xy + yz + zx) + 9$$

