



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\text{Число } A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = \\ = 1111a = 11 \cdot 101a$$

(~~a~~ - ~~ц~~ $\overline{aaaa}$ - десятичная запись числа a)
a - цифра

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат nat. числа $\Rightarrow$ все простые множители входят в четной степени.

101 - простое.

$$A = 11 \cdot 101a \Rightarrow A : 101 = 11a \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101,$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадр., то $A \cdot B \cdot C : 101^2$

$$(11 \cdot 101a) \cdot B \cdot C : 101^2$$

$$11a \cdot B \cdot C : 101$$

$C \leq 99, a \leq 9 \Rightarrow$ на 101 может делиться только

B. На 101 делятся след. трёхзнач. числа:

101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909.

Только в одном из них есть 7 $\Rightarrow B = 707$

$$A = 11 \cdot 101a \Rightarrow A : 11 = 101a \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \quad 11 \cdot 101a \cdot 707 \cdot C : 11^2$$

$$101^2 \cdot 7a \cdot C : 11, a \leq 9 \Rightarrow C : 11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow C$ это одно из чисел 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. 1 есть только в одном $\Rightarrow C = 11$

$$707 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11a \cdot 7 \Rightarrow 707 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11a \cdot 7^2 \Rightarrow (707; 7)$$

$$\Rightarrow 101^2 \cdot 11^2 a \cdot 7 \Rightarrow a \cdot 7 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow A = 7777$$

$$B = 707$$

$$7777 \cdot 707 \cdot 11 = 7 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11 = C = 11$$

$$= (7 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

Ответ: $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{y+x+3}{xy}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{(y+4)(x-4)+3}{(y+4)(x-4)} = \frac{y+x+3}{(y+4)(x-4)}$$

Возможно 2 случая: 1) $y+x+3=0$

$$2) xy = (y+4)(x-4)$$

$$1) y > 0 \quad x > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x+y+3 \neq 0. \Rightarrow$ такого не может быть.

$$2) xy = (y+4)(x-4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow x - y = 4 \Rightarrow x = 4 + y.$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y) \cdot y =$$

$$= 64 + 48y + 12y^2 + y^3 - y^3 - 48y - 12y^2 = 64.$$

Ответ: $M = 64$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

a) Введём замену $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$.

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta.$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\sin^2 \beta - \cos^2 \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$-\cos 2\beta = \cos(\beta - \alpha).$$

Это

2β и $\beta - \alpha$ это

какая-то из пар точек:

~~1, 2~~; 1, 4; 1, 3; 2, 3; 2, 4 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\beta + \beta - \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{либо } 2\beta - \beta + \alpha = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

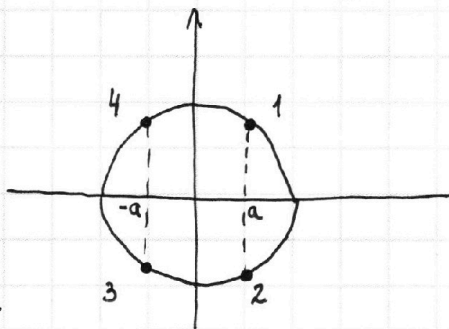
$$\begin{cases} 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \beta + \alpha = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \beta + \alpha = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - \pi y + \pi x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - \pi y + \pi x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3y - x = 1 + 2n, & n \in \mathbb{Z} \\ y + x = 1 + 2m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Для целых:

$$\begin{cases} x = 3y - 2n - 1, & n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{когда такого } n \text{ не существует? Когда } 3y - x - \text{чётн.,} \\ x = 1 + 2m - y, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

а во всех ост. сл. сущ. $\rightarrow$
 $\Rightarrow y$ и x разн. чётности
 А-но для m :

Ответ: для всех будет 2 серии решений:

1) Для любого y : $x = 3y - 2n - 1, n \in \mathbb{Z}$

2) Для любого y : $x = 1 + 2m - y, m \in \mathbb{Z}$

5)

$$\arccos \frac{x}{7} \geq 0$$

$$\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{если левая часть}$$

неравенства опред., то исходное неравенство выполняется во всех случаях кроме ст. равенства.

$$\arcsin \frac{y}{4} = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$$

$$\arccos \frac{x}{7} = 0 \Rightarrow \frac{x}{7} = 1 \Rightarrow x = 7$$

} $\Rightarrow$ не удовлетвор. нерав-ву

$$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq x \leq 7 \quad \text{и} \quad -4 \leq y \leq 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-7 \leq x \leq 7 \quad -4 \leq y \leq 4 \quad \text{и они разной чётности:}$$

$$8 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 68 \text{ реш.}$$

↑ чётн. x ↑ чётн. y

$$68 - 1 = 67 \text{ решен. } (y=4 \quad x=7 \text{ не подх.})$$

Ответ: а) ~~х для любого у~~

$$(3y - 2n - 1; y) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(1 + 2m - y; y) \quad m \in \mathbb{Z}$$

б) 67 решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

k -кол-во билет. в №4
конце месяца
Рассчитаем вероятность:

k -кол-во
 m -кол-во билетов
 n -кол-во одинак.
 k

1) количество исходов:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

2) количество благоприятных исходов:

У Пети и Васи есть билеты $\Rightarrow$ нужно
раздать $k-2$ билета между оставш. $n-2$
учен.

$$C_{n-2}^{m-2} = \frac{(n-2)!}{(m-2)! (n-2-(m-2))!} = \frac{(n-2)!}{(m-2)! (n-m)!}$$

Вероятность:

$$\frac{(n-2)! \cdot m! \cdot (n-m)!}{(m-2)! (n-m)! \cdot n!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{При } m=4: \frac{4(4-1)}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$\text{При } m=k: \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 12}{h(h-1)} \Rightarrow k^2 - k - 11 \cdot 12 = 0$$
$$(k-12)(k+11) = 0$$

$$k_1 = 11 < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$k_2 = 12$$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

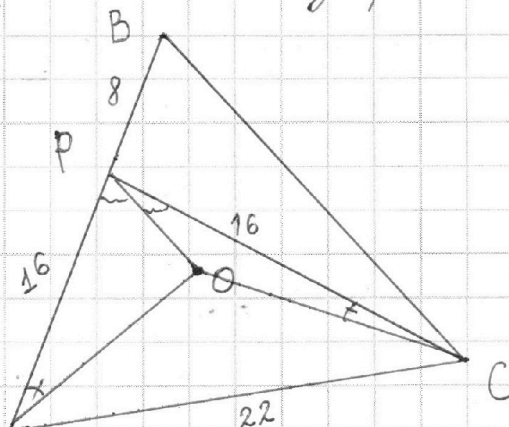
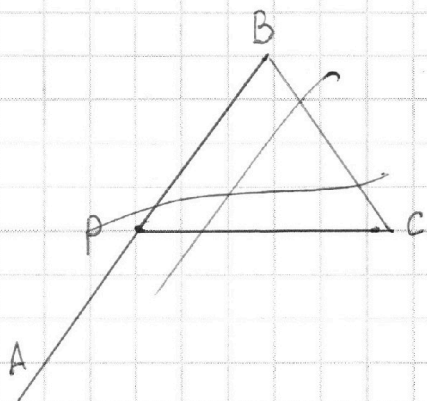
СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$\triangle ABC$ - остроугольный $\Rightarrow O$ - внутри $\triangle ABC$



Если $m. O$ лежит внутри

$\triangle APC$:

$BPOC$ - вписан в окр. $\omega_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle OCB + \angle BPO = 180^\circ$$

$$\angle APO + \angle BPO = 180^\circ \text{ (смежные)}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle OCB = \angle APO$$

$\angle OCB = \angle OBC$ (т.к. $\triangle OBC$ - р/б (OB и OC - рад. ω_2)) $\Rightarrow \angle APO = \angle OBC$

$\angle OBC = \angle CPO$ (как вписанные в окр. ω_2 и опир. на одну дугу) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle APO = \angle CPO$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle PCO = \angle OBP \text{ (т.к. } BCOP \text{ - впис.)}$$

$$\angle OBP = \angle OBA = \angle OAB \text{ (т.к. } \triangle OAB \text{ - р/б: } OA = OB \text{ (как радиусы } \omega_1 \text{)).} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PCO = \angle OAB$$

$$\angle APO = \angle CPO$$

$$\angle PAO = \angle PCO$$

$$\angle APO + \angle PAO + \angle AOP = \angle CPO + \angle PCO + \angle COP = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOP = \angle COP$$

$$\angle APO = \angle CPO$$

OP - общая сторона $\triangle AOP$ и $\triangle COP$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle AOP = \triangle COP \Rightarrow AP = CP = 16$$

Найд. площ. $\triangle APC$ по формуле Герона: (S_{APC})

$$S_{APC} = \text{полупр. } p_{APC} = \frac{16+16+22}{2} = 27$$

$$S_{APC} = \sqrt{27 \cdot (27-22) \cdot (27-16) \cdot (27-16)} = 33\sqrt{15}$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} AP \cdot AC \cdot \sin \angle PAC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AB} = \frac{16}{16+8} = \frac{2}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{3}{2} \cdot 33 \sqrt{15} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99}{2} \sqrt{15}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 36$ - это ^{№6} ~~окружн.~~ ^{круг} с центром в O и радиусом 6.

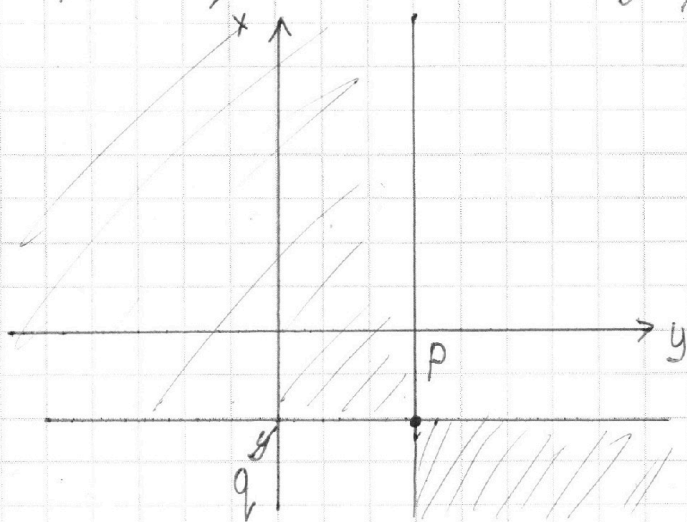
$$-4 \sin \alpha = p, \quad -4 \leq p \leq 4$$

$$q = 4 \cos \alpha, \quad -4 \leq q \leq 4$$

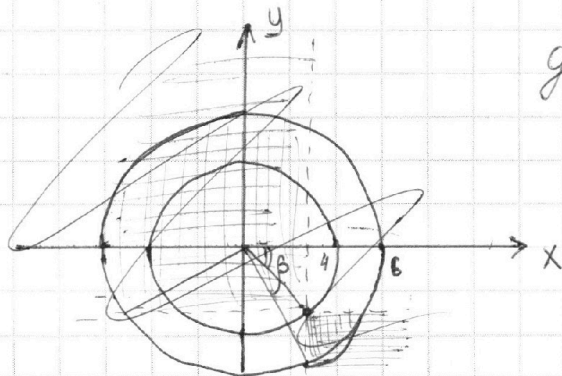
$$p^2 + q^2 = 16 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 16$$

точка p, q лж. на
окр. рад. 4

$(x-p)(y-q) \leq 0$ имеет след. рещ.



Решение системы: $\{ \text{два четверт. круга} \}$
длина вертик. прямой
границы:



$$l_1 = 2\sqrt{36 - p^2}$$

А хор-ной:

$$l_2 = 2\sqrt{36 - q^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

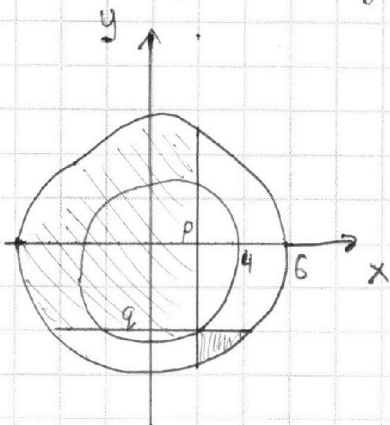
7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма длин дуг не зависит от точки



$$\Rightarrow 2\sqrt{36-p^2} + 2\sqrt{36-(16-p^2)} =$$

= max

$$\sqrt{36-p^2} + \sqrt{20+p^2} = \text{max}$$

Мак. дост. $36-p^2 = 20+p^2$

$$2p^2 = 16$$

$$p = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$q = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Max



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для первой серии решений уравнения:

$$x = 3y - 2n - 1, n \in \mathbb{Z}$$

$$-7 \leq 3y - 2n - 1 \leq 7$$

$$-6 + 2n \leq 3y \leq 8 + 2n.$$

$$\text{При } y = -4 \quad x = 3 \cdot (-4) - 2n - 1 = -13 - 2n$$

$$-7 \leq -13 - 2n \leq +7$$

$$6 \leq -2n \leq 20.$$

$$3 \leq -n \leq 10$$

$$-3 \geq n \geq -10 \Rightarrow 8 \text{ решений.}$$

$$\text{При } y = -3 \quad x = 3 \cdot (-3) - 2n - 1 = -10 - 2n$$

$$-7 \leq -10 - 2n \leq 7$$

$$3 \leq -2n \leq 17$$

$$-1,5 \geq n \geq -8,5 \Rightarrow 7 \text{ решений}$$

$$\text{При } y = -2 \quad x = 3 \cdot (-2) - 2n - 1 = -7 - 2n$$

$$-7 \leq -7 - 2n \leq 7$$

$$0 \leq -2n \leq 14$$

$$0 \geq n \geq -7 \Rightarrow 8 \text{ решений}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2y = m + n + 1 \Rightarrow y = \frac{m+n+1}{2}$$
$$x = 1 + 2m - \frac{m+n+1}{2} = \frac{2+4m-m-n-1}{2} = \frac{2+3m-n-1}{2}$$

Если y - чётный, то по паре чисел n

$$\text{Если } x = 3y - 2n - 1$$

g. 15

$$-4 \leq \frac{m+n+1}{2} \leq 4$$

$$-7 \leq \frac{3m-n-1}{2} \leq 7$$

$$-11 \leq \frac{4m}{2} \leq 11 \Rightarrow -11 \leq 2m \leq 11$$
$$-5.5 \leq m \leq 5.5$$

$$m = -5$$

$$m = 5$$

когда

$$x = 3y - 2n - 1$$

$$2n + 1 = 3y - x, \text{ когда не сущ.}$$

n , когда $3y - x$ - чётн.

Все пары y и x имеют разн.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0.$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$x + 4 \sin \alpha > 0$$

$$y - 4 \cos \alpha < 0$$

$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x = 4 \sin \alpha$$

$$\cos y \sin \alpha$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{r}$$

$$\beta = -\alpha + 2\pi n$$

$$2 \cdot \sqrt{36 - a^2} + 2 \cdot \sqrt{36 - b^2}$$

4

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a tetrahedron and its circumscribed sphere.

Left side diagrams:

- Top left: A tetrahedron with vertices A, B, C and a point P on edge BC. The angle $\angle BPC$ is marked. The distance from P to the opposite face ABC is labeled $PO = \text{distance}$.
- Middle left: A triangle with vertices A, B, C. A point P is on edge BC. The distance from P to the opposite face ABC is labeled $PO = 8$.
- Bottom left: A triangle with vertices A, B, C. A point P is on edge BC. The distance from P to the opposite face ABC is labeled $PO = 8$.

Right side diagrams:

- Top right: A tetrahedron with vertices A, B, C and a point P on edge BC. The angle $\angle BPC$ is marked. The distance from P to the opposite face ABC is labeled $PO = 8$.
- Middle right: A tetrahedron with vertices A, B, C and a point P on edge BC. The distance from P to the opposite face ABC is labeled $PO = 8$.
- Bottom right: A tetrahedron with vertices A, B, C and a point P on edge BC. The distance from P to the opposite face ABC is labeled $PO = 8$.

Calculations:

- Top right: $27 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 = 11 \sqrt{27 \cdot 5} = 33 \sqrt{15}$
- Middle right: $P = \frac{16 + 22 + 8}{2} = 23$
- Bottom right: $S = \sqrt{23 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 15}$

4 mo mark



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y + x = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 + 2m - y, m \in \mathbb{Z}$$

$$y = -4: x = 1 + 2m + 4$$

$$-7 \leq 5 + 2m \leq 7$$

$$-12 \leq 2m \leq 2$$

$$-6 \leq m \leq 1 \Rightarrow 8 \text{ решений}$$

$$y = -3:$$

$$-5,5 \leq m \leq 2,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = -2:$$

$$-4 \leq m \leq 4 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

$$y = -1:$$

$$-1,5 \leq m \leq 5,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = 0:$$

$$0 \leq m \leq 7 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

$$y = +1$$

$$1,5 \leq m \leq 8,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = +2$$

$$3 \leq m \leq 10 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

$$y = 3$$

$$4,5 \leq m \leq 11,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = 4$$

$$6 \leq m \leq 13 \Rightarrow 8 \text{ реш.}, \text{ но среди}$$

$$\text{них } x = 7, y = 4 \Rightarrow \text{только } 7$$

$$8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 7 = 67$$

Какие-то совпадают:

$$3y - 2n - 1 = 1 + 2m - y \Rightarrow 4y = 2m + 2n + 2$$

$$C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-k+2)!}$$

K факт.

$$(k^2 - k)((n-2)^2 - (n+2)) = 4 \cdot 12((n-k+1)^2 - (n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $y = -1$ $x = 3 \cdot (-1) - 2n - 1 = -4 - 2n$

$$-7 \leq -4 - 2n \leq 7$$

$$-3 \leq -2n \leq 11$$

$$1,5 \geq n \geq -5,5 \Rightarrow 7 \text{ решений}$$

При $y = 0$ $x = -2n - 1$

$$-7 \leq -2n - 1 \leq 7$$

$$-6 \leq -2n \leq 8$$

$$3 \geq n \geq -4 \Rightarrow 8 \text{ решен.}$$

$$(k-12)(k+11) = 0$$

$$k=12$$

$$k^2 - k - 11 \cdot 12 = 0$$

$$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 4 \cdot (4-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 1$$

А-но: при $y = +1$

$$4,5 \geq n \geq -2,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

при $y = 2$

$$6 \geq n \geq -1 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

при $y = 3$

$$7,5 \geq n \geq 0,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

при $y = 4$

$$9 \geq n \geq 2 \Rightarrow 8 \text{ реш., но}$$

среди них $y = 4$ $x = 7$ ($y = 4$, $x = 7$)

среди них $x = 7$ $y = 4 \Rightarrow$ только 7 реш.

Итого:

$$8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 7 = 32 + 35 =$$

$$= 67$$

Для I серии решений



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

n - odd.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{2} = \frac{18}{(n-2)(n-3)}$$
$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{18}{(n-2)(n-3)}$$

$\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{1}{4+2+1} = P_n^3$

Пусть k odd.

$$\frac{(k-2)!(n-k)!}{(k-2)!(n-k)!} = 22 \cdot (n-4)!$$
$$\frac{k \cdot (k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)} = \frac{12 \cdot 11}{(n-2)(n-3)}$$
$$(k-2)!(n-k)! = 22 \cdot (n-4)!$$

1) $(n-k+1) \cdot k$
2) $n \cdot k$

$x = -1$
 $y = 0$
 $x = 1$
 $y = 0$

$(0-0) \cdot 0 = (1-1) \cdot 1$
 $(0-0) \cdot 0 = (1-1) \cdot 1$

$x = -1$
 $y = 0$
 $x = 1$
 $y = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1111a

$$\begin{array}{r} 1111 \mid 11 \\ \underline{11} \\ 011 \end{array}$$

$$\arccos \frac{x}{7} \geq 0$$

$$\arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Все случаи кроме строгого равенства:

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{2} > -\frac{\pi}{2}$$

Число

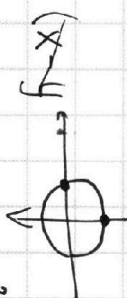
об $B = 707$

$$C; 11 \Rightarrow C = 11$$

$$x, y = 2n - x, z = 2n - y$$

$$x + y = 2n, z = 2n$$

$$x^3 - y^3$$



$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y$$

$$x - y = 4$$

$$xy = xy + 4x - 4y + 16 \Rightarrow x + y = 4$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 1$$

$$\alpha + \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(y + 4)^3 - y^3 - 12y(y + 4) =$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x + y + 3}{xy} = \frac{x - 4 + y + 4 + 3}{(x - 4)(y + 4)} = \frac{x + y + 3}{(x - 4)(y + 4)}$$

