МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

№1

Т.к. A – число, составленное из одинаковых цифр, то оно имеет вид $A=\overline{aaaa}=1111a$, где $1\le a\le 9$. Тогда, пусть B имеет вид: $B=\overline{bcd}$, C имеет вид: $C=\overline{xy}$. Тогда произведение $A\cdot B\cdot C = 1111a\cdot\overline{bcd}\cdot\overline{xy}=n^2$. Т.к. $A\cdot B\cdot C \,\vdots\, 1111=11\cdot 101$, ~~тогда~~ то $A\cdot B\cdot C$ делится на 1111^2, т.е. $a\cdot\overline{bcd}\cdot\overline{xy}\,\vdots\, 1111=11\cdot 101$. Заметим, что $a\not\vdots\, 11$, $a\not\vdots\, 101$, т.к. $1\le a\le 9$, $\overline{xy}\not\vdots\, 101$, т.к. $10\le\overline{xy}\le 99$. Тогда $\overline{bcd}\,\vdots\, 101$, иначе $a\cdot\overline{bcd}\cdot\overline{xy}\not\vdots\, 101$. Т.к. одна из ~~этих~~ цифр B равна 7 и число $B\,\vdots\, 101$, то $B=101m$, причем $m\,\vdots\, 7$. Единственное подходящее значение B, это $B=707$. Тогда $A\cdot B\cdot C$ примет вид: $101^2\cdot 11\cdot 7\cdot a\cdot\overline{xy}=n^2$. Получаем, что $11\cdot 7\cdot a\cdot\overline{xy}$ – квадрат натурального числа. Заметим, что $a\not\vdots\, 11$, т.к. $1\le a\le 9$, значит $\overline{xy}\,\vdots\, 11$. Т.к. одна из цифр числа $\overline{xy}$ равна 1, то ед. двузначное число $C\,\vdots\, 11$ и содержащее единицу среди цифр, это $C=11$. Тогда $11^2\cdot a\cdot 7$ – квадрат, а следовательно $a\cdot 7$ – квадрат. Тогда $a\,\vdots\, 7$ и единственное значение a, что $a\cdot 7$ – квадрат, это $a=7$. Тогда $A=7777$, $B=707$, $C=11$.

Тогда нам подходит тройка чисел: $(7777; 707; 11)$

Ответ: $(7777; 707; 11)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=K$. Из условия верно: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \Big| : (x+y+3),\quad x+y+3>0$

$xy=(x-4)(y+4)$

$xy=xy-4y+4x-16$

$4x-4y=16$

$x-y=4$. Подставим $x-y=4$ в M:

Тогда $M=x^3-y^3-12xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-12xy=$

$=(x-y)((x-y)^2+3xy)-12xy=4(16+3xy)-12xy=64$

Тогда M принимает только значение равное 64.

Ответ: 64.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = \cos\pi y(\cos\pi y + \cos\pi x)$

$\sin^2\pi y - \sin\pi x\sin\pi y = \cos^2\pi y + \cos\pi y\cos\pi x$

$-(\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\cos\pi x) = \cos 2\pi y$

$-(\cos(\pi x - \pi y)) = \cos 2\pi y$

$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi y$

$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

$2\cos\frac{\pi y + \pi x}{2}\cos\frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \frac{\pi y+\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y + x = \cancel{\pi}1 + 2n \\ 3y - x = 1 + 2m \end{array}\right.$

$n, m \in \mathbb{Z}$

Тогда нам подходят все пары $(x;y)$ такие, что $x+y=2n+1$, $n\in\mathbb{Z}$, $3y-x=2m+1$, $m\in\mathbb{Z}$.

Ответ: все пары $(x;y)$ для которых верно: $x+y=2n+1$, $n\in\mathbb{Z}$, $3y-x=2m+1$, $m\in\mathbb{Z}$.

б). $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$\arccos\frac{x}{7} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{y}{4} > 0$

$\arccos\frac{x}{7} + \arcsin\frac{y}{4} + \arccos\frac{y}{4} - \arcsin\frac{y}{4} > 0$

$\arccos\frac{x}{7} + \arccos\frac{y}{4} > 0$

~~Заметим, что $\arccos\frac{x}{7} + \arccos\frac{y}{4} \geq 0$, кроме~~ Заметим, что нер-во верно всегда, кроме случая $\frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ и $\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $m,k\in\mathbb{Z}$, т.к. $\arccos\frac{x}{7} \in [0;\pi]$, $\arcsin\frac{y}{4} \in [0;\pi]$. ~~Т.к~~ Из ОДЗ имеем, что

$\begin{cases} -1 \le \frac{x}{7} \le 1 \\ -1 \le \frac{y}{4} \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -7 \le x \le 7 \\ -4 \le y \le 4 \end{cases}$. Нам не подходит ситуация, когда: $\begin{cases} \arccos\frac{x}{7} = 0 \\ \arccos\frac{y}{4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{7} = 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \frac{y}{4} = 2\pi m, m\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Т.е. нам не подходит пара $(0;0)$, остальные пары удовлетворяют ограничениям и нер-ву. Возможных значений для x: 15, для y: 9.

~~Тогда всего пар целых чисел $(x;y)$, удовл. ур-ию и нер-ву: $15\cdot 9 - 1 = 134$~~

~~Ответ: 134.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\arccos\frac{x}{7}+\arccos\frac{y}{4}>0$

Т.к. x,y - целые, то нер-во верно всех допустимых по ~~ОДЗ~~ ограничениям случаях, кроме $x=7$, $y=4$. ~~Заметим, что всегда можно подобрать такие целые x, y, что~~. Заметим, что ~~y+x~~ либо y либо x - нечетное число, иначе пара $(x;y)$, ~~являющаяся~~ решением нер-ва не будет являться решением ур-ия. Тогда, посчитаем кол-во пар, удовлетворяющих нер-ву и ур-ию. Т.к. $-1\le\frac{x}{7}\le 1$ из ограничения арккосинуса, то для x – 15 целых значений. Для y получаем 9 целых значений. Для нечетных x, которых 8 нам подходит 5 четных y. Для четных x, которых 7, нам подходит 4 нечетных y. Итого нам подходит: $8\cdot5+7\cdot4=68$. Т.к. пара $x=7$, $y=4$ - не удовлетворяет нер-ву, то всего пар 67.

Ответ: 67.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца на ~~билет~~ концерт было выучено k билетов. Тогда вероятность в начале месяца, что Петя и Вася попадут на концерт ~~раз~~ вместе равна: $\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}$, где n - число одиннадцатиклассников, C_{n-2}^{2} - число ~~сло~~ исходов, в которых Петя и Вася получили билет на концерт, C_n^4 - ~~в~~ число всевозможных исходов. Тогда в конце месяца, вероятность обоим попасть на концерт равна: $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$ где C_{n-2}^{k-2} - число исходов, в которых Петя и Вася вместе попадут на концерт, C_n^k - число всевозможных исходов. Тогда из условие имеем уравнение:

$$11\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \iff 11\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)!\cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)!\,4!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \iff$$

$$\iff \frac{11(n-2)!\cancel{(n-4)!}\,4!}{n!\cancel{(n-4)!}\cdot 2!} = \frac{(n-2)!\,\cancel{(n-k)!}\,k!}{\cancel{(n-k)!}(k-2)!\,n!} \quad \Big| \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\frac{11\cdot 24}{2} = k(k-1)$$

$$132 = k^2 - k$$

$k^2 - k - 132 = 0$

$D = 1 + 528 = 529 = 23^2$

$\left[\begin{array}{l} k = \frac{1+23}{2} \\ k = \frac{1-23}{2} \text{ - не подходит, т.к. } k > 4 \end{array}\right.$

Получаем, что в конце месяца на концерт было выучено 12 билетов

Ответ: 12 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

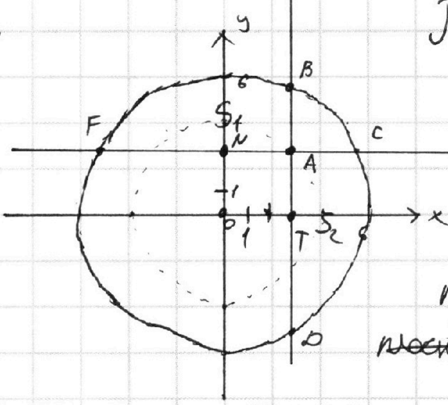
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0 & (1)\\ x^2+y^2\le 36 & (2)\end{cases}$$

~~Уравнение~~ Нер-во (1) задает две полуплоскости, образуемых двумя прямыми $x=-4\sin\alpha$, $y=4\cos\alpha$, причем точка пересечения этих прямых лежит на окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиуса 4, т.к. $(-4\sin\alpha)^2+(4\cos\alpha)^2=16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=16=4^2$.

Уравнение ~~дв~~ (2) задает круг с центром в точке $(0;0)$ радиуса 6.



~~Тогда меняя значение α, наша полуплоскость, задаваемая уравнением (1) будет сдвигаться~~

Меняя α, точка пересечения прямых $x=-4\sin\alpha$, $y=4\cos\alpha$, задающих ~~плоскости~~ две полуплоскости, будет двигаться по периметру окружности с центром в $(0;0)$ радиуса 4. Рассмотрим нашу фигуру, удовлетворяющую системе. Она состоит из двух фигур обозначенных S_1 и S_2 соответственно, т.е фигур FBA и CAD. Вне зависимости от выбора точки $A(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$, сумма дуг $\smile FB+\smile CD=180^\circ$, т.к. $\angle CAD=90^\circ$. Тогда периметр частей фигуры, состоящих из дуг окружности: $\pi r=6\pi$. Посчитаем периметр других частей фигуры, т.е. отрезков FA, BA, CA, AD, т.е. сумму длин отрезков FC и BD. ~~Заметим, что $\Delta BFC=\Delta BCD$, т.к. $\angle BFC=\angle BDC$ (опираются на $\smile BC$)~~

Найдём их длины: Из ΔONC, где $OC=6$, $NO=|4\cos\alpha|$, по теор. Пифагора имеем $NC=\sqrt{OC^2-NO^2}=\sqrt{36-16\cos^2\alpha}=4\sqrt{9-\cos^2\alpha}$. Тогда $FC=2NC=$ $=8\sqrt{9-\cos^2\alpha}$ ~~(в силу [illegible])~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из $\triangle OBT$, в котором $OT=|4\sin\alpha|$, $OB=6$, имеем по теореме Пифагора:

$BT=\sqrt{OB^2-OT^2}=\sqrt{36-16\sin^2\alpha}=4\sqrt{9-\sin^2\alpha}$. Тогда $BD=2BT=8\sqrt{9-\sin^2\alpha}$

Тогда периметр фигуры задается функцией: $P(\alpha)=6\pi+8\left(\sqrt{9-\sin^2\alpha}+\sqrt{9-\cos^2\alpha}\right)=$

$=6\pi+8\left(\sqrt{8+\cos^2\alpha}+\sqrt{8+\sin^2\alpha}\right)$

Возьмем её производную: $P'(\alpha)=\cancel{8(\sqrt{9-\sin^2\alpha}}\ 8\left(\sqrt{8+\cos^2\alpha}+\sqrt{8+\sin^2\alpha}\right)'=$

$=8\left(\frac{1}{2\sqrt{8+\cos^2\alpha}}\cdot(-\sin2\alpha)+\frac{1}{2\sqrt{8+\sin^2\alpha}}\sin2\alpha\right)=4\sin2\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{8+\cos^2\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{8+\sin^2\alpha}}\right)=$

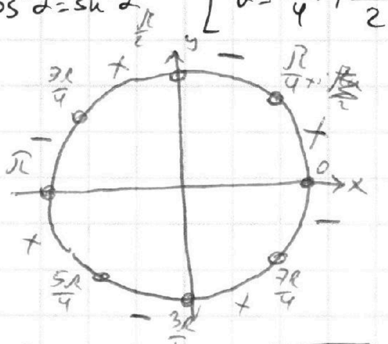
$=4\sin2\alpha\left(\frac{\sqrt{8+\cos^2\alpha}-\sqrt{8+\sin^2\alpha}}{\sqrt{8+\cos^2\alpha}\sqrt{8+\sin^2\alpha}}\right)$. Решим ур-ие $P'(\alpha)=0$

$4\sin2\alpha\left(\frac{\sqrt{8+\cos^2\alpha}-\sqrt{8+\sin^2\alpha}}{\sqrt{8+\cos^2\alpha}\sqrt{8+\sin^2\alpha}}\right)=0 \;\Big|\cdot\sqrt{8+\cos^2\alpha}\sqrt{8+\sin^2\alpha}>0$

$4\sin2\alpha\left(\sqrt{8+\cos^2\alpha}-\sqrt{8+\sin^2\alpha}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin2\alpha=0\\ \sqrt{8+\cos^2\alpha}=\sqrt{8+\sin^2\alpha}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi n}{2}\\ \cos^2\alpha=\sin^2\alpha\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi n}{2}\\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\end{array}\right.\quad n\in\mathbb{Z}.$

Рассмотрим знаки производной:



~~Значит~~ Точки $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$ — являются точками максимума, то периметр при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$ принимает наибольшее значение, равное: $6\pi+8\left(\sqrt{8+\frac{1}{2}}+\sqrt{8+\frac{1}{2}}\right)=$

$=6\pi+8\left(\sqrt{\frac{17}{2}}\cdot2\right)=6\pi+\frac{16\sqrt{17}}{\sqrt{2}}=6\pi+8\sqrt{34}=M.$

Ответ: $M=6\pi+8\sqrt{34}$, при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

n - Удачн.

$\Pi \cdot B \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

$11 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = + \sin\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$11 \cdot C_{n-2}^{2} = \Pi \cdot B$

$11 \cdot 24 = 2(n-4)(n-5)$

$11 \cdot C_{n-2}^{2} = C_{n-2}^{k}$ $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}$

$n \geq 7$

$\frac{11 \cdot (n-2)!}{2!(n-4)!}$ $\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}$ $\frac{11}{2(n-k)!} = \frac{1}{k!}$

$33 = n-4$

$11 \cdot 6 = 2(n-4)$ $\frac{(n-2)!}{2} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!k!}$

$k \geq 5$

$\frac{11}{2(n-4)!} = \frac{1}{(k-2)!(n-k)!}$

$n \geq 15.$ $\frac{11(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}$ $\frac{11}{2(n-4)!} = \frac{1}{(n-k)!k!}$

$11(k-2)!(n-k)! = 2(n-4)!$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta +$

$11\,C_{n-2}^{2} = C_{n-2}^{k-2}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta -$

$\arccos\frac{x}{7} + \arccos\frac{y}{4} > 0$ $-4 \leq y \leq 4$

$\sin\pi y(\sin\pi y - \sin\pi x) = \cos\pi y(\cos\pi y + \cos\pi x)$

$-7 \leq x \leq 7$

$\sin^2\pi y - \sin\pi y\sin\pi x = \cos^2\pi y + \cos\pi y\cos\pi x$

$\sin^2\pi y - \frac{1}{2}(\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi y+\pi x)) = \cos^2\pi y + \frac{1}{2}(\cos(\pi y+\pi x) + \cos(\pi y - \pi x))$

$\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$ $\alpha =$

$\cos 2\pi y = -\cos(\pi y - \pi x)$

$y = \frac{1}{3}, x = 0$ $x = 3y - 1.$

$\cos 2\pi y = \cos(\pi + \pi x - \pi y)$ $3y = x+1$

$\frac{3}{4} =$

$3\pi y = \pi + \pi x$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) = 0$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$2\cos\frac{3\pi y - \pi x}{2}\cos\frac{\pi y + \pi x}{2} = 0$

$-4 \leq y \leq 4$

$\frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$M = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy =$

$3y - x = 1 + 2n$ $y + x = 1 + 2m$ $-7 \leq 3y - 2n - 1 \leq 7$

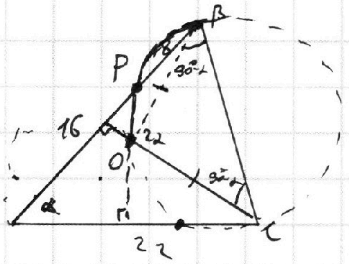
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$ $x = 3y - 2n - 1$ -4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$16 \cdot 24 = x \cdot 22$

$x = \frac{8 \cdot 24}{11}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)}$ $\quad xy - 4y + 4x - 16 = xy$

$-4y + 4x = 16 \quad x - y = 1$

$x - y = 4$

$\frac{1}{y-4} + \frac{1}{y} + \frac{3}{y(y-4)} =$

$x = y - 4 \quad x = y + 4$

$(x-y)(x^2+y^2+xy) - 12xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 12xy$

$= 4(16 + 3xy)$

$\frac{(n-2)! \cancel{(n-4)!} \cdot 4!}{\cancel{(n-4)!} \cdot 2 \cdot n!}$

$11 \frac{C^2_{n-2}}{C^4_n} = \frac{C^{k-2}_{n-2}}{C^k_n}$

$\frac{(n-2)! \cancel{(n-k)!} k!}{\cancel{(n-k)!} (k-2)! n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

$\frac{11(n-2)! \cdot 24}{2 \cdot n!}$

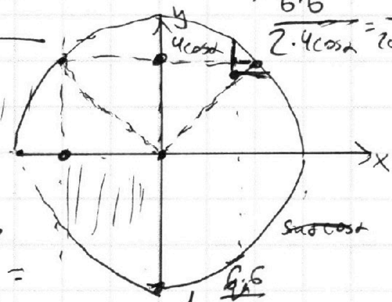
$\frac{132}{n(n-1)}$

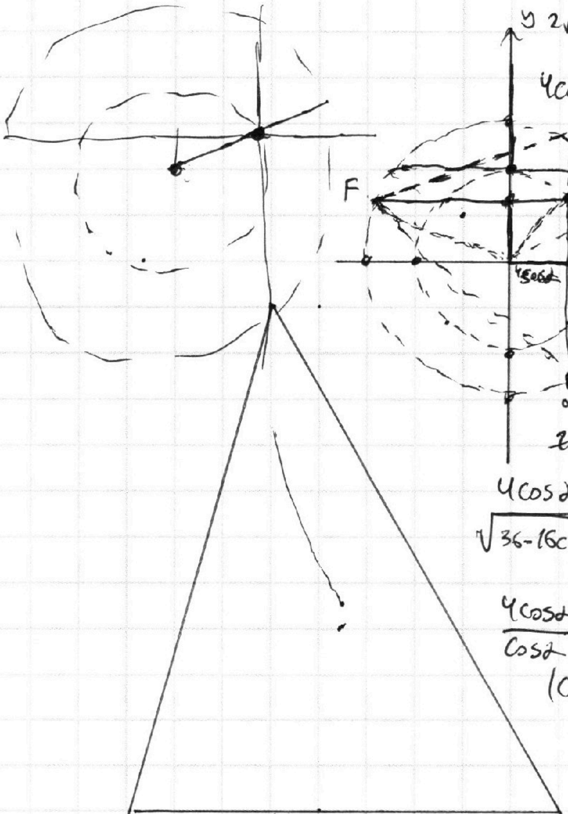
$\frac{132}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

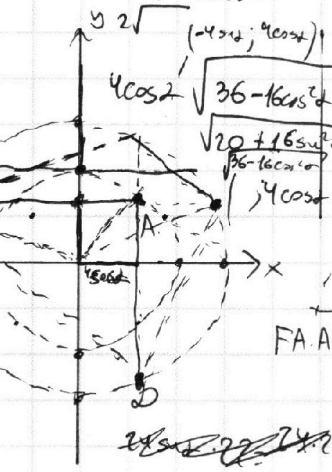
$(x+4) + y = 0$

$2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$

$\frac{6 \cdot 6}{2 \cdot 4\cos\alpha} = \frac{3}{2\cos\alpha}$



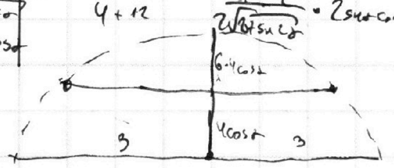




$4\cos\alpha \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} =$

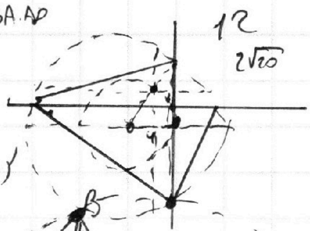
$\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha}$

$\frac{1}{2\sqrt{8+\sin^2\alpha}} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$



$FA \cdot AC = BA \cdot AD$

$\frac{12}{2\sqrt{20}}$

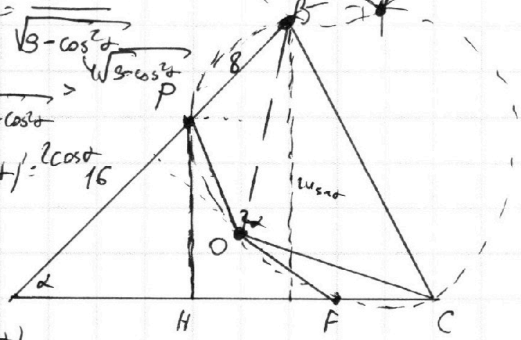


$\frac{4\cos\alpha}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{3 - \cos^2\alpha}} (\cos\alpha \cos\alpha)$

$4\sqrt{3 - \cos^2\alpha}$

$\frac{4\cos\alpha}{\cos\alpha} \sqrt{3 - \cos^2\alpha} >$

$(\cos^2\alpha)' = 2\cos\alpha$



$\frac{1}{2\sqrt{8+\cos^2\alpha}} \cdot (-\sin 2\alpha)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$1111 \cdot B \cdot C = n^2$ $1111 = 11 \cdot 101.$

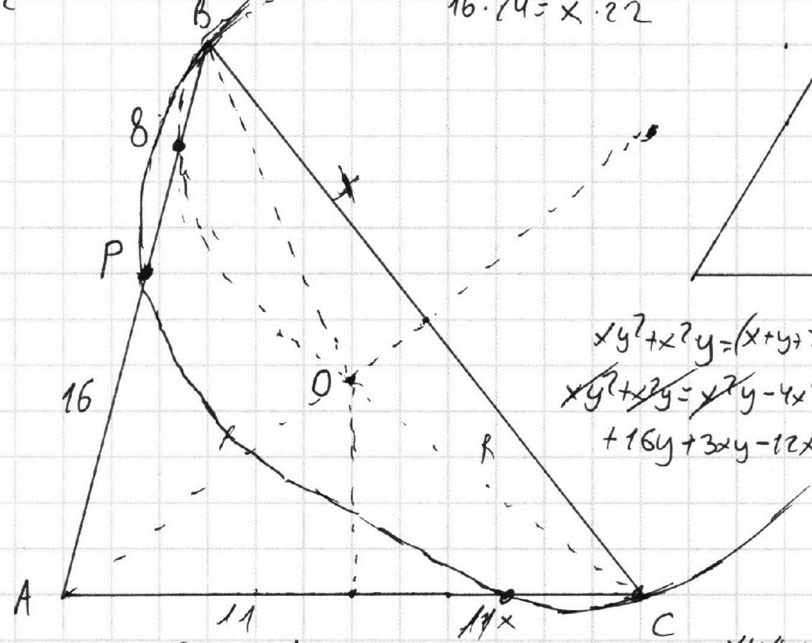
$ABC \vdots 1111.$ $ABC \vdots 11,$ $\overline{abcd} \cdot \overline{xy} \vdots 11, \vdots 101$

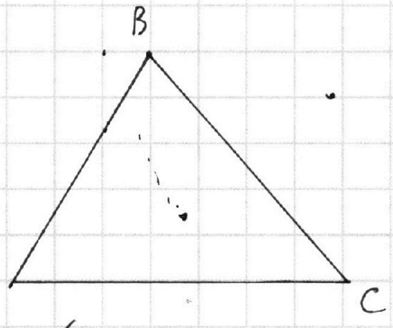
$ABC \vdots 101.$ $a \not\vdots 101,\ a \not\vdots 11,\ \overline{xy} \not\vdots 101, a.\ B \vdots 101,$

$B = 707$, $C \vdots 11.$ $* 11,$

$AC = 22$

$16 \cdot 24 = x \cdot 22$





$xy^2 + x^2y = (x+y+3)(xy - 4x - 4y + 16)$

$\cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} = x^2y - 4x^2 - 4yx + 16x + xy^2 - 4xy - 4y^2$
$+ 16y + 3xy - 12x - 12y + 48$

$x^3 - y^3 - 12xy?$

$xy(y+x) = (x+y+3)(x-4)(y-4)$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4}{(x-4)(y+4)} \qquad \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x}{(x-4)(y+4)}$$

$] a\ \mathcal{D} = x+y$
$t = yx$

$-4x^2 - 4yx - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y + 3xy - 12x - 12y + 48 = 0$

$-4x^2 - 4y^2 - 5yx + 4x + 4y + 48 = 0$

$-4(x^2 + y^2 + 2yx) + 3yx + 4x + 4y + 48 = 0$

$-4\mathcal{D}^2 + 3t + 4\mathcal{D} + 48 = 0$ $\mathcal{D}^2 - \mathcal{D} - \frac{3t}{4} - 12 = 0$

$4\mathcal{D}^2 - 4\mathcal{D} - 3t - 48 = 0$ $D = 1 + 4\left(\frac{3t}{4} + 12\right) = 1 + 3t + 48 =$
$= 3t + 49$