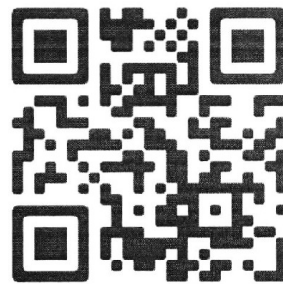




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1 $n! + (n+1)! + (n+2)! \stackrel{?}{=} 361$; ~~Заметим, что $361 = 19^2$~~

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! + (n+2)! &= n!(1 + (n+1) + (n+1)(n+2)) = \\ &= n!(2 + n + n^2 + 2n + n + 2) = n!(4 + n^2 + 4n) = \\ &= n!(n^2 + 4n + 4) = n!(n+2)^2 \end{aligned}$$

~~1 случай: $n! : 19^2 \Rightarrow$ минимальное $n = 38$~~

~~2 случай: $n! : 19$; и $(n+2)$~~

Если $n! : 19$, то n — хотя бы 19, т.к. 19 — простое,

Если $(n+2)^2 : 19$; $(n+2) : 19$; $(n+2)^2 : 19^2$, тогда

минимально $n = 17$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$). $17 < 19$. Значит

минимальное $n = 17$

Ответ: $n = 17$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a-2, a-1, a, a+1, a+2$ — 5 натуральных
последовательных чисел. Тогда сумма
их квадратов: $(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 =$
 $= a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a +$
 $+ 4 = 5a^2 + 4 + 1 + 1 + 4 = 5a^2 + 10$, Тогда можно
как из них вычли 10, получим $5a^2 + 10 - 10 = 5a^2$
и $5a^2 = N^3$; $N^3 : 5$; $N : 5$ и $N > 6$. Проверим предполож.
Если $N = 10$ (т.к. $N = 5$ не подходит $5 < 6$); тогда $5 \cdot a^2 = 10^3$;
 $a^2 = \frac{10^3}{5} = \frac{1000}{5} = 200$; $a \notin \mathbb{N}$
Если $N = 15$, то $5 \cdot a^2 = 5^3 \cdot 3^3$; $a^2 = 5^2 \cdot 3^3$; $a \notin \mathbb{N}$
Если $N = 20$, то $5 \cdot a^2 = 5^3 \cdot 4^3$; $a^2 = 5^2 \cdot 4^3 = 5^2 \cdot 2^6$;
 $a = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$ — противоречия нет, тогда минимальное
 $N = 20$, т.к. $N \neq : 5$, и $N \neq 5, 10, 15$ методом перебора
Ответ: $N = 20$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

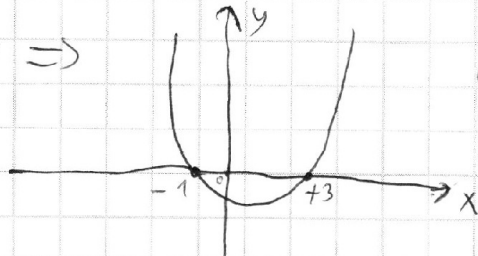
$$\textcircled{3} \quad |\sqrt{x^2-2x-3} + 6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| + |7-2x|$$

Исключим выражения под корнем: $\sqrt{x^2-2x-3}$;

$$x^2-2x-3 \geq 0; \text{ при равенстве с } 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}; x = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ или } x = \frac{2-4}{2} = -1, \text{ ветви}$$

параболы смотрим вверх, т.к. коэффициент перед

$$x^2 = 1 \Rightarrow$$



а значит ОДЗ для x ;

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Завершим, что корни всегда ≥ 0 ; а $+6 > 0$;

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 > 0 \Rightarrow |\sqrt{x^2-2x-3} + 6| = \sqrt{x^2-2x-3} + 6$$

Исключим значения для $x \geq 3$:

Получим что:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| + |7-2x|$$

$$|\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| = \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1; \text{ т.к. } \sqrt{x^2-2x-3} \geq 0$$

а $2x-1$; при $x \geq 3$; тоже больше 0, значит

исключаем больше нуля. Значит

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + |7-2x|$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 - \sqrt{x^2-2x-3} - 2x+1 \geq |7-2x|$$

$$7-2x \geq |7-2x|, \text{ при } x \geq 3; \text{ но } \leq 3,5; |7-2x| = 7-2x$$

при $x > 3,5$; $7-2x < 0$, а $|7-2x| > 0$, ~~значит~~ и значит $7-2x < |7-2x|$. Значит в данном случае подходит

интервал $x \in [3, 3,5]$

Рассмотрим случай для всех значений $x \leq -1$

$$\text{При } x \leq -1; |7-2x| = 7-2x$$

Тогда

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1| + 7-2x$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 - 7 + 2x \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1|$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1|$$

Аналогично с первым случаем условие будет

$$\text{соблюдаться при условии } \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x; \text{ т.к. } x \leq -1, \text{ то } 1-2x > 0, \text{ значит}$$

возведем все в квадрат получим: $x^2-2x-3 \geq (1-2x)^2$

$$x^2-2x-3 \geq 1-4x+4x^2; -3x^2+2x-4 \geq 0, \text{ но}$$

$$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0; \text{ а коэф перед } x^2 \text{ равен } -3,$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

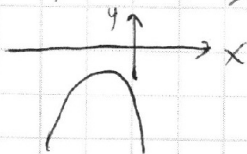
7
☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

то ветви параболы смотрим вниз и функция $-3x^2 + 2x - 4$ принимает значения (отрицательно), значит y



нет x , при котором $y \geq 0$

значит при $x \leq -1$ не имеет решений.

Ответ: $x [3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

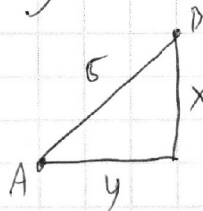
~4) Запомним, что если мы рассматриваем ромбы с вершинами которых являются целые числа от 1 до 50, — то это квадрат 5×5 .

Запомним всевозможные виды ромбов:

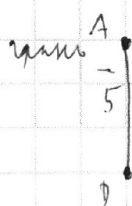
1 вид: квадрат; со стороной 5 или 5, очевидно что в длину и высоту он поделится по $49 - 4 = 45$ раз, а значит всевозможных квадратов 45×45

2 вид: ромб как у квадрата 1 группа ромбов по одной из вертикалей:

(Вспомогательная: запомним, что если сторона ромба равна 5 а точки A и B его вершины) имеют целые координаты, то по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 5$, при этом x и $y \in \mathbb{N}$, то подходят только пары $(3; 4)$ и $(4; 3)$



(не работают еще точки A и B имеют ~~одну~~ одинаковую координату по оси x и y хотя бы одну)



третья точка не лежит на линиях сетки, так получить квадрат.



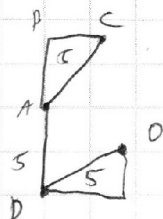
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

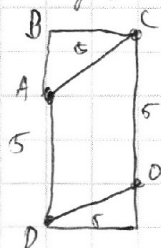
Получим так:



Аналог AB и BC равны
3 и 4 как-то

относительно точки D более простое, а значит 2
случай;

1 случай: точки O и C лежат на 1 вертикали:



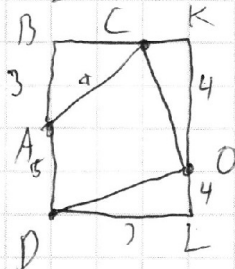
- параллелограмм; его добавит 2 прямоугольности:

Если $BC = 3$; то его размер 1 квадратик куда
он помещается 3×9 ; ~~это так~~

в координатной плоскости будет $(49-2) \cdot (49-8) =$
 $= 47 \cdot 41$ и ~~это так~~ ^{если повернуть на 90°} столько же.

Если $BC = 4$; то его размер 4×8 , и в координатной
плоскости с учетом поворота будет $(49-3) \cdot (49-83) =$
 $= 46 \cdot 42 = 2$

2 случай: Если разные, то стороны лежат так:



но тогда $BK > DL$ - противоречие



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

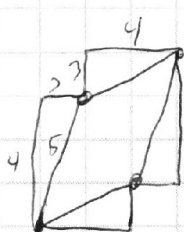
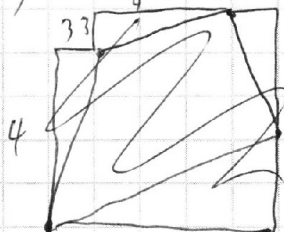
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 тип: Если все на разных горизонталях и

вертикалях:



— квадратов 3 и 3 и 4

$$\text{Ответ: } 45 \cdot 45 + 46 \cdot 42 \cdot 2 + 43 \cdot 41 \cdot 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(~5) 19. $2^x + 2025 = y^2$; Заметим, что $2025 = 45^2$

тогда $19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$; $19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

Плюс же очевидно, что $x \geq 0$, и.к. иначе $19 \cdot 2^x$ — отриц., а $20 \cdot y^2 - 2025$ — целое число.

Левая часть уравнения делится на 19, значит одна из частей правой части делится на 19.

$y-45 : 19$ или $y+45 : 19$. Оба числа на 19

делиться не могут т.к. их разность равна 90;

а $90 : 19$.

Рассмотрим первый случай: Пусть $y-45 : 19$,

$y-45 = 19k$, где $k \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0$ — множество

натуральных чисел с нулём), тогда $y+45 = y-45+90 = 19k+90$

$19 \cdot 2^x = 19k(19k+90)$; $2^x = k(19k+90)$; т.к.

слева осталось только 2^x ; то k и $19k+90$ тоже

степени двойки (возможно и нулевые), тогда

пусть $k = 2^n$; $19k+90 = 2^m$; где n и $m \in \mathbb{N}_0$

Тогда $19k+90 = 19 \cdot 2^n + 90 = 2^m$; $90 = 2^m(2^{m-n} - 19)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Очевидно что $m > n$). Завершим что $90 = 45 \cdot 2$; а

$2^{n-1} - 19$ - нечетное число $(n, k \neq n)$ $90 : 2$; но не

кратно 2^2 , но $2^n = 2$; $n=1$, тогда

$$45 \cdot 2 = 2(2^{n-1} - 19); \quad 45 + 19 = 2^{n-1}; \quad 2^{n-1} = 64 \Rightarrow$$

$$n-1 = 6; \quad n = 7, \text{ тогда получаем, что } k = 2^n = 2$$

Итак из уравнения $2^x = k(19k + 90)$; $2^x = 2 \cdot (38 + 90) \Rightarrow$

$$2^x = 2 \cdot 128; \quad 2^x = 2 \cdot 2^7; \quad 2^x = 2^8; \quad \underline{x=8}, \text{ а}$$

$$y - 45 = 19k; \quad y = 19k + 45 = 38 + 45 = 83$$

$$\text{Получаем } 19 \cdot 2^8 + 2025 = 83^2 - \text{верное равенство.}$$

Рассмотрим 2 случая: Пусть $y + 45 : 19$;

$y + 45 = 19k$, где $k \in \mathbb{N}_0$, действующим аналогом

первой случаю; $y - 45 = y + 45 - 90 = 19k - 90$

$$19 \cdot 2^x = (19k - 90) 19k; \quad 2^x = (19k - 90) k;$$

k и $19k - 90$ - степени двоек, пусть $k = 2^n$;

$$19k - 90 = 2^m; \text{ тогда } 19k - 90 = 19 \cdot 2^n - 90; \text{ (очевидно, что } m < n)$$

$$19 \cdot 2^n - 90 = 2^m; \quad 90 = 19 \cdot 2^n - 2^m; \quad 90 = 2^m (19 \cdot 2^{n-m} - 1)$$

$$90 = 45 \cdot 2; \quad 2^m : 2; \quad 19 \cdot 2^{n-m} - 1 - \text{нечетное (н.к. } n \neq m - \text{ равнома}$$

и в первом пункте) $90 / 2^2 \Rightarrow 2^m : 2^2$; но $2^n : 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предварительное, что $2^n = 2$; $m = 1$

Получа из уравнения: $90 = 2^n (19 \cdot 2^{n-1} - 1)$;

$$2 \cdot 45 = 2 (19 \cdot 2^{n-1} - 1); 45 = 19 \cdot 2^{n-1} - 1; 19 \cdot 2^{n-1} = 46$$

Предварительное, что противоречие, т.к. $46 : 19 \Rightarrow$

$$y + 45 \neq 19.$$

Итак, рассмотрев все случаи и существует

только 1 пара подходящих чисел; $x = 8$ и $y = 83$

Ответ: 1 пара: $x = 8$; $y = 83$



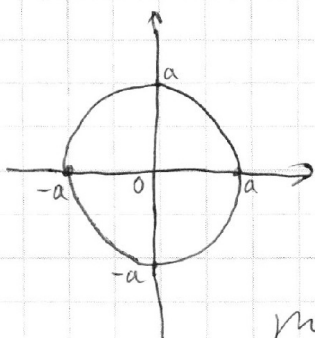
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26) Заменить что при выполнении условия $x^2 + y^2 = a^2$;

Отметить на плоскости всевозможные ~~x и y~~ точки с этими x и y , получив график окружности с центром в $(0; 0)$ и радиусом $|a|$



- где $a \geq 0$; для $a < 0$ все зеркально

Заменить что если мы определим a , то максимально возможное значение

$x^2 - 6x + a$ будет при минимуме $x^2 - 6x$, а это

минимум при самом маленьком x . Если $a > 0$,

то минимальное $x = -a$; Если $a < 0$, то минимальное

$x = a$. Рассмотрим оба случая поподробнее

1 случай: Если $a > 0$; то $x^2 - 6x + a = 8$; $(-a)^2 - 6 \cdot (-a) + a = 8$

$$a^2 + 6a + a = 8; a^2 + 7a - 8 = 0; a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$a = \frac{-7 - 9}{2} = -8 \text{ или } a = \frac{-7 + 9}{2} = \frac{2}{2} = 1; \text{ но } a = -8 \text{ не подо-}$$

ходит так как рассматриваем случай $a > 0$

2 случай: Если $a < 0$; то $x^2 - 6x + a = 8$; $a^2 - 6a + a = 8$

$$a^2 - 5a - 8 = 0; \text{ тогда } a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{57} > \sqrt{25} = 5; \text{ значит } a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} < 0 \text{ - не подходит}$$

$$a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} > 0 \text{ - не подходит}$$

Очевидно случай когда $a = 0$ не рассматривается
т.к. в нем существует только 1 точка $(b; 0)$; и

$$0^2 - 6 \cdot 0 + 0 \neq 8$$

$$\text{Ответ: } a = 1 \text{ или } a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

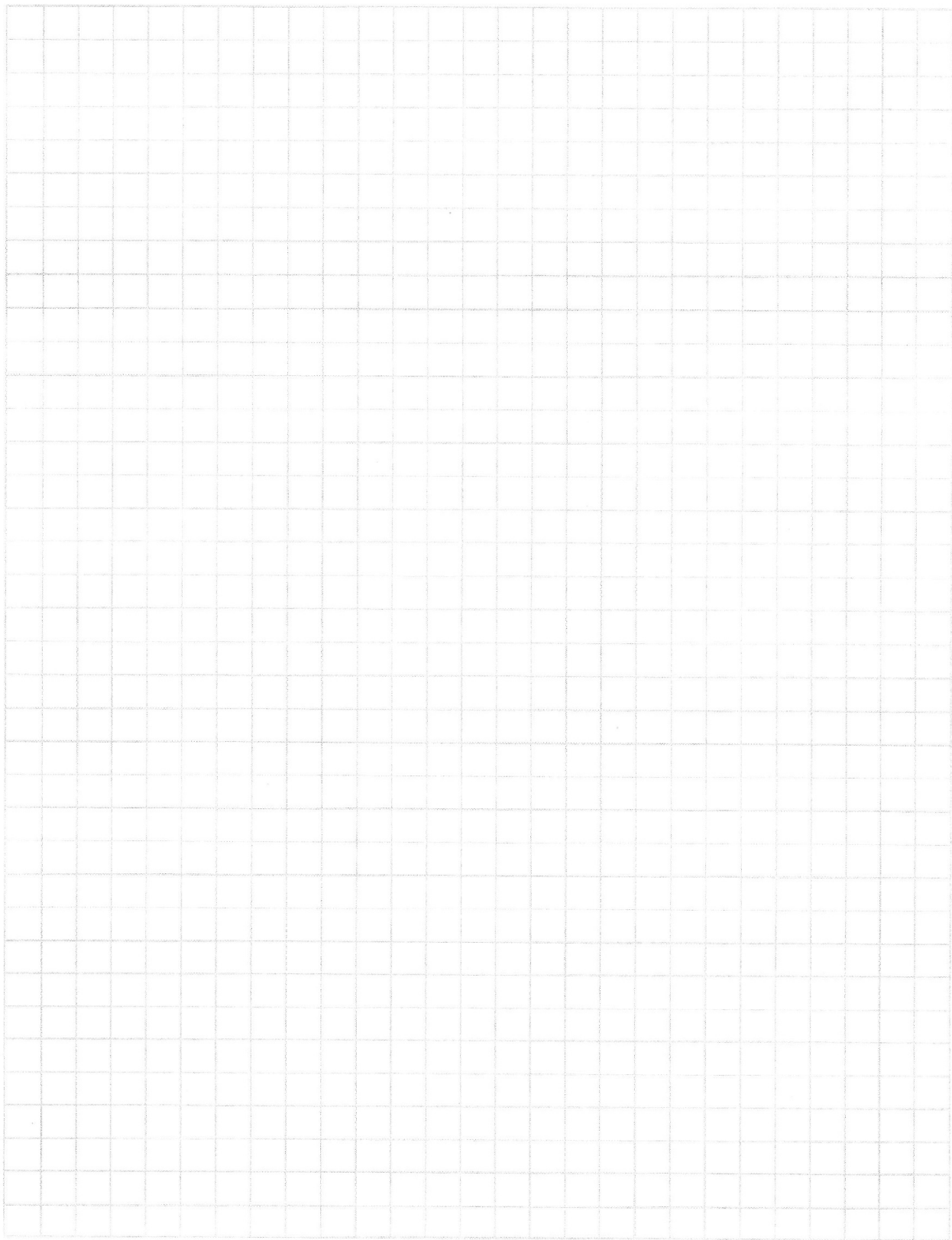


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 случай: $X \leq -1$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 - 7 + 2x \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1|$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1 + 2x \geq | \dots |$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1, \quad x \leq -1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -1 + 2x$$

~~допускается~~

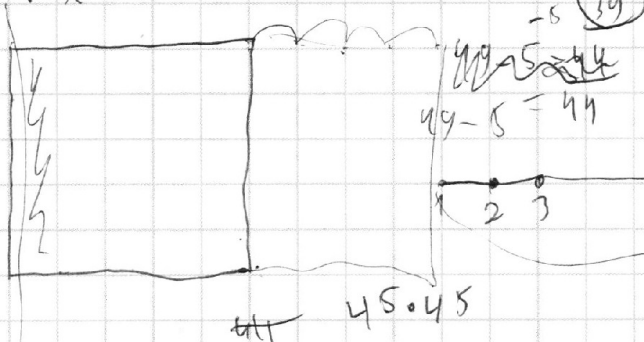
$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1 + 2x \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2 + 4x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1 + 2x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1$$

(~4)



$$8 = 4$$

$$2 = 3$$

$$6 - 5 + 1 = 2$$

$$4 - 5 + 1 = 0$$

$$44.44$$

$$44.44 - 4 = 40.44$$

$$44.44 - 5 = 39.44$$

$$1 \quad 2 \quad 3$$

$$49.49$$

$$45.45$$

$$49.49$$

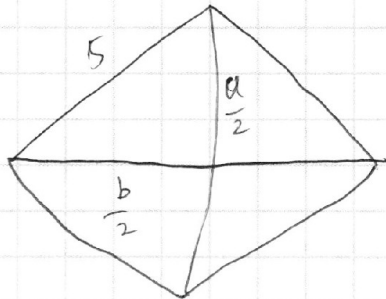


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

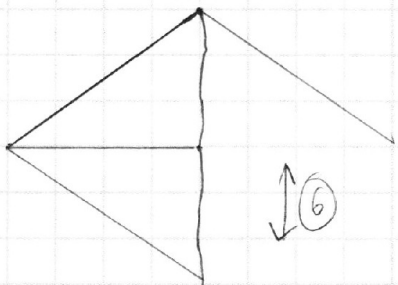
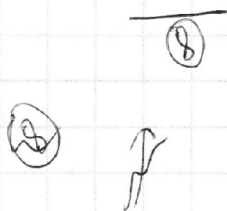
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$$

$$4 - 25 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \Rightarrow \boxed{a=3, b=4}$$

$$100 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{a=4, b=3}$$



$$5 = 0$$

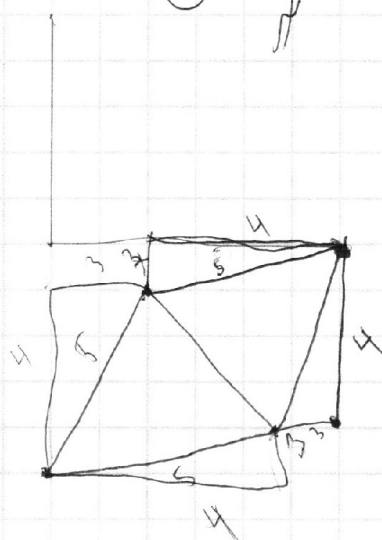
$$6 = 1$$

$$7 = 2$$

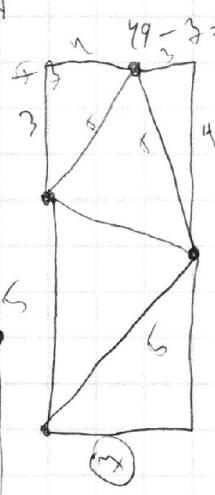
$$-5$$

$$49 - 5 = 44 \text{ в } \text{гггггггггг}$$

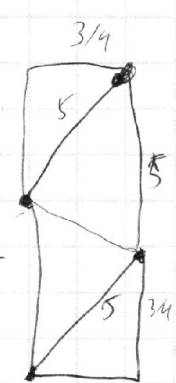
$$44 \cdot 42 \cdot (2)$$



$$\begin{aligned} 7 &= 0 \\ 8 &= 1 \\ 9 &= 2 \\ 10 &= 3 \end{aligned}$$



$$49 - 3 = \textcircled{2} \text{ в } \text{гггггггггг}$$



$$\frac{3 \times 9 \text{ см}}{4 \times 8}$$

$$7 - \textcircled{8}$$

$$8 - 2$$

$$9 - 3$$

$$49 - 6 = \textcircled{43 \cdot 43}$$

$$42 \cdot 42 \cdot 2 + 43 \cdot 43 \cdot 2 + 45 \cdot 45 \cdot 2 + 47 \cdot 47 \cdot 2 + 46 \cdot 42 \cdot 2$$

$$\textcircled{5} - 49 \cdot 7 = 47 \cdot 0$$

$$\textcircled{9} - 49 \cdot 8 = 41$$

$$47 \cdot 47 \cdot 2 +$$

$$\textcircled{4} - 49 \cdot 3 = 46$$

$$\textcircled{8} - 49 \cdot 6 = 42$$

$$46 \cdot 42 \cdot 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5

15
20
25
30

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$x \geq 0; y \geq 0$
 y - нечетное; если $x \neq 0$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ -19 \cdot 106 \\ \hline 125 \\ +5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \mid 199 \\ -19 \\ \hline 125 \\ +11 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$2025 = 19 \cdot 106 + 11$$

$$19(2^x + 106) + 11 = y^2$$

$(-a; 0)$

$$x^2 - 6x + a = (-a)^2 - 6a + a$$

$$x^2 - 6x + a = (-|a|)^2 - 6 \cdot -|a| + a =$$

$$x^2 = 0^2$$

$$x = -|a|$$

$$= |a|^2 + 6|a| + a = 8$$

$$a \geq 0$$

$$a^2 + 6a + a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 8 \cdot 32}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{841}}{2}$$

$$a = \frac{-7-9}{2} < 0 \text{ - не подходит}; a = \frac{-7+9}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a \leq 0$$

$$\sqrt{57} > \sqrt{25} = 5$$

$$a^2 - 5a = 8$$

$$a^2 - 6a + a = 8$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2}$$



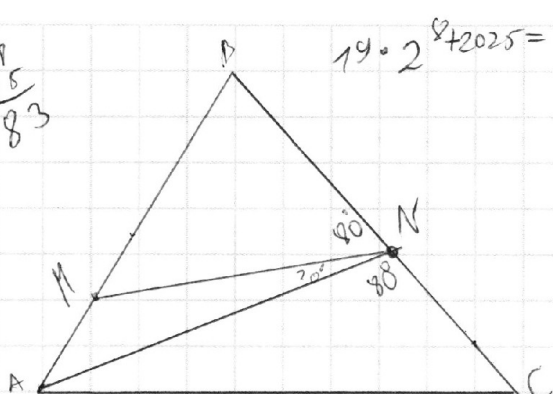
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 1 \\ 38 \\ + 45 \\ \hline 83 \end{array}$$



$$19 \cdot 2^{8+2025} = 8^{12}$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 45 \\ + 19 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA} = \frac{BM + \Delta X}{MA - X}$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$2^8 = 256$$

$$2^9 = 512$$

$$2^{10} = 1024$$

$$X = \frac{BN \cdot MA}{2BM + MA}$$

$$11 + 1 + 2025 = 4^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 2025 \\ 19 \\ \hline 2044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2044 \overline{) 2} \\ 1022 \overline{) 2} \\ 5081 \overline{) 2} \\ 73 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 = 1600 \\ + 45 = 2 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 45 \\ \hline 45 \\ 225 \\ \hline 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 45 \\ \hline 45 \\ 225 \\ \hline 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$2 = 1$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$19 \cdot 2^x = 9(y-45)(y+45)$$

$$19 - 2^x$$

$$90 : 19 - \text{наименьшее}$$

$$x - \text{минимум } (2)$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 90 \overline{) 19} \\ 76 \overline{) 14} \\ 14 \end{array}$$

$$K = 2$$

$$\frac{2(19 \cdot 2^x - 19)}{2} = k + k + 9 \cdot \frac{14}{19}$$

$$19 \cdot 2^x = 2k + 4 \cdot \frac{14}{19}$$

$$19 \cdot 2^{x+90} = 2 \cdot k = k = \text{сумма}$$

$$2^x \cdot 19 = 19k(19k+90)$$

$$2^x \cdot 2^x = k(19k+90)$$

$$2^x = 19k^2 + 90k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N=25; a^2 = \frac{3^3 \cdot 5^3}{5} = 3^3 \cdot 5^2$$

$$N=35; a^2 = \frac{5^3 \cdot 7^3}{5} = 5^2 \cdot 7^3$$

$$N=30; a = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{5} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$N=40; a^2 = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 8}{5} = 2^3 \cdot 8 = 2^6$$

$$N=20 = \frac{2^2 \cdot 5}{5} = 2^2$$

$$N=95; a^2 = \frac{5 \cdot 19}{5} = 19$$

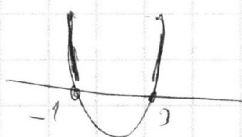
$$a = 5 \cdot 3^3 = 135$$

$$\sim \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 4} = \sqrt{(x-1)^2 - 2^2} = \sqrt{(x-1-2)(x-1+2)}$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)}$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1, -1$$



$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

получили $x \geq 3$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 2x - 1 \geq 7 - 2x$$

$$\geq 0$$

$$6 - 2x - 1 \geq 7 - 2x$$

$$5 - 2x \geq 7 - 2x; x \geq 3; 2x \geq 6; 5 - 2x \leq 5 - 6 = -1$$

$$-1 \text{ не больше нуля } \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 1) \quad \begin{array}{r} 361 \\ 261 \\ \hline 101 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 27 \\ \hline 10 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 19 \\ \hline 19 \\ 181 \\ \hline 171 \\ \hline 171 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$19 \cdot 19$$

$$19 \cdot 19$$

$$n! + n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+2) = n! (1 + 2n + 3) = 2n! (n+2)$$

$$n! (n+2) = 19 \cdot 19$$

$$n! : 19^2; n = 38 - \text{много}$$

$$261 = 1 \cdot 261 = 19 \cdot 19 = 361 - 1$$

$$n! : 19 \text{ и } n+2 : 19$$

$$n! : 1; n+1 : 19; n+2 : 19$$

$$n \geq 19; n+2 \geq 21$$

$$n+2 : 19^2; n = 19^2 - 2$$

$$\begin{array}{l} 19 \\ \parallel \\ n+2 = 38 \\ \hline n = 36 \end{array}$$

(2)

$$a-2; a-1; a; a+1; a+2$$

$$(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 =$$

$$= a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 =$$

$$5a^2 + 4 + 1 + 1 + 4 = 5a^2 + 10; 5a^2; N^3; N \geq 6$$

$$a : 5; 5a^2 : 5^3; N : 5; N = 10; a^2 = \frac{1000}{5} = 200$$

$$a = \sqrt{200} - \text{нельзя}$$

$$\begin{array}{l} N=15 \quad a^2 = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3 \\ N=20 \quad a^2 = \frac{5 \cdot 4}{5} = 4 \\ N=25 \quad a^2 = \frac{5 \cdot 5}{5} = 5 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $y + 45 = 19k$; где $k \in \mathbb{N}$; тогда $y - 45 = 19k - 90$

$$19 \cdot 2^x = (19k - 90) / 19k; \quad 2^x = (19k - 90)k; \Rightarrow$$

$\Rightarrow 19k - 90$ - степень двойки; k - степень двойки.

Пусть $k = 2^n$; а $19k - 90 = 2^m$; m и $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0$ - множество натуральных чисел с нулем)

Тогда $19k - 90 = 19 \cdot 2^n$

$$2^8 = 256$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 256 \\ \hline 19 \\ 2304 \\ 256 \\ \hline 4864 \\ + 2025 \\ \hline 6889 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \\ \times 83 \\ \hline 83 \\ 249 \\ 664 \\ \hline 6889 \\ + 49 \\ \hline 6938 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^4 \cdot 2^2 \\ 16 \cdot 4 \\ \times 76 \\ \hline 76 \\ 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$(n+2)^2 \\ n^2 + 4n + 4$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 79 \\ \hline 79 \\ 727 \\ 19 \\ \hline 367 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5) $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$; Заметим, что $2025 = 45^2$

тогда $19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$; $19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

Заметим; что $y-45$ или $y+45$ должно быть

кратно 19 (оба от не кратны н.к. различаются на 90

/19) Пусть $y-45 : 19$; $y-45 = 19k$; где $k \in \mathbb{N}$;

тогда $y+45$ (как было сказано ранее) $= y-45+90 =$
 $= 19k+90$;

$19 \cdot 2^x = 19k(19k+90)$; $2^x = k(19k+90)$

П.к слева остались только степени 2; то

k - степень двойки и $19k+90$ - степень двойки

Пусть $k = 2^z$; тогда $19k+90 = 19 \cdot 2^z + 90 = 2^n$; где

$n \in \mathbb{Z}$; $z \in \mathbb{Z}$ (если было бы иначе то из-за целых

значений выходит, что $n \in \mathbb{N}_0$; $z \in \mathbb{N}_0$).

Тогда $90 = 2^{n-z}$; $45 \cdot 2 = 2^{n-z}$; $2^{n-z} \nmid 45$. Получаем

противоречие. Значит $(y-45)$ - не кратно 19,

Пусть рассмотрим второй случай: Если $y+45 : 19$

Действуем аналогично: