



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ? *97 1?*

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x. \quad \text{наибольшее } 6105 \dots$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ . *сложно, но можно <целое>*

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad \text{2 опре-ти}$$

имеет ровно 2 решения.  $\Leftrightarrow$  все  $> 0$  кроме каждой из 2 скобок? *99*

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

⇓

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

аналогично

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

⇓

$$ac \cdot ab \cdot bc = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc^2 = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$ac = 7^{39}$$

$$abc = 7^{39}$$

$$abc = (2^{28} \cdot 7^{39})$$

$$abc \min = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

- каждое из чисел делится  
на 7  
на 2  
на 7  
на 2

на 7  
на 2  
на 7  
на 2

$$\text{Ответ: } abc \min = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b} \text{ — не в крестик}$$

$$\Downarrow$$
$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \text{ — в крестик}$$

~~$$(a+b)^2 - 9ab$$~~

~~$$(a+b) \text{ НОД}(a+b; (a+b)^2 - 9ab) = m$$~~

$$m = \text{НОД}(a+b; 9ab) \text{ (по алгоритму Эвклида)}$$

$$9ab : 9$$

$$a+b \not\% 9 \text{ т.к. } \text{НОД}(b; a) = 1$$

$$\Downarrow$$
$$ab \not\% \text{ на любой из делителей } a$$

аналогично

$$a+b \not\% \text{ на любой из делителей } b$$

$$\Downarrow$$
$$\text{Итак } \max \text{НОД}(9ab; a+b) = 9$$

можно привести пример

$$a = 4, b = 5$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{16 + 25 - 140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

$$\text{Ответ: } m_{\max} = 9$$

пояснение  
 $9ab \not\% a, b$   
помимо  $a, b$  и  
их комбинаций  
на  $9$  и  $3$  и  $9$   
только  $9$   
 $9$  — НОД  $9ab$   
—  $9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$1 - 9x = b$$

одн

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Rightarrow a+b > 0$$

$$a+b - 2\sqrt{a(a+b)} + a - b^2 \geq b$$

$$2a + b - b^2 = 2\sqrt{a(a+b)} \quad 2a + b - b^2 \geq 0$$

$$4a^2 + 4ab = (2a + b - b^2)^2$$

$$4a^2 + 4ab = 4a^2 + 2ab - 2ab^2 + 2ab + b^2 - b^3 + 2ab^2 + b^3 - b^4$$

$$4ab^2 = b^2 - 2b^3 + b^4$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

$$4a = (b-1)^2$$

$$b-1 = 2\sqrt{a}$$

$$12x^2 + 6x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot 78$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \quad \text{— ответ}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



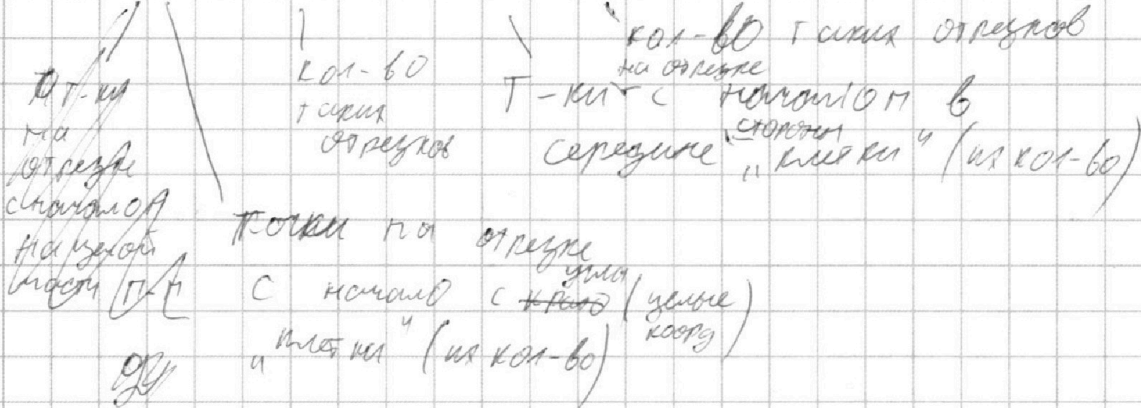
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5 - Пр 090 (4 задачи)

внутри такого парама точки с целыми координатами:

14 • 10 и 13 • 9 таких точек



для каждого каждой из Т-к с началом в углу клетки можно поставить вторую те же 14 Т-к на // стороне с началом в середине

— | — с началом в середине стороны

клетки можно поставить вторую те же 13 Т-к на // стороне с началом в углу



$$\text{всего таких пар } 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 9 \cdot 169 + 1960$$

Ответ: 348 + прер.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

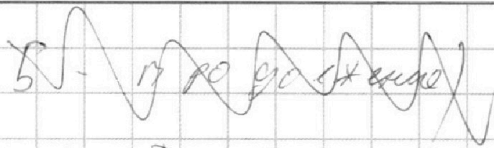
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_1^2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 14$$

$$14 + 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2:$$

- для каждой  
т-ки  $(x_i, y_i)$  это -  
прямая,

примем в уравнении  
этой прямой  $a = -2$

в вершине  $n$ -мн  $O P Q R$

стороны  $PO$  и  $QR$  заданыся прямой

$$PO: y = -2x$$

$$QR: y = 32 - 2x$$

$\Downarrow$

они  $\parallel$  той прямой, получая для каждой т-ки

запомним также, что каждая точка на прямой, полученной от одной из точек этой прямой прямой также по заданному уравнению имеет ту же самую прямую в качестве полученной

расстояние м/у этими прямыми по оси  $x = 16$

$\Downarrow$

для каждой т-ки

$$\begin{aligned} (y_1 = y_2) \\ \Downarrow \\ 2x_2 - y_2 = 14 \end{aligned}$$

в  $n$ -ме  $P x y O$  есть участок такой прямой, лежащий внутри/на стороне  $n$ -мн

$$x = (-4; 26) \quad y = (9; 0) \quad \text{т.к. } x_Q = y_R = 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) прого л жине

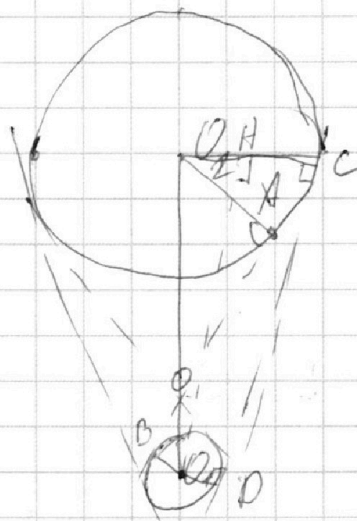
$$a = \operatorname{tg}(\alpha)$$

$\alpha$  - угол наклона прямой к оси  $Ox$

Решим с помощью задачи:

Заметим, что  
из катетов  
углов  $2$  отн  
оси  $Oy$

на  $a$  с помощью  $OH$  можно  
найти разность  $OH$



$$\Delta O_2 O_1 A \sim \Delta B O_1$$

$$\angle O_2 A O_1 = \angle B O_1 O_2 = 90^\circ$$

$$O_2 O_1 = 12$$

$$O_2 A = 4$$

$$O_1 B = 1$$

$$\frac{O O_1}{O O_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow O_1 O = \frac{12}{5} \cdot 1 = 2,4$$

$$O_2 O = \frac{4 \cdot 12}{5} = 9,6$$

$$OC = \sqrt{9,6^2 + 4^2} = \sqrt{108,16} = 10,4$$

$$a_{1,2} = \pm$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_2 O}{O_2 C} = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$a_{1,2} = \pm 2,4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$G$  - проекция  $\alpha$  на  $\Pi$

$O_1 O_2$ ,  $CD$  -  $AB$  в прямоугольнике  $ABCD$

$O_1 H$  - высота в  $\triangle O_1 O_2 C$

тогда  $\triangle O_1 O_2 C$  - прямоугольный

$\Downarrow$

$$O_1 H = O_1 O_2 \cdot \sin \alpha = 3$$

$$\Downarrow$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1 O_2}{O_1 H} = 4$$

$$\Downarrow$$
$$a_{3,4} = \pm 4$$

Ответ:  $a = [-4; -2, 4; 2, 4; 4]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Каждая из скобок  $\leq$  <sup>неравенства</sup> ~~уравнения~~ если ее приравнять к 0 -  
- окр-ть, радиус  $\pi/4$  и центр  $(0, 12)$ , радиус  $4$  и  $(0, 0)$

$(x, y)$  - решение системы, если оно  
Они не пересекаются

Принадлежит прямой  $ax + y - 8b = 0$  и одной  
из окр-тей (если  $t$ -ка внутри окр-ти - скобка  $\leq 0$ )  
на ней -  $= 0$   
вне нее -  $> 0$

Решения всего  $\Leftrightarrow$  если  $t$ -ка лежит в окр-ти,  
то прямая  $t$  уравн - сек и все  $t$ -ка на ней -  
- решение  $\Leftrightarrow \checkmark$

$t$ -ка лежит на окр-ти (каждой)

Прямая - общая касательная  
к окружностям (таких будет 2)

~~$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ ax_2 + y_2 - 8b = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + (y_2 - 12)^2 = 16 \\ x_2^2 + (8b/ax_2 - 12)^2 = 16 \\ x_1^2 + (8b/ax_1)^2 = 4 \end{cases}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



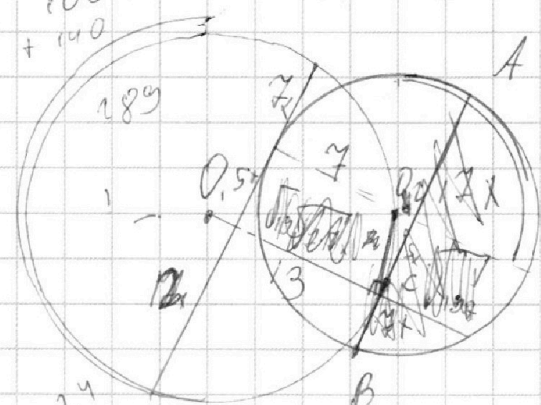
$ax + by = 8b$

$$y = \frac{8b}{a} - x$$

$$y = -ax + 8b$$

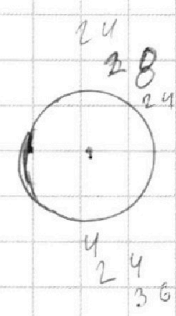
$17^2 = 110^k + 71^2$   
 $17^2 = 100 + 49 + 140$   
 $26 \cdot 2,69$

$7 \cdot 17 = 119$   
 $70 + 49 = 119$   
 $108,16$



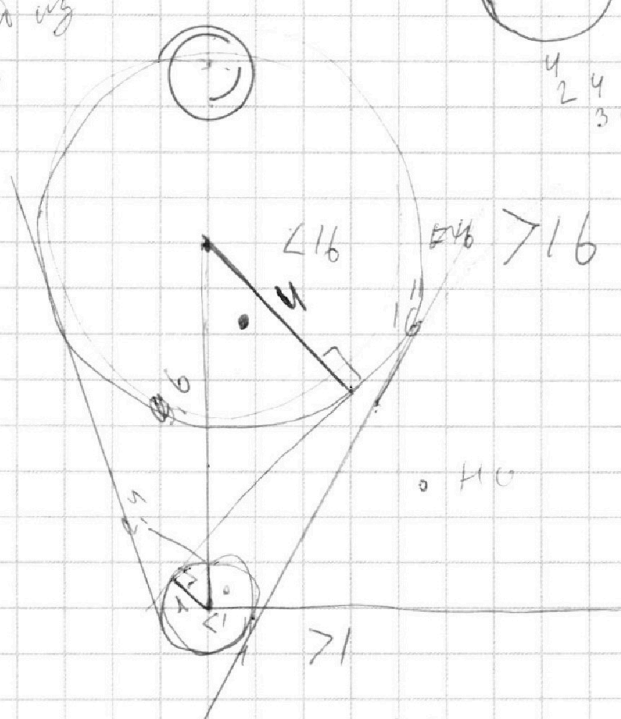
$108,16 : 4 = 27,04$   
 $27,04 : 4 = 6,76$   
 $6,76 : 4 = 1,69$   
 $108,16$

$r$  - радиус  
 отрезок из  
 ОДР



$108,16$   
 $27 \cdot 4 = 80,28$   
 $1,25 \cdot 4 = 100$   
 $2 \cdot 4 = 8$

$ax + by = 8b$   
 $y = -ax + 8b$



2 реш  
 под углом

$96^2$   
 $(90 + 6)^2$

$16 +$   
 $8100 + 36 + 2 \cdot 540$   
 $9180 \quad 9216 \quad 1080$   
 $36$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



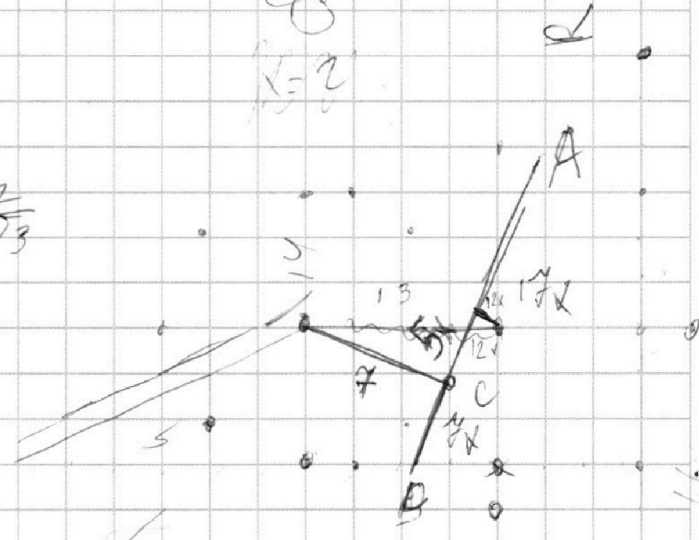
$$3(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$36 - 24 = 12$$

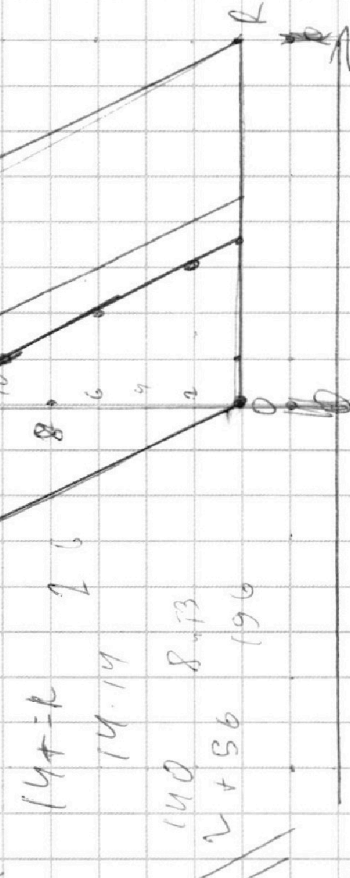
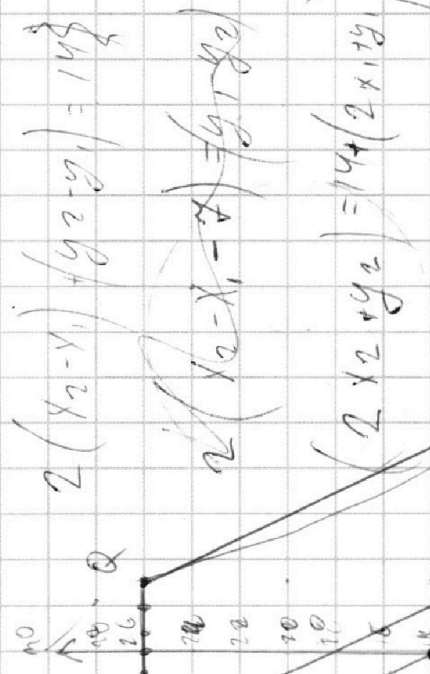
$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x=2$



$2x_2 - 2x_1 - 11x_2 - 11x_1 = 14$   
 $2(x_2 - x_1) - 11(x_2 + x_1) = 14$   
 $2(x_2 - x_1) = 11(x_2 + x_1) + 14$   
 $2(x_2 - x_1) = 11(x_2 + x_1) + 14$



$1845$   
 $1296$   
 $1521$   
 $1440$   
 $1840 + 1810$   
 $900 + 540 + 810$   
 $1840 + 540 + 810$   
 $1840 + 540 + 810$   
 $1840 + 540 + 810$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab \cdot bc \cdot ca = m \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 3^{18} \cdot 5^{23} \cdot 7^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ca = m \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 3^{18} \cdot 5^{23} \cdot 7^{39}$

$abc^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

$abc : 2^{18} \cdot 7^{39}$

$ab \cdot bc : 7^{29}$

$a \cdot c : 7^{39}$

$\Sigma ab \cdot bc : 7^{39}$

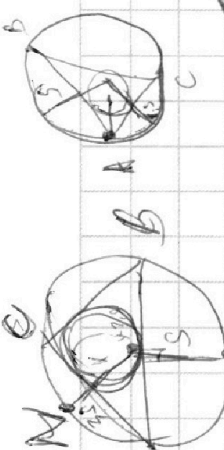
$a : 2$

$b : 3$

$a$  и  $b$  взаимно просты

$a = 2 \quad b = 3$

$54$



$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $c = 2^{17} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{14} \cdot 7^{11}$

$b = 2^4$

$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

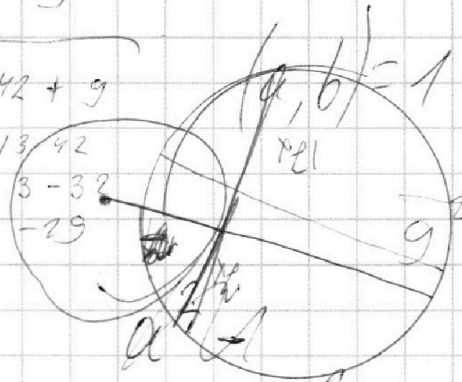
$18 \cdot 7 = 126$

$4 - 42 + 9$

$13 \cdot 42$

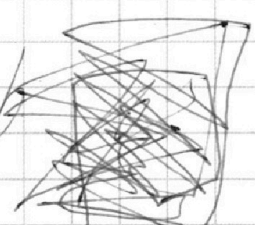
$3 - 32$

$-29$



$(a-b) + 5ab$

$(a+b)^2 - 9ab$



$\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b; -9ab)$

$9ab : a, b, 9$

$a^2 + b^2 : a, b$

$12^2 = (3 \cdot 4)^2 = 16 \cdot 9$

$\Rightarrow a+b \text{ НОД} : 1 \cdot 3 \cdot 9$

$(1-9)^2 = 1 - 18 \cdot 18$

$18 \cdot 18 = 324$

$9 \sqrt{a^2 + b^2}$

$a+b - 2\sqrt{a^2 + b^2} - 9ab$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = b$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+by-8b=0 \\ [(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)] \leq 0 \end{cases}$$

1  
если = 0,  
то  $ax-1a$   
окр

1  
если = 0, то  
 $ax-1a$   
окржности

если 1-я внутри окр, то скобка  $< 0$

если на окр, то эта скобка = 0

если вне, то скобка  $> 0$

эти окр-ти не пересекаются (расст м/у ними 12,  
а их радиусы - 1 и 4 соотв)

решения всего 2

решение - если 1-я лежит внутри окр-ти  
или на ней.

$$x(y) - \text{на } ax-1a$$

решения всего 2 - исконые прямые -

- рас. сразу к 2 окр-тям (на должно быть 4)  
найдем а в этом случае:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + (12-y_2)^2 = 16 \\ ax_1 + y_1 - 8b = 0 \\ ax_2 + y_2 - 8b = 0 \end{cases}$$