



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Записано число A . Оно имеет вид $\overline{aaaa}$, где $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, ("0" не может быть первым цифрой, не может быть)
- $$A = 10^3 \cdot a + 10^2 \cdot a + 10 \cdot a + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$
- П.к. $(A \cdot B \cdot C)$ — квадрат и $a \leq 9$, $C < 100$, необходимо чтобы $B : 101$, иначе $(A \cdot B \cdot C)$ — не квадрат.
- Пусть $B = b \cdot 101$, где $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ (если $b \geq 10$, то B — четырехзначное число, $b \neq 0$ также по причине выше), тогда $B = b \cdot 101 = \overline{b0b}$. П.к. одна из цифр B равна 1 то $b = 101$
- Аналогично получаем, что $C = c \cdot 11$, где $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ и также получаем, что $C = \overline{cc}$ и получаем, что $C = 55$
- $$(A \cdot B \cdot C) = (a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55) = (101 \cdot 11)^2 \cdot (a \cdot 5) - \text{квадрат}$$
- значит $(a \cdot 5)$ — квадрат и $a \in \{1, \dots, 9\}$, значит $a = 5$
- Значит $A = 5555$
- Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$
$$K = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x \neq 3$$

$$(y+x+1) \cdot ((x-3)(y+3) - xy) = 0 \quad (1)$$

$$(1): (y+x+1) \cdot (xy - 3y + 3x - 9 - xy) = 0$$

$$\Downarrow y+x+1 > 0 (y > 0; x > 0)$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$x - y = 3$$

$$M = x^3 - y^3 - yxy = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) - yxy = 3 \cdot (x^2 + xy + y^2) - yxy =$$

$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x-y)^2 = 3 \cdot y = 27 \quad (\text{достигает максимума при } x=y)$$

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x \right] = 0$$

$$1^\circ \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2^\circ \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \neq 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x = \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x\right) - \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) + \cos\left(\frac{-\pi x - \pi y}{2}\right) \right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{или} \\ \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x, y \in \mathbb{R}$$

$$x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 + 2n - x, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Объем: } [x, 2n+1-x], \text{ где } x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x}{2} + \arccos \frac{2-x}{2} \leq 2\pi$$

$$\text{П.к. } 0 \leq \arccos x \leq \pi, \text{ где } |x| \leq 1, \text{ то}$$

$$\arccos \frac{x}{2} + \arccos \frac{2-x}{2} \leq 2\pi, \text{ значит левая часть}$$

$$\left| \frac{x}{2} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{2-x}{2} \right| \leq 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2-x}{2} = 1 \text{ (т.к. "н" коэф. } \frac{x}{2} \text{ и } \frac{2-x}{2} \text{ равны, сдвинуто на } -1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -9 \leq x \leq 9 & (1) \\ -9 \leq y \leq 9 & (2) \\ \frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \neq -2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 9 \\ -9 \leq 2n+1-x \leq 9 \end{cases}$$

$2n+1-x$ — четное, если x — нечетное, и наоборот. Выбираем
в отрезке $[-9; 9]$ 5-ч. и 9-нечетных
в отрезке $[-9; 9]$ 9-ч. и 10-нечетных

Если x — четное, то $2n+1-x$ может равняться любой нечетной из отрезка $[-9; 9]$ и наоборот.

Всего различных пар: $5 \cdot 10 + 5 \cdot 9 = 50 + 45 = 95$

По условию (3) нам не подходит одна пара: $(-9; -9)$, она
конкретно не удовлетворяет из а), поэтому $95 - 1 = 94$

Ответ: 94



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть количество клиентов будет N
 a - количество клиентов, финансируемых в начале

$\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$ - вероятность в начале месяца

$\frac{4+a}{N} \cdot \frac{4+a-1}{N-1}$ - вероятность в конце месяца

Имеем:

$$3,5 \cdot \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = \frac{4+a}{N} \cdot \frac{(4+a)-1}{N-1}$$

$$14 \cdot 3 = (4+a) \cdot (3+a)$$

$$a^2 + 7a + 12 - 42 = 0$$

$$a^2 + 7a - 30 = 0$$

$$(a-3) \cdot (a+10) = 0 \quad \begin{cases} a > 0 \\ \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$4+3 = 7$$

Ответ: 7



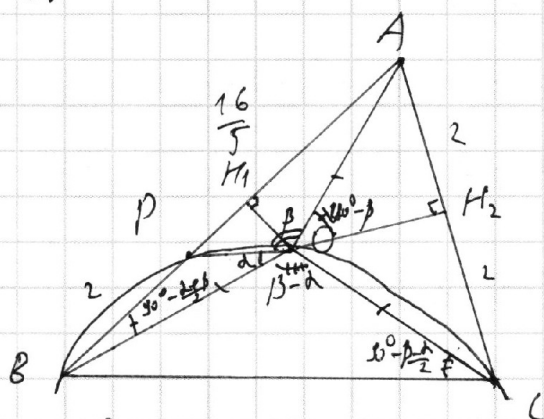
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный

O - центр ω , ω - окр. описанная $\triangle ABC$

ω_2 - окр. описанная $\triangle BOC$; $\omega_2 \cap AB = B, P$

$AP = \frac{16}{5}$; $BP = 2$; $AC = 4$

$S_{\triangle ABC} = ?$

1) Д. и П.О;

$BO = OA = OC = R$; $OH_1 \perp BA$

$\triangle BOA$ - равнобедренный

$\Rightarrow OH_1$ - медиана, высота, биссектриса $\triangle BOA$

OK_2 - медиана, высота, биссектриса $\triangle BOC$

2) $\angle BOP = \alpha$; $\angle POA = \beta$

$$\frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{BP}{PA} = \frac{S_{BPO}}{S_{PAO}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot BO \cdot PO}{\frac{1}{2} \sin \beta \cdot AO \cdot PO} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5}{8}$$

$$\angle ABO = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BPO = \frac{1}{2} (\angle BPO + \angle POA) = 90^\circ - \frac{2\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot (\angle BCO) = \alpha - \beta$$

$$\angle AOC = 360^\circ - (\angle BOA + \angle BOC) = 360^\circ - (2\alpha + \alpha - \beta) = 360^\circ - 3\alpha + \beta$$

$$\angle AOK_2 = \frac{\angle AOC}{2} = 180^\circ - \frac{3\alpha - \beta}{2}$$

$$\angle AOK_1 = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \frac{2}{R} = \sin \angle AOM_2 = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

$$\frac{\frac{16+2}{5} \cdot 2}{R} = \sin \angle AOM_2 = \sin \left(\frac{2\pi\beta}{2} \right)$$

$$\frac{\sin \left(\frac{2\pi\beta}{2} \right)}{\sin \beta} = \frac{26}{20}$$

~~$$\frac{26}{20} \sin \beta = \sin \frac{2\pi\beta}{2} = \frac{1 - \cos(4\pi\beta)}{2}$$

$$\frac{1 - \cos(4\pi\beta)}{2} = \left(\frac{26}{20} \right)^2 \sin^2 \beta = \frac{26^2}{20^2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin \beta =$$

$$= \frac{13^2}{20^2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(2-\beta) - \cos(2\pi\beta))$$~~

~~$$\angle POA + \angle AOM_2 = \beta + 180^\circ - \beta = 180^\circ \Rightarrow POA_2 - \text{то же самое}$$

$$\text{то же самое: } \cos \angle A = \frac{2}{13} = \frac{2}{13} = \frac{2}{13}$$~~

~~$$\sin^2 \angle A = 1 - \frac{2^2}{13^2} = \frac{169-4}{169} = \frac{165}{169} \Rightarrow \sin \angle A = \frac{\sqrt{165}}{13}$$

$$\angle A - \text{то же самое}$$~~

~~$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \angle A \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{165}}{13} \cdot 9 \cdot \frac{26}{5} = \frac{9}{5} \cdot \sqrt{165}$$~~

$$\cos \angle A = \frac{2}{13} = \frac{10}{13} = \frac{5}{6}$$

$$\sin^2 \angle A = 1 - \frac{25}{69} = \frac{69-25}{69} = \frac{44}{69} \Rightarrow \frac{\sqrt{44}}{8} = \sin A$$

$$\angle A - \text{то же самое}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \angle A \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{44}}{8} \cdot 9 \cdot \frac{26}{5} = \frac{13\sqrt{44}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{44}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} (x-2\cos t) \cdot (y-2\sin t) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

1) $x^2 + y^2 = 9$ - окружность с радиусом 3, значит $x^2 + y^2 \leq 9$ -

ГМТ ~~на~~ внутри этого круга (центр $O(0;0)$)

$0 \leq x-2\cos t \leq 4$ и $0 \leq y-2\sin t \leq 4$ - прямые параллельные

ОМ отрезкам и ОМ окружности

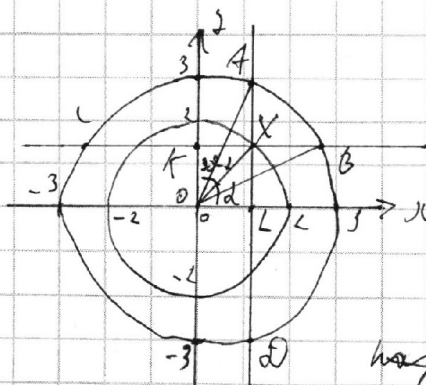
$x=2\cos t$ $y=2\sin t$ $\Rightarrow$ x, y на окружности с радиусом 2. Также

Эта окружность имеет центр $O(0,0)$

(1), чтобы это было верно ~~то~~ необходимо, чтобы

$$\begin{cases} x-2\cos t \geq 0 \\ y-2\sin t \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-2\cos t \leq 0 \\ y-2\sin t \leq 0 \end{cases}$$

2) Введем полярные координаты на координатной плоскости.



Для поиска наибольшего

М можно считать, что $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

ОА. К чему $\max(|AB|)$ не при фикс

2, это можно исправно найти

Прямые $x-2\cos t=0$
 $y-2\sin t=0$

высечены на окружности с радиусом



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 две дуги. Пусть это дуги $\sim AB$ и $\sim CD$ (меньше)
 Пусть $AD \cap CB = X$, м.к. $\angle CXD = 90^\circ$ (из-за параллельности)
 или из-за α, β уравнений системы меньше $\begin{cases} 11 - 2 \cos \alpha = 0 \\ 9 - 2 \sin \alpha = 0 \end{cases}$

но знаем длина дуг AB и CD — известны и
 можем их вычислить: $\frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi$

3) Пусть $CX \cap O_1 = K$, $KD \cap O_2 = L$. В силу
 симметрии $AL = LD$ и $CK = KB$

Пусть $\angle AOL = \varphi$

$$AO \cdot \cos \varphi = OX \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$AD = 2AL = 2 \cdot 3 \cdot \sin \varphi = 6 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

Пусть $\angle BOK = \beta$

$$BO \cdot \cos \beta = OX \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$CB = 2KB = 6 \cdot \sin \beta = 6 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_M = \angle AB + \angle CD + \angle CB + \angle AD = 3\pi + 6 \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{5}{9} \cos^2 2} + \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 2} \right) \\ \leq \left[\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right] \leq 3\pi + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2 - \frac{5}{9}(\cos^2 2 + \sin^2 2)}{2}} = \\ \leq 3\pi + 12 \cdot \sqrt{\frac{18-5}{2 \cdot 9}} = 3\pi + 12 \frac{\sqrt{7}}{3} = \boxed{3\pi + 4\sqrt{7}}$$

Докажем равенство $\sqrt{1 - \frac{5}{9} \cos^2 2} = \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 2}$

$$\cos^2 2 = \sin^2 2$$

$$\sin^2 2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \cos 22}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 22 = 0$$

$$22 = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\boxed{2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} n}$$

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{7} - \max(A, B)$; $2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} n$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По тому же рассуждению получим, что
и каждая сторона в тех же точках, что
и u^2 , а значит их центры (окружности)
совпадают.

Покажем, что LO и TO — радиусы той же окружности.
Отт. к LL — ср. пер. к обе сторонам прямого
угла, то значит LO — радиус и
поэтому вершина угла O не принадлежит
и для TO , значит $LO = TO$.

Вернемся к условию задачи: из равенства
 $TO = LO$ и LO — высота $\Rightarrow LO$ — медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow LC = CT$
 $AO = OB \Rightarrow LO \parallel LB$ (как ср. л. треугольника LAB),

$\angle L = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$, где $\angle L = \angle LCB$.

Отт. к $CL \perp$ обе стороны прямого угла $\Rightarrow L =$
и $BL \perp$ тому же углу

$= \angle$ (оба угла — острые) $= 90^\circ$; Получается это и есть
треугольник с острым углом

Ответ: 90° .



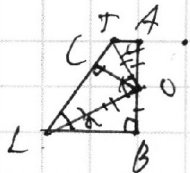
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7. ~~У пёдер~~ ~~арав.~~ Все рёбра, кроме пёдер
 вершины являются, равны между собой. Вернее,
 как и типичное основание является правильным
 многоугольником. Для начала, рассмотрим
 окружность ω . В эту окружность, одна сторона
 грани основания $\triangle ABC$ вписана, а точка
 касания L основания грани ABC лежит на сер.
 пер. к стороне основания. Возвращаясь к окружности
 сохраним $\angle C$ и $\angle B$ в основании и $\angle A$
 в вершине A грани



A, B — точки касания с основанием.

C — с обк. гранью

L — основание сер. пер. к ребру BC и к основанию

O — центр ω

И. к ~~окруж.~~ $\angle LCO + \angle LBO = \angle TCO + \angle TAO = 90^\circ$,

то $\angle LCOB$ и $\angle TAO$ можно считать смежными,
 а $\angle COB$ и $\angle TAO$ — смежными углами $\angle C$ и $\angle A$ соответственно,
 а $\angle COB = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

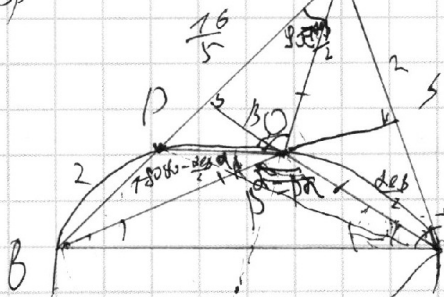
$$\alpha \cdot 1111 = \alpha \cdot 11 \cdot 101$$

$$\sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \sin \pi x = \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$



$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}$$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin \alpha \sin \beta = \sin \beta - \sin \alpha = \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$3 - 1$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

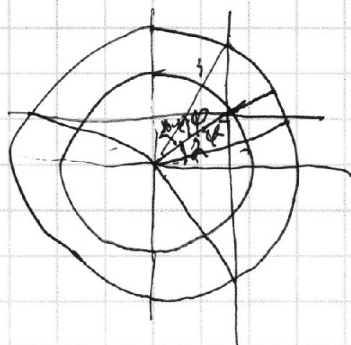
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{3}{9} \cos^2 \alpha$$