МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Из условия:

$$\begin{cases} ab = K_1 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = K_2 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = K_3 \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}. \end{cases}$$

$K_1; K_2; K_3$ – некоторые натуральные коэффициенты

Перемножив уравнения получим:

$$a^2b^2c^2 = K_1K_2K_3 \cdot 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$a^2b^2c^2 = K_1K_2K_3 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = \sqrt{K_1K_2K_3} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{15}$$

~~ab~~ $a, b, c \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{K_1K_2K_3} = n\sqrt{15}$, где $n \in \mathbb{N}$, т.е.
$K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{N}$

$$abc = n \cdot 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Очевидно, что чем меньше n, тем меньше $abc \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Наименьшее abc при $n = 1 \Rightarrow abc_{min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$\cancel{6x = \frac{4}{2\pi}}$

$6x = \frac{4}{2}\pi$

$x = \frac{2}{6}\pi$

$x = \frac{\pi}{3} \in$ ОДЗ.

Проверка:

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$5\arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi = 5\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$.

ОДЗ: $-1 \le \cos x \le 1$ — выполнено при любых x.

$-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5}{2}\pi$ — т.к. $\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$-3\pi \le x \le 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

Второе уравнение эквивалентно совокупности:

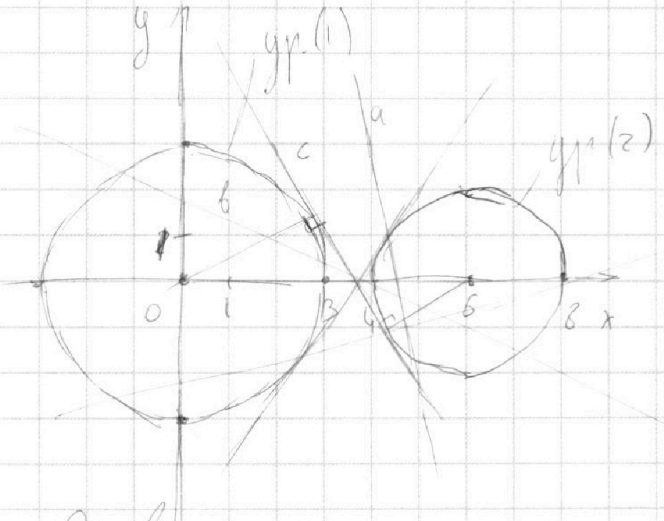
$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+36+y^2-4=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \ (1) \\ (x-6)^2+y^2=4 \ (2) \end{array}\right.$$ — Это уравнения окружностей.

(1) вершина $(0;0)$ $R=3$
(2) вершина $(6;0)$ $R=2$

Изобразим их на графике:



Чтобы система имела 4 решения, прямая $ax+2y-3b=0$ должна пересекать обе окружности при некотором b.

Очевидно, что если модуль углового коэффициента прямой больше либо равен модуля углового коэффициента касательной (прямые a и c) к обеим окружностям, то пересечь прямую с обеими окружностями невозможно при любых b. Если модуль меньше, то пересечение возможно (прямая b).

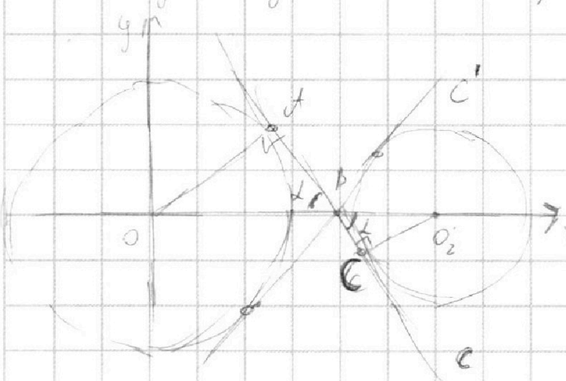
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

Найдем угловой коэффициент касательной c и c'



Проведем радиусы в точки касания
Тогда $\triangle OAB \sim \triangle BCO_2$ по 2 углам:
1) вертикальные $\angle$
2) прямые $\angle OAB = \angle O_2CB$.

Тогда $\begin{cases} \frac{OB}{O_2B} = \frac{AO}{O_2C} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \\ OB + BO_2 = OO_2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 2OB = 3O_2B \\ OB + O_2B = 6 \end{cases} \Rightarrow OB + \frac{2}{3}OB = 6$

$\frac{5}{3}OB = 6$

Тогда $\sin\alpha = \frac{OA}{OB} =$ $\quad OB = \frac{18}{5}$

$= \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ угловой коэф. c $k = -tg\,\alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

В силу симметрии относительно OO_2 (оси Ox) угловой коэф. c': $k' = tg\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Преобразуем уравнение $ax + 2y - 3b = 0$:
$2y = 3b - ax \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + 3b$ ~~:~~
Из сказанного выше

$\left|-\frac{a}{2}\right| < \left|\frac{5}{\sqrt{11}}\right| \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$

~~$\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$~~ $\quad -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

ОДЗ: $x>0$ $x\neq 1$
$y>0$ $5y\neq 1$
$y\neq \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{1}{2}\log_x 3^5 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{1}{2}\log_{5y} 3^{11} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4(5y) - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

вычтем из первого второе:

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) + \frac{7}{2}(\log_x 3 + \log_{5y} 3) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3(5y))(\log_3 x - \log_3(5y))(\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y}\right) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3(5y))\left((\log_3 x - \log_3(5y))(\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x \cdot \log_3 5y}\right) = 0$$

$$\log_3(5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

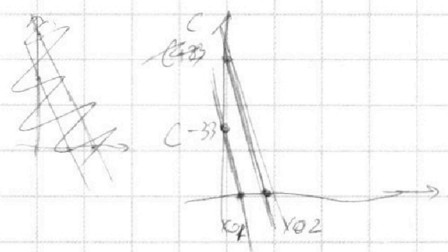
$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ (1)

$3x_2 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 33$ → т.е. этому условию (1) удовлетворяют любые две точки лежащие на прямых вида:

$3x_1 + y_1 + C + 33 = 0 \Rightarrow y_1 = -3x_1 - C - 33$

$3x_2 + y_2 + C = 0 \Rightarrow y_2 = -3x_2 - C$

⇒ Эти прямые параллельны, имеют угловой коэф. (−3) ~~и могут двигаться~~ и могут быть различными при различных значениях свободного члена C.



Как видно из рисунка

$x_{01} = \frac{C-33}{3} = \frac{C}{3} - 11$

$x_{02} = \frac{C}{3}$

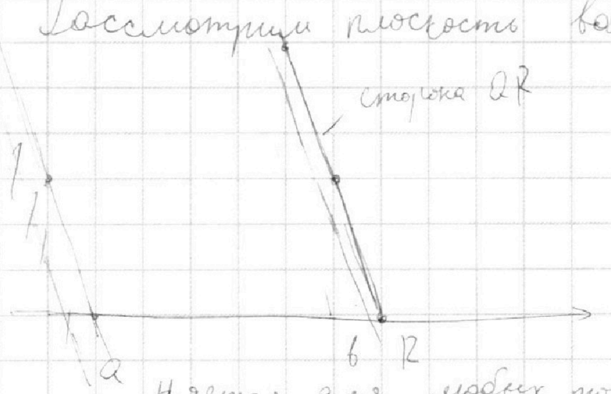
$\Rightarrow x_{02} - x_{01} = 11 \Rightarrow$

⇒ прямые, на которых лежат точки, удовлетворяющие условию (1) можно получить параллельным переносом одной из них на 11 вдоль оси OX.

Заметим также, что для точек O и P:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{42-0}{-14-0} = -3 \Rightarrow$ угловой коэффициент сторон OP и QR равен (−3). ~~Хотя и прямые~~ Легко заметить, что PQ и OR параллельны OX.

Рассмотрим плоскость вблизи точки R.



Точки, удовл. усл. (1) для QR лежат на прямой a // QR и сдвинутой на 11 единиц влево вдоль OX.
На QR лежат 15 точек с целыми координатами, на a (в пределах PQRO) тоже. Поскольку усл (1) выполняется для любых точек QR и a, то всего пар 15·15=225.
(см. следующий лист)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

Если мы построим пару прямых параллельным переносом QR и a на единицу влево вдоль OX, для нее очевидно кол-во ~~пар~~ пар точек тоже 225.

Повторив такую операцию 9 раз, получим, что прямая в которую перешла прямая a совпадет с прямой OP => при дальнейшем переносе точки не будут лежать внутри OPQR => всего пар прямых такого вида 10 => на них лежит $225 \cdot 10 = 2250$ пар точек.

Но, если мы сдвинем QR и a на $\frac{1}{3}$ влево вдоль оси X, то получим прямые так же проходящие через точки с целыми координатами, причем лежащих внутри PQRO будет по 14 на каждой прямой, т.е $14 \cdot 14 = 196$ пар.

Из рассуждений, аналогичных рассуждениям для a и QR, получим, что таких пар ~~9~~ прямых 9 => => пар точек $9 \cdot 196 = 1764$.

$$\begin{array}{r} \times 196 \\ 9 \\ \hline 1764 \end{array}$$

Если мы и это семейство прямых сдвинем на $\frac{1}{3}$ влево вдоль оси OX, то получим полностью аналогичное ему, содержащее еще 1764 пары точек.

Сдвинув их еще на $\frac{1}{3}$ получим, что они перейдут в прямые, сдвинутые относительно QR на целое число, т.е уже рассмотренное семейство.

Мы двигали прямые именно на $\frac{1}{3}$ (наименьшее натуральное число) вдоль OX, т.к. это эквивалентно их сдвигу вдоль OY на 1, т.е. если сдвинуть прямую содержащую ~~целую~~ точки с целыми координатами, то и на полученной прямой такие точки найдутся.

Итоговое кол-во пар точек: $2250 + 1764 + 1764 = 5778$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ +1764 \\ +1764 \\ \hline 5778 \end{array}$$

Ответ: 5778.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~$\log_3$~~ ~~$\log_3^5 x + 8\log_3 x + \frac{7}{2} = 0$~~

$\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8$

$\begin{cases} \log_3^4 5y + \frac{7}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$ ~~$\begin{cases} \log_3^5 5y + 8\log_3 5y - \frac{7}{2} = 0 \\ \log_3^5 x + 8\log_3 5y + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$~~

~~$\log_3$~~

$\log_3^4 x - \log_3^4 5y + \frac{7}{2}(\log_x 3 + \log_{5y} 3) = 0$

$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y}\right) = 0$

$(\log_3 x + \log_3 5y)\left((\log_3 x - \log_3 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + \frac{7}{2\log_3 x \cdot \log_3 y}\right) = 0$

$\log_3 5xy = 0$

$5xy = 1$

$xy = \frac{1}{5}$

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

$\log_3^5 x + \log_3^5 5y + 8\log_3 5xy = 0$

~~$\log_3 xy$~~

$\log_3^4 x + \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y +$

$a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4 + 8 = 0$

$(a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2ab} = 0$

$a^3 + ab^2 - ba^2 - b^3 + \frac{7}{2ab} = 0$

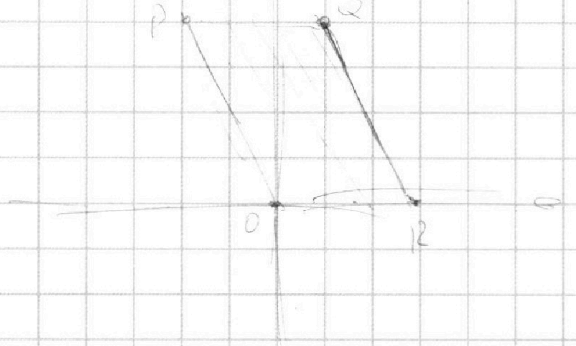
$2a^4 b - 2a^3 b^2 + 2a^2 b^3 - 2ab^4 + 7 = 0$

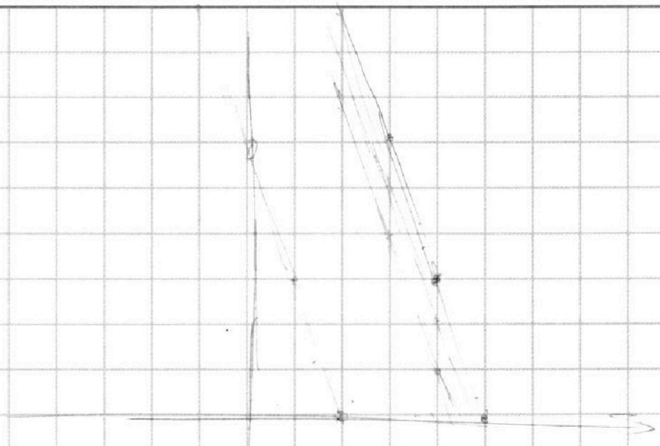
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 33$

$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$ $\quad 3x_2 + y_2 + C = 0$ $\quad y_2 = -C - 3x_2$

$y_2 - y_1 = 3(11 + x_1 - x_2)$ $\quad 3x_1 + y_2 + C + 33 = 0$ $\quad y_1 = -C - 3x_1 - 33$

$14 \cdot 14 \cdot 9 + 13 \cdot 13 \cdot 8 + 13 \cdot 13 \cdot 8$

$$\begin{cases} ab \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases}$$

$\cancel{ab \cdot ac}$

$\cancel{ab \cdot bc = ac \cdot b^2 \vdots 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23}}$

$\cancel{b^2 \vdots 2^4 \cdot 3^5}$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 \vdots 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

$a^3 + \cancel{ab^2} - \cancel{ab^2} - b^3 + \frac{7}{2ab}$ $\quad abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

$2a^4b + 2a^2b^3 - 2a^2b$

$(a-b)(a^2+b^2)$

$a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 + \frac{7}{2ab} = 0$

$2a^4b + 2a^2b^3 - 2a^3b^2 - 2ab^4 + 7 = 0$

$\cancel{2a^2b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ 2 = \dfrac{|6A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

$A = a$
$B = 2$
$C = -3b$

a^2+1

$\dfrac{9b^2}{(-6a-3b)^2} = \dfrac{3}{2}$

$18b^2 = (36a^2 - 36ab + 9b^2)3$

$108a^2 - 108ab + 9b^2 = 0$

$12a^2 - 12ab + b^2 = 0$

$b^2 - 12a \cdot b + 12a^2 = 0$

$D = 144a^2 - 48a^2 = 96a^2$

$\sqrt{D} = a\sqrt{96}$

$b = 6a \pm a\sqrt{24}$

$b = a(6 \pm \sqrt{24})$

$3b = 18a + 3\sqrt{24}a$

$a^2(18 + 6\sqrt{8})^2 = 3a^2 + 12$

$a^2(324 + 108\sqrt{8} + 288 - 3) + 12$

$6a - 3b$

$(3b)^2 = 3a^2 + 12$

$(6a-3b)^2 = 2a^2+8$

$$\begin{cases} 3a^2 + 12 = 9b^2 \\ 2a^2 + 8 = 6a^2 - 36ab + 9b^2 \end{cases}$$

$\cancel{2a^2 + 8 = 36a^2 - 36ab + 3a^2 + 12}$

$\cancel{3a^2 - 36ab}$

$7a^2 - 36ab + 4 = 0$

$b = \dfrac{7a^2+4}{36a}$

$\cancel{3a^2 + 12 = 9b^2}$

$3a^2 + 12 = \dfrac{\cancel{8}(49a^4 + 56a^2 + 16)}{4 \cdot 36 a^2}$

$6 \cdot 36 \cdot a^4 + 12 \cdot 4 \cdot 36 a^2 = 49a^4 + 56a^2 + 16$

$167a^4 + 1672a^2 - 16 = 0$

$36 \times 48 = 288 + 144 = 1728$

$1728 - 56 = 1672$

$216 - 49 = 167$

18×8

$324 + 285$

$36 \times 8 = 288$

$(1672-1)^2 = 1672^2 - 2 \cdot 1672 + 1$

$a^2 = \dfrac{12}{}$

$a^5 + 8a + \frac{7}{2} = 0$ $\quad a^4 + \frac{7}{2}a + 8 = 0$

$b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0$ $\quad b^4 - \frac{7}{2}b + 8 = 0$

$\cancel{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0}$

$a_1a_2a_3a_4 = 8$

$a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4 = \frac{7}{2}$

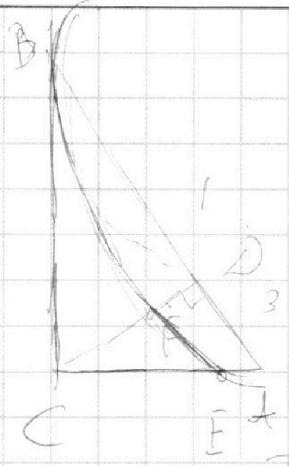
$\dfrac{8}{a_1} + \dfrac{8}{a_2} + \dfrac{8}{a_3} + \dfrac{8}{a_4} = \dfrac{7}{2}$

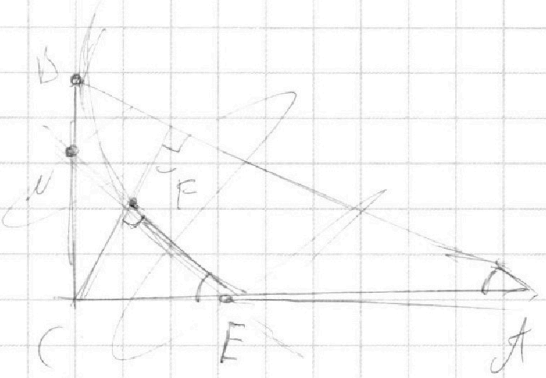
$\dfrac{8}{b_1} + \dfrac{8}{b_2} + \dfrac{8}{b_3} + \dfrac{8}{b_4} = \dfrac{7}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$\frac{\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{6}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6}$

$5\frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{6}\pi = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\pi$

$2\pi = 6x$

$x = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^4) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 & x \neq 1 \\ 5y > 0 & y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$

~~$\log_3^2 x \cdot \log_x^2 3 + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$~~

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0$

$\log_3^5 x + 8\log_3 x + \frac{7}{2} = 0$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$

$2t^5 + 16t + 7 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{\log_a b \cdot \log_b a = \log_a \log_a a^{\log_b a} \cdot \log_b a = \log_b^2 a}$

$\log_a b = \log_a a^{\log_a b} = \cancel{\log}$

$\cancel{\log_a b}$ $\log_2 8 = 3$

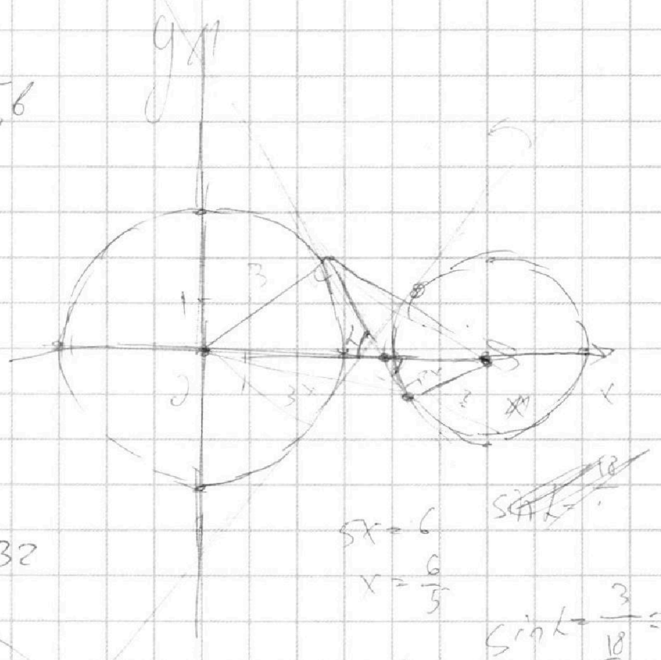
$\log_8 a - \log_8 2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{\log_a b}$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$x^2+y^2=9$

$\cancel{x^2+y^2}$ $x^2-12x+y^2=-32$

$(x-6)^2+y^2=4$



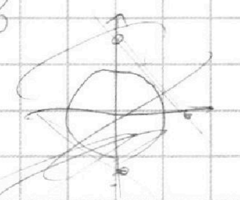
$5x=6$

$x=\frac{6}{5}$

$\sin\alpha=\frac{3}{\frac{18}{5}}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$

$2y=-ax+3b$

$y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b$



$r=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$1=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\cancel{A^2+B^2=C^2}$

$\cancel{y=\frac{-Ax-C}{B}}$

$\cancel{x\pm\sqrt{2}}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{11}}{6}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}}$

$a\in\left(-\frac{5}{\sqrt{11}};\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$