



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для минимизации значений a, b, c положим, что в их разложении на простые множители отсутствуют ~~и~~ простые числа, отличные от 2, 3, 5.

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$; $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$.

Условие задачи эквивалентно системе систем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 25 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_3 + \alpha_3 \geq 28 \end{cases}.$$

При $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

У первой системы существует решение, при котором ^{все} неравенства обращаются в равенства: $\alpha_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12$.

У второй системы следует, что $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5$; учитывая, что они целые неотрицательные, получаем $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$. Существует решение $\alpha_2 = 9, \beta_2 = 5, \gamma_2 = 17$; но тогда сумма равна 31. Если любое из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ уменьшить на 1, также получим решение; в таких решениях сумма равна 30. Чем больше каждое из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, тем больше искомое произведение $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}$, так что возьмем эти значения. То есть, мы докажем, что $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$, и приведем пример, когда неравенство обращается в равенство.

У третьей системы $\gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$; учитывая, что $\beta_3 \geq 0$, получаем $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$. Пример: $\alpha_3 = 14, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 14$, все неравенства выполняются.

Итак, $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)_{\min} = 18, (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)_{\min} = 30, (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3)_{\min} = 28$.

$$(abc)_{\min} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}.$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение задачи №2.

Заметим, что, если при измерении AO на величину x_1 ,
 NO уменьшилась на величину x_2 , то при повторном измерении
 AO на величину x_1 , NO также уменьшится на величину x_2 ,
то есть, NO и AO линейно зависят.

Найдём такое NO , что $NO = AO$. Обозначим $NO = x$.

Линейность: $\frac{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}} - x}{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{70}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - x}{\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{9}{2\sqrt{5}}}$ Равая, получаем:

$$x = \frac{6\sqrt{5} - 3\sqrt{14}}{1}$$

$$OH = AO - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5} - 3\sqrt{70} - 34}{\sqrt{5}} = \frac{28}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{14};$$

$$CF = 2NG = 2OH = \frac{56}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{14};$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ADC; \frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CF}{AC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{56}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{14}}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{56}{\sqrt{10}} - 3\sqrt{7}\right)^2 = \frac{56^2}{10} - \frac{6 \cdot 56 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{10}} + 9 \cdot 7 = \left(\frac{56 - 3\sqrt{70}}{\sqrt{10}}\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{10} (64 \cdot 7 - 2 \cdot 8\sqrt{4} \cdot 3\sqrt{10} + 9 \cdot 10) = 376,6 - 33,6\sqrt{70}.$$

Ответ: $376,6 - 33,6\sqrt{70}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

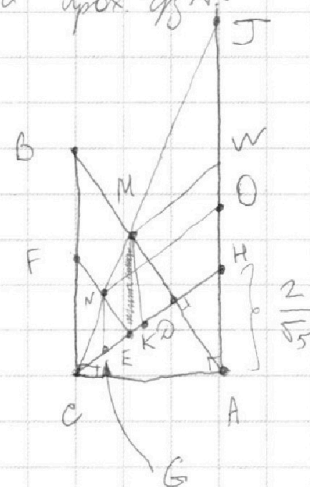


$AB:BD=14 \Leftrightarrow AD:BD=2:5 \Leftrightarrow AD:CD:BD=2:\sqrt{10}:5$
(т.к. CD — высота, опущенная из прямого угла); отсюда $AC:BC=$
 $=\sqrt{14}:\sqrt{35}=\sqrt{2}:\sqrt{5}$. Положим $AC=\sqrt{2}$; $BC=\sqrt{5}$; тогда
 $CD=\frac{\sqrt{10}}{5}a$; AD тогда $AB=\sqrt{2}$. При увеличении сторон в a раз
площади увеличатся в a^2 раз, но отношение площадей не изменится.

EF — хорда окружности, значит, если N — середина EF , то
центр окружности лежит на прямой, $\perp AB$ и прох. чз N (т.к.
 $EF \parallel AB$). Центр окружности также лж. на прямой, $\perp AC$ и прох. чз A .

Построим следующие чертежи:
Задача состоит в нахождении такой
пары точек E, F (по которым строятся
точки N и O), что $NO=AO=R$.

Обозначим $CF=\frac{1}{2}$. NG — средняя
линия в $\triangle CDE$, поэтому $NG=\frac{1}{2}$.
 $NO \perp AB \perp CD$, поэтому $NO \parallel CD$,
 $NOHB$ — параллелограмм, $OH=\frac{1}{2}$.
Отсюда $OA=\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}}$.



Возьмем NO . Если в качестве пары точек (E, F) взять
пару (C, C) , то $F=C$, $NO=CH=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$.

Если в качестве пары (E, F) взять (D, B) , то $NO=MW$, где
 M — середина BD . $\triangle BMC \sim \triangle AMJ$, $MC:MT=MB:MA=$

$$= \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}BD+AD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{9}, \quad CJ:MT = \frac{14}{9}.$$

$$\triangle MTW \sim \triangle CJH, \quad MW:CH=MT:CJ=\frac{9}{14},$$

$$MW=\frac{9}{14}CH=\frac{9}{14} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}. \quad \text{При этом, если } MK \text{ — средняя линия}$$

$$\text{в } \triangle BCD, \text{ то } MK=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}=WH; \quad WA=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}.$$

Итак, у нас есть две пары значений NO и AO :

$$\{NO=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}, AO=\frac{2}{\sqrt{5}}\}, \quad \{NO=\frac{9}{2\sqrt{5}}, AO=\frac{9}{2\sqrt{5}}\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Выполним тождество $\arcsin(a) + \arccos(a) = \frac{\pi}{2}$; перепишем
исходное уравнение:

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) \right) = 9\pi - 2x$$

$$-10 \arcsin(\sin(x)) = 4\pi - 2x$$

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5}$$

Найдем, в какой области следует искать решение.

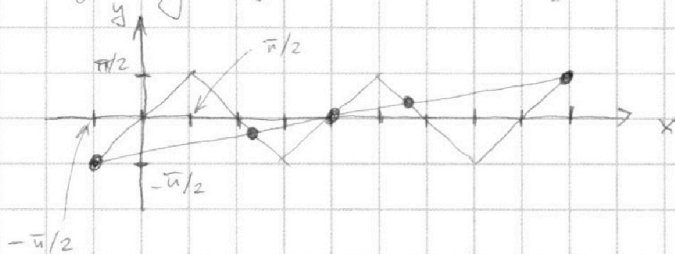
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(a) \leq \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{5\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}.$$

Пользуясь следующими правилами:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin(\sin(x)) = x \\ \sin(x) = \sin(x_1) \Rightarrow \arcsin(\sin(x_1)) = \arcsin(\sin(x)) \end{cases}$$

построим график функции $y = \arcsin(\sin(x))$, а также график
функции $y = \frac{1}{5}(x - 2\pi)$; в пределах $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$.



Отметим их пересечение,
это и есть решение
исходной системы.

Тривиальные решения: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2} \right\}$.

Первое нетривиальное решение — пересечение графиков $y = \frac{1}{5}(x - 2\pi)$ и
прямой $y = \pi - x$; $x = \frac{7\pi}{6}$. Второе нетривиальное решение
симметрично первому отн. $x = 2\pi$, т.е. $x = 4\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Осталось найти такую радиусу $x = m(y + \frac{45}{7})$, что она имеет с окружностью $y^2 + x^2 = 25$ одну общую точку.

$$y^2 + m^2(y^2 + \frac{90}{7}y + \frac{2025}{49}) = 25;$$

$$(m^2 + 1)y^2 + (\frac{90}{7}m^2)y + (\frac{2025}{49}m^2 - 25) = 0$$

Условие на единственное решение: $D = 0$. (D -дискриминант).

$$(2 \cdot \frac{45}{7}m^2)^2 - 4(m^2 + 1)(\frac{45}{7}m^2 - 25) = 0$$

$$4 \cdot \frac{45^2}{7^2}m^4 - 4(\frac{45^2}{7}m^4 + \frac{45^2}{7}m^2 - 25m^2 - 25) = 0;$$

$$-4(\frac{45^2}{7}m^2 - 25) = 0;$$

$$(\frac{45}{7} - 5)(\frac{45}{7} + 5)m^2 = 25;$$

$$10 \cdot 80 \cdot m^2 = 25 \cdot 7^2;$$

$$m = \pm \frac{35}{\sqrt{800}} = \pm \frac{35\sqrt{2}}{40}; m > 0; m = \frac{35\sqrt{2}}{40}.$$

Подставим $k = -\frac{6a}{5}$ в неравенство $-m < k < m$:

$$-\frac{35\sqrt{2}}{40} < -\frac{6a}{5} < \frac{35\sqrt{2}}{40}; \quad -\frac{35\sqrt{2}}{40} < \frac{6a}{5} < \frac{35\sqrt{2}}{40};$$

$$-\frac{35\sqrt{2}}{48} < a < \frac{35\sqrt{2}}{48}.$$

Ответ: $a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48})$.

Для задач 4 это 2 из 2! ✓

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

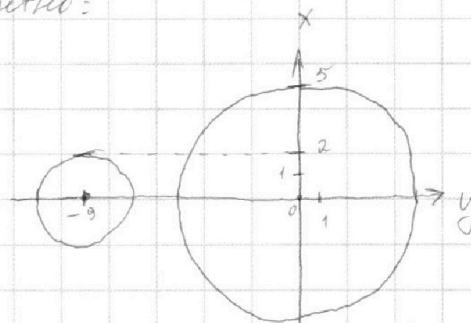
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Второе уравнение можно эквивалентно:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 5^2 & \text{— окружность} \\ (y+9)^2 + x^2 = 2^2 & \text{— окружность} \end{cases}$$

Его решение изображено на графике справа.

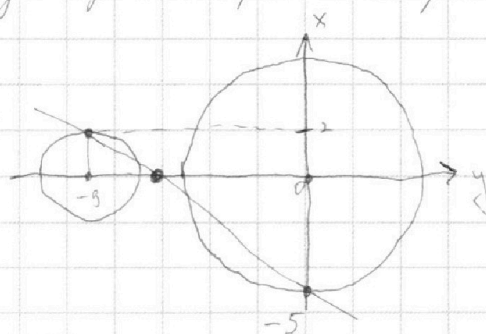


Первое уравнение можно переписать в виде $x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$.

На графике это прямая. Поскольку значение b не задано, y -за-
равнения свободного члена $\frac{b}{5}$ положение прямой может быть любым,
но ее угловой коэффициент равен $k = -\frac{6a}{5}$.

Пусть угловые коэффициенты двух внутренних касательных
к окружностям равны m и $-m$ ($m > 0$). Это верно, т.к. центры
обеих окружностей лежат на прямой $x=0$. Очевидно, что при
 $-m < k < m$ существует такое положение прямой из условия, что
она пересекает каждую окружность в двух различных точках.
При $k = \pm m$ максимальное число взаимных пересечений равно 2.
Займемся поиском m .

Общие внутренние касательные
пересекаются в центре гомологии,
переводящей одну окружность в
другую, с отрицательным
коэффициентом гомологии.



Крайняя верхняя точка одной окружности,
очевидно, перейдет при такой гомологии в крайнюю нижнюю
точку другой окружности, значит, соединяющая их прямая
проходит через центр гомологии. При этом центр гомологии
лежит на прямой, проходящей через центры окружностей.

Пусть координата центра гомологии $(c, 0)$. Тогда

$$\frac{2-0}{-9-c} = \frac{2-(-5)}{-9-0}; \text{ откуда } -18 = 7(9+c), c = -\frac{45}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $a = \log_{11}(x)$; $b = \log_{11}(y)$ ~~$\log_{11}(y)$~~ $\log_{11}(0.5y)$.
ОДЗ: $x > 0$; $y > 0$; $x \neq 1$; $y \neq 2$.
При этом $xy = 2 \cdot 11^{a+b}$.

Условие на x эквивалентно условию на a : $3a^5 + 15a - 16 = 0$.
Заметим, что без учета ОДЗ у такого уравнения относительно a
имеется ровно одно действительное решение, поскольку
функция $F(a) = 3a^5 + 15a - 16$ — неубывающая как сумма
неубывающих.

Аналогично: условие на y эквивалентно условию на b :
 $3b^5 + 15b + 16 = 0$; без учета ОДЗ существует ровно одно действи-
тельное решение отн. b .

~~Следствие из этих двух условий: $3a^5 + 15a + 3b^5 + 15b = 0$,
 $3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$,~~

~~При этом $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = (a-b)^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 + 3ab^3 =$
 $= (a-b)^4 + 3$~~

~~Обсудим из условия на a , что $a \geq 0$, и из условия на b , что
 $b \leq 0$, т.е. $a \neq 0$ и $b \neq 0$, поэтому~~

Заметим, что если некоторое a подходит под условие, то
 $b = -a$ также подходит под условие, и наоборот. Это
значит, что, если оба числа a, b подходят под свои условия,
то $a + b = 0$.

ОДЗ в терминах a и b : $a \neq 0$; $b \neq 0$. Обсудим, $a = 0$
не подходит под условие и не экв. решением, так что условие
 $a \neq 0$ выполнено. Аналогично, выполнено условие $b \neq 0$.

$xy = 2 \cdot 11^{a+b} = 2$. $xy \neq 0$, так что $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ выполнено.

Ответ: $(xy) \in \{2\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть прямая с угловым коэффициентом -6 , проходящая через точку A , имеет уравнение $y = -6x_1 + C$. Тогда по условию задачи прямая с угловым коэффициентом -6 , проходящая через точку B , имеет уравнение $y_2 = -6x_2 + C + 48$. За C берется некоторая константа. Проверим это условие.

Если A лежит на прямой $y = -6(x - c)$,
то B лежит на прямой $y = -6(x - (c+8))$. Здесь c — некоторая константа.

Вот удача, -6 — ~~какой~~ угловой коэффициент одной пары боковых сторон параллелограмма! Дальше несложно.

~~Любопытно~~ Это означает, что прямые, упомянутые ранее, либо не имеют общих точек с параллелограммом, либо имеют $45+1=46$ общих точек, координаты которых — целые числа. Такие прямые имеют C от 0 до 17 включительно. Не забываем, что $C+8$ тоже от 0 до 17 включительно. Итого есть 10 вариантов значений c — от 0 до 9 включительно, и 10 вариантов пар прямых, на которых соответственно лежат A и B .

На каждой прямой есть 16 точек с целыми координатами. Выбрать пару (A, B) на паре прямых можно $16 \cdot 16 = 256$ способами, выбрать пару прямых — 10 способов, итого $256 \cdot 10 = 2560$.

Ответ: 2560.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

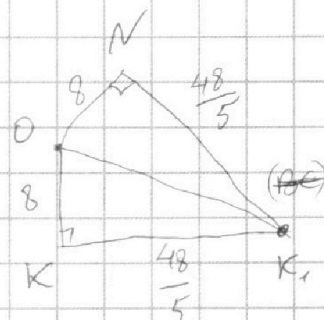
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\angle OK_1K &= \arctg\left(\frac{40}{48}\right) = \arctg\left(\frac{5}{6}\right); \\ \angle OK_1N &= \arctg\left(\frac{5}{6}\right); \\ \angle K_1KN &= 2 \arctg\left(\frac{5}{6}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot \frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}\right) = \\ &= \arctg\left(\frac{60}{11}\right) - \text{искомое}.\end{aligned}$$



Ответ: 1) 8100
2) $\arctg\left(\frac{60}{11}\right)$.

Для задач 1 это 2 и из 2!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$SP = MQ$, $SQ = MP$, $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$; у точек S и M
 равные степенни отн. сферы $\mathcal{D}$. SL кас. $\mathcal{D}$, MK кас. $\mathcal{D}$,
 откуда $SL = MK$. Также $AL = AK$ как отрезки касательных
 из одной точки к сфере. $AS = AM$. $AM = \frac{2}{3} AA_1$,
 $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot (AA_1 \cdot \sin(\angle AA_1 B)) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin(\angle AA_1 B) =$$

$$= 300 \sin(\angle AA_1 B) = 180; \sin(\angle AA_1 B) = \frac{3}{5}$$

5.0.0. $AB \perp AC$, тогда $\cos(\angle AA_1 B) = \frac{4}{5}$; $\cos(\angle AA_1 C) = -\frac{4}{5}$.

По теореме косинусов;

$$CM = 10 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot (-\frac{4}{5})} =$$

$$= 10 \cdot \sqrt{2 + \frac{8}{5}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{10}$$

$$CC_1 = \frac{3}{2} CM = 9\sqrt{10}$$

Аналогично, $BM = 10 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{4}{5}} = 10 \sqrt{\frac{2}{5}} = 2\sqrt{10}$, $BB_1 = 3\sqrt{10}$.

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 30 \cdot 27 \cdot 10 = 8100.$$

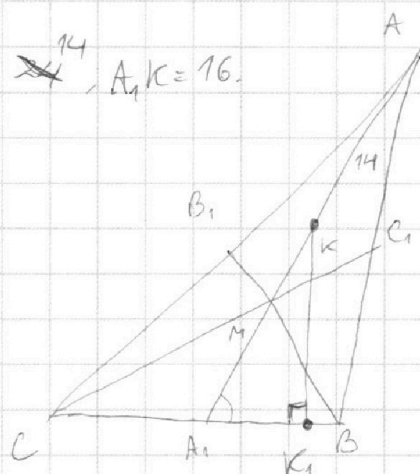
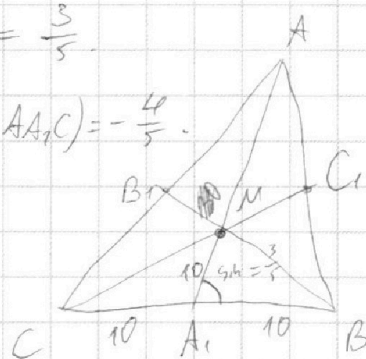
$$SN = 6; SL = 6; AL = 14; AK = 14; A_1K = 16.$$

KK_1 — перпендикуляр к BC ,

$$KK_1 = KA_1 \cdot \sin(\angle AA_1 B) = \frac{48}{5}$$

$$K_1N = KK_1 = \frac{48}{5}$$

Сфера $\mathcal{D}$ вписана в двугранный угол при
 ребре BC , значит, $K_1N \perp BC$,
 и точки K, K_1, N, O (O — центр сферы) лежат
 в одной плоскости.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix}; \quad b = \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix}; \quad c = \begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 13 \\ 21 \\ 25 \end{matrix}$$



$$2, \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

$$4? \quad 2? \quad 12?$$

$$\geq 29, 30$$

$$9 \quad 5 \quad 17$$

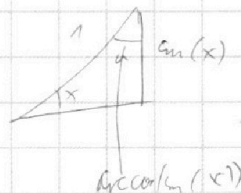
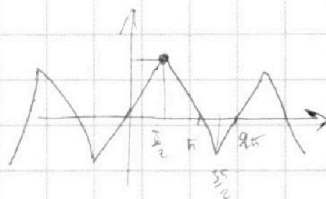
$$\geq 29, 30$$

$$15 \quad 13$$

$$10 \arccos(\sin(x)) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(a) + \arccos(a) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin(x)) =$$



10 arcsin

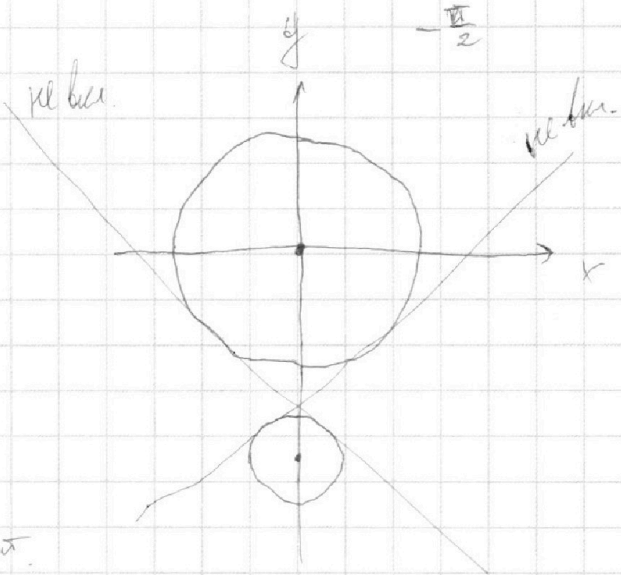
$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))\right) = 9\pi - 2x$$

$$-10 \arcsin(x) = 4\pi - 2x$$

$$\arcsin(x) = \frac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$$x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$$



$$5\pi - 5x = x - 2\pi; \quad 6x = 7\pi; \quad x = \frac{7}{6}\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_{11}(x))^4 - 6 \log_{11}(11) = \log_{x^3}(\frac{1}{121}) - 5$$

$$(\log_{11}(x))^4 - 6 (\log_{11}(x))^{-1} = -2 \cdot (3 \log_{11}(x))^{-1} - 5$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a$$

$$3a^5 - 18 + 2 + 15a = 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$3a(a^4 + 5) = 16$$

возрастает

$$\frac{b}{3}$$

$$\log_{x^3}(\frac{1}{121}) =$$

$$= \frac{\ln(\frac{1}{121})}{\ln(x^3)} =$$

$$= \frac{-2 \ln(11)}{3 \ln(x)} = -\frac{2}{3 \log_{11}(x)}$$

$$(\log_{11}(asy))^4 + \log_{asy}(11) = \log_{(asy)^3}(\frac{1}{11}) - 5$$

$$(\log_{11}(asy))^4 + (\log_{11}(asy))^{-1} = -13 (\log_{11}(asy))^{-1} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b$$

$$3b^5 + 1 + 14 + 15b = 0$$

$$3b^5 + 15b + 15 = 0$$

$$3b^5 + 15b + 15 = 0$$

$$3b^5 + 3 + 13 + 15b = 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$3a^3b - 5a^2b^2 + 3ab^3$$

$$3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 29$$

$$3(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 5) = 29$$

$$3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$+ a^2b^2$$



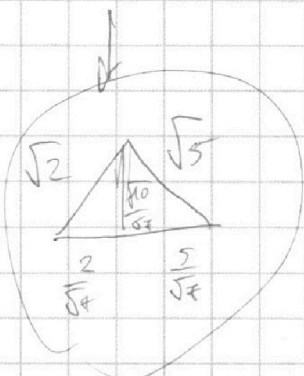
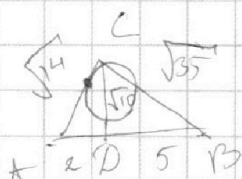
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

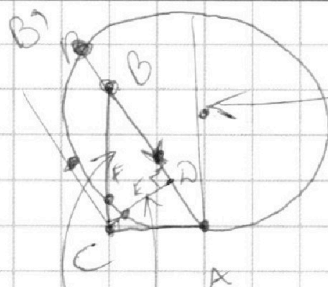
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 118 \\ \times 3 \\ \hline 336 \end{array}$$



$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$x=0; y=R \pm \sqrt{R^2-2}$$

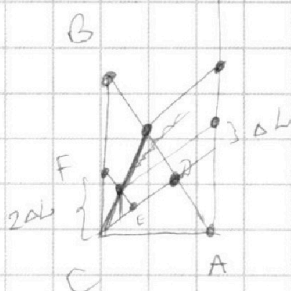
$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x; x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}Rx = 0;$$

$$\left(1 + \frac{2}{5}\right)x^2 + \left(-2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}R\right)x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 2\sqrt{10}(\sqrt{5}+R)x + 10 = 0$$

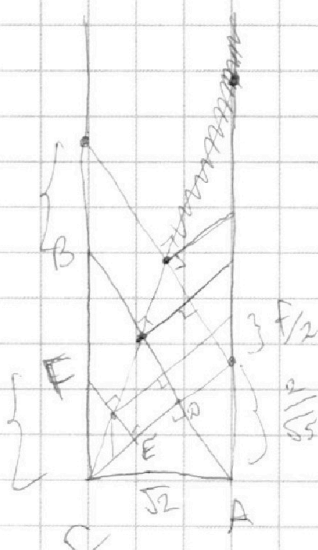
$$x = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10}R \pm \sqrt{10(R^2 + 10R + 10)}}{2}$$

$$x = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10}R \pm \sqrt{10(R^2 + 10R + 10)}}{2}$$



$$\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$5\sqrt{2} - \sqrt{10}R - \sqrt{10R^2 + 100R + 100} + 180$$



$$F = 0 \sqrt{14}$$

$$L = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$F = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$L = \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

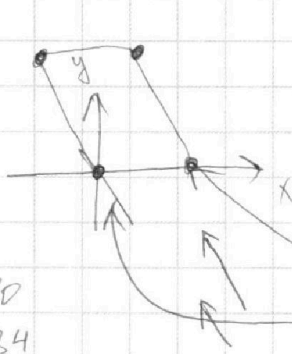
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^5 + 5a + 1.5 + 5b + 3.5 - 1.5 - 0.5 - 1.5$$



$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

$$\Delta y \in [-90; 90]$$

$$6x_1 + y_1 = 0$$

$$6x_1 + y_1 = 78$$

$$y_2 = -\frac{1}{6}(x_2 - 18)$$

$$-7; 30$$

$$-6; 84$$

$$0; 48$$

$$8; 0$$

$$23; -90$$

$$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1 + 48$$

$$\begin{array}{r} 538 \\ \times 4 \\ \hline 2152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 4 \\ \hline 256 \\ + 448 \\ \hline 538 \end{array}$$

Если Алехна $y = -6x + C$, то

Валехна $y = -6x + (C + 48)$.

$$y = -6(x - c)$$

$$y = -6(x - (c + 8))$$

$$(-6x; -6(x - 8)) - 16^2 \text{ верхов}$$

$$(-6(x - 1)) - 6(x - 9) - 16^2$$

$$(14 - \sqrt{14}x)(-5) =$$

$$= (4 + 2\sqrt{5}x)(\frac{1}{5})$$

$$(-6(x - 7); -6(x - 12)) - 16^2 = 2560?$$

$$14 - \sqrt{14}x = 2\sqrt{5}x - 4;$$

$$x(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}}) = 18; x = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{10}}$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{10})}{7 - 10} = \frac{9\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{10})}{-3} = -3\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{10})$$