МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

a, b, c – натуральные

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}7^{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \vdots 2^{14} \\ bc \vdots 2^{17} \\ ac \vdots 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac \vdots 2^{51} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} \Rightarrow abc \vdots 2^{26}$, ведь a, b, c – нат.

Раз $ac \vdots 7^{37}$ и b – натуральное, то $abc \vdots 7^{37}$

Значит $\begin{cases} abc \vdots 2^{26} \\ abc \vdots 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc \vdots 2^{26}7^{37}$

Тогда $abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

Пример: $a = 7^{20}\cdot 2^{9}$, $b = 2^{6}$, $c = 7^{17}\cdot 2^{11}$

$ab = 7^{20}\cdot 2^{15}$ и $2^{15}7^{20} \vdots 2^{14}7^{10}$

$bc = 7^{17}2^{17}$ и $2^{17}7^{17} \vdots 2^{17}7^{17}$

$ac = 7^{37}2^{20}$ и $2^{20}7^{37} \vdots 2^{20}7^{37}$

$abc = 2^{26}7^{37}$

Значит пример верен и $abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

Ответ: $abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

Раз $\frac{a}{b}$ – несократимая дробь, то $(a;b)=1$

Если мы можем сократить числитель и знаменатель

на m значит $\begin{cases} a+b \,\vdots\, m \\ a^2-6ab+b^2 \,\vdots\, m \end{cases}$

$a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab$

Если $a+b \,\vdots\, m \Rightarrow (a+b)^2 \,\vdots\, m$, тогда $8ab \,\vdots\, m$

Если $(a;m)\neq 1$, то пусть $(a;m)=k$, где $k>1$

Тогда раз $a \,\vdots\, k$ и $m \,\vdots\, k$ и $a+b \,\vdots\, m \Rightarrow a+b \,\vdots\, k \Rightarrow b \,\vdots\, k$,

значит $(a;b)=k$ или больше, а у нас $(a;b)=1$ противоречие

значит $(a;m)=1$

Аналогичными рассуждениями получим $(b;m)=1$, тогда

$(ab;m)=1$, а раз $8ab \,\vdots\, m$, то $m_{max}=8$

Пример для $m=8$, $a=1\cancel{3}$, $b=7$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{1+7}{1-42+49}=\frac{8}{8}=\frac{1}{1}=1$$

Ответ: $m_{max}=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

$$\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)=$$

$$=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x$$

Значит $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

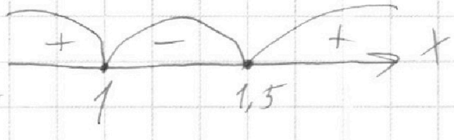
Заметим что если хоть одно из подкоренных чисел больше 1, то второе не отриц. значит их сумма больше одного.

Тогда $\begin{cases} 0\le 2x^2-5x+3\le 1 \\ 0\le 2x^2+2x+1\le 1 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1)\ 0\le 2x^2-5x+3 \\ 2)\ 2x^2-5x+2\le 0 \\ 3)\ 0\le 2x^2+2x+1 \\ 4)\ 2x^2+2x\le 0 \end{cases}$$

1) $D=25-24=1$



$x_1=\frac{5+1}{4}=1{,}5$

$x_2=\frac{5-1}{4}=1$

$x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$

2) $D=25-16=9$

Продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

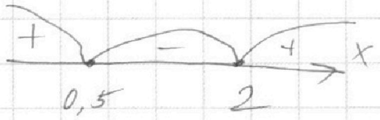
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$X_1 = \frac{5+3}{4} = 2$

$X_2 = \frac{5-3}{4} = 0{,}5$



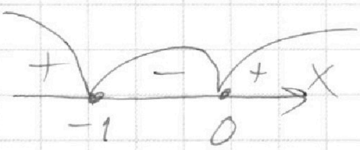
$x \in [0{,}5; 2]$

3) $D = 4 - 8 = -4 < 0$, это парабола ветвями вверх, значит при любом x, выражение положительное

4) $D = 4$

$x_1 = \frac{-2+2}{4} = 0$

$x_2 = \frac{-2-2}{4} = -1$



$x \in [-1; 0]$

Тогда $\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1{,}5; +\infty) \\ x \in [0{,}5; 2] \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in \varnothing$

Ответ: $x \in \varnothing$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

Давайте зафиксируем сумму $2x_2 + y_2$ и обозначим за z.

Тогда.

$y_2 = z - 2x_2$, это прямая $y = -2x$, смещённая на z вверх.

$y_1 = z - 12 - 2x_1$, это прямая $y = -2x$, смещённая на $z - 12$ вверх

Заметим что для любого знач. из прям. зав. y_1 от x_1 и любого y_2 от x_2, для одного z ~~условие~~ урав. выполн.

Напишем уравнение для прямой QR

$y = kx + b$ $\quad Q(3;24)$; $R(15;0)$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} - \Rightarrow 24 = -12k \Rightarrow k = -2$$

$24 = -6 + b \Rightarrow b = 30$

Тогда прямая QR паралельна прямым зависимости y_2 от x_2 и y_1 от x_1.

Заметим что z_{max} достигается когда прямая зависимости y_2 от x_2 это QR.

продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $z_{max} = 6 = 30$

Раз PQRO параллелограмм, то PO ∥ OR, тогда заметим что z_{min} достигается когда прямая зависимости y_1 от x_1 это PO, тогда $z_{min} - 12 = 0 \Rightarrow z_{min} = 12$

Заметим что если z – чётное, то x_2 может принимат 13 вариантов целых в любом случае и x_1 тоже 13.

Если z – нечётное, то x_2 может принимать лишь 12 вариантов целых и x_1 тоже 12.

Чётных z всего 10, а нечётных z всего 9.

Тогда всего вариантов $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

Ответ: $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 a,b,c - нат.

$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc \vdots 2^{26} \Rightarrow abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}7^{64}$ $\quad abc \vdots 7^{37}$

Пример: $c = 7^{17} \cdot 2^{11}$, $a = 7^{20} \cdot 2^{9}$, $b = 2^{5}$

$15 \cdot 6 = 90$ $\quad \frac{35}{8}$ $\quad 9 - 90 + 15$ $\quad 8^2 - 8$

N2 $\frac{a}{b}$ - несок. $a \in N$, $b \in N$ $\quad \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$ $\quad (a;b)=1$ $\quad a+b \vdots m$, $(a+b)^2 \vdots m$, $8ab \vdots m$, $m_{max} = 8$ $\quad 1, 7$ $\quad \frac{8}{64 - 87}$

N3  $R_\omega = 1$, $R_\Omega = 5$

$[\frac{1}{2}; 2]$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$
$x \in [-1; 0]$
$x \in \emptyset$

N4 $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$\cancel{2x^2 - 5x}\ 2 - 7x$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$1 \geq 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
$1 \geq 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

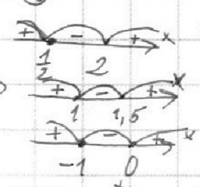
$\begin{cases} 0 \geq 2x^2 - 5x + 2 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 0 \geq 2x^2 + 2x \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{13}{8}$ $\quad 16^2 - 3 \cdot 13 \cdot 8$ $\quad 16 \cdot 2$ $\quad 32$ $\quad D = 4$ $\quad \frac{-2 \pm 2}{4}$

$D = 25 - 16 = 9$ $\quad \frac{5 \pm 3}{4} = 0,5;\ 2$

$D = 25 - 24 = 1$ $\quad \frac{5 \pm 1}{4}$ $\quad 1,5$; 1

$D = 4 - 8 < 0$

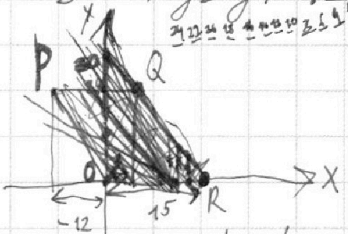


$a:k$ $\quad m:k \Rightarrow b:k$

N5 $O(0;0)$ $\quad Q(3;24)$
$P(-12;24)$ $\quad R(15;0)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$(15;0)$ $\quad 3;2$ $\quad 3;0$
$2\Delta x + \Delta y = 12$ $\quad \Delta y = 12 - 2\Delta x$
$\Delta x \leq 15$
$\Delta y \leq 24$



$(9;6) \to (3;0)$
$(2;2)$
$(1;4)$
$(0;6)$
$(-1;8)$
$(-2;10)$

$x_2 y_2$ - const

$y_1 = const - 2x_1 - 12$

Это прямая $y = -2x$ смещ. на $const - 12$

$30 = const$ $\quad y = kx + b$
$24 = 3k + b$
$0 = 15k + b$
$k = -2$ $\quad b = 30$

12 целых пар. 0 до 30 $\boxed{16}$

$30 \geq const - 12 \geq 0$

$18 \geq const - 12 \geq 0$

$12 \cdot 10 = 1440$

$2x_2 + y_2 = const$

$y_2 = -2x_2 + const$

30 → 18
28 → 16
26 → 14
24 → 12
22 → 10
20 → 8
18 → 6
16 → 4
14 → 2
12 → 0

6 Если $(a;m) \neq 1 \Rightarrow$

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$

N6 2 решения

$(a;m) = 1$
$(b;m) = 1$ $\quad y = ax + 10b$

$((x+8)^2 + (ax + 10b)^2 - 1)(x^2 + (ax + 10b)^2 - 4) \leq 0$

$\wedge 0$ $\quad \vee 0$

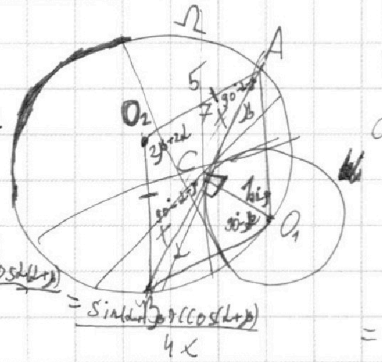
$x^2 + 8x + 16x$

$\begin{cases} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \end{cases}$

$68 + 16x \geq 1$
$16x \geq -67$
$x \geq -\frac{67}{16}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$68 + 16x \leq 1$
$x \leq -\frac{67}{16}$



$\frac{\sin(90° - \alpha - \beta)}{5} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{5}$

$\frac{\sin 2(\beta + \alpha)}{8x} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{8x} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{4x}$

$\frac{\cos^2\beta + \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2(90° - \beta) + \cos^2\beta\,(49x^2 + 1)}{7x \quad 49x^2}$

$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{x}$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha =$

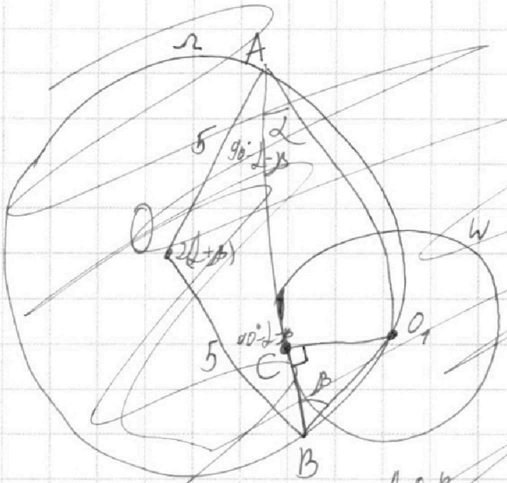
$(1 + 49x^2)\sin^2\beta = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано $R_\Omega = 5$, $R_w = 1$, $AC:CB = 7:$

Найти: AB

Решение:

~~Обозначим~~ $\angle BAO_1$ за α а $\angle ABO_1$ за β

Тогда ~~Обозначим~~ $\angle AOB$ за $2(\alpha+\beta)$

$AO = OB = R_\Omega = 5$.

$\triangle AOB$ равнобедренный (по определению)

$\angle OAB = \angle ABO$ (по свойству равнобедренного треугольника)

$\angle OAB + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$ (по сумме углов в треугольнике)

Тогда $\angle OAB = \angle ABO = 90^\circ - \alpha - \beta$

По теореме синусов: в $\triangle OAB$ $\frac{AB}{\sin 2(\alpha+\beta)} = \frac{OB}{\sin(90^\circ-\alpha-\beta)} = \frac{5}{\sin(90-\alpha-\beta)} = \frac{5}{\cos(\alpha+\beta)}$

$\sin 2(\alpha+\beta) = 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$

$AB = \frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)5}{\cos(\alpha+\beta)} = 10\sin(\alpha+\beta)$

~~По теореме синусов:~~ $\cancel{\frac{\sin\beta}{O_1C}} =$

$O_1C \perp AB$ (по свойству касательной)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ