



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черковик

1) $ab : (2^{19} \cdot 7^{10})$ Тогда $a : (2^{x_1} \cdot 7^{y_1}), b : (2^{x_2} \cdot 7^{y_2}), c : (2^{x_3} \cdot 7^{y_3})$

2) $bc : (2^{17} \cdot 7^{12})$ где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3) $ac : (2^{20} \cdot 7^{32})$ Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \\ y_3 - y_1 = 2 \end{cases}$

из 2) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = 3 \\ y_3 - y_2 = 20 \end{cases}$ из 1) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = 6 \\ y_3 - y_2 = 22 \end{cases}$

Следован основани на отмени степеней различных букв лог. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $3+5$ ab $14 + 3k = 6$

Система на "иски": $\begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \Rightarrow x_3 = x_1 + 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 - x_2 = 6 \text{ (подставим } x_3) \Rightarrow (x_1 + 3) - x_2 = 6 \end{cases}$

Получим $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3 - x_2 = 6 \end{cases}$ - равносильное $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5$

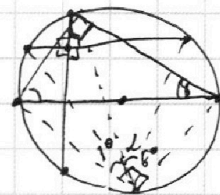
Система на "иски": $\begin{cases} y_3 - y_1 = 2 \Rightarrow y_3 = y_1 + 2 \\ y_1 - y_2 = 20 \\ y_3 - y_2 = 22 \Rightarrow y_1 + 2 - y_2 = 22 \end{cases}$ - равносильное

Вещо: $x_1 + x_2 = 14, y_1 + y_2 = 10, x_2 + x_3 = 17, y_2 + y_3 = 17,$

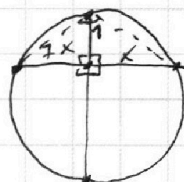
$x_1 + x_3 = 20, y_1 + y_3 = 37$ $\frac{1}{2} \times y \sin \alpha$

~~$x_2 = 14 - x_2$~~ 1. $x_1 = 14 - x_2, x_3 = 17 - x_2 \Rightarrow 14 - x_2 + 17 - x_2 = 20; \sqrt{3}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \\ x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_3 = 20 \end{cases}$ $x_3 - x_1 \geq 3 \Rightarrow x_3 \geq 23;$
 $x_3 + x_1 \geq 20 \Rightarrow x_3 \geq 11,5$



$S_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{49x^2 + 11}) (\sqrt{2x^2 + 1}) \sin \alpha$



$\sqrt{7x^2} = 1;$

$S_1 = 1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \sin \alpha$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a^2 - 8ab + b^2 \div \frac{(a+b)}{k}$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 8\}$, тогда

найдем минимальное k , чтобы выполнялась делимость.

$$\frac{(a+b)}{k} \cdot t = a^2 - 8ab + b^2;$$

$$\frac{(a+b)t}{k} = a^2 + 2ab + b^2 - 8ab;$$

$$\frac{(a+b)t}{k} = (a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab = (a+b) \left(a+b - \frac{t}{k} \right) \text{ - ищем макс } \left(\frac{t}{k} \right)^{\text{max}}$$

$$\frac{(a+b)}{2} \div a, \frac{(a+b)}{2} \div b \Rightarrow \left(a+b - \frac{t}{k} \right) \div ab$$

Заметим в виде $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$, пусть $(a+b) \div m$,

тогда $(a+b)^2 \div m$, найдем может ли $ab \div m$,

иначе $(a+b)^2 - 8ab \div m$. Пусть m содерж. в делителях a

и b , но такого не может быть, т.к. ab - взаимнопростые.

Пусть содерж. или в " a^2 ", или в " b^2 ", но тогда $(a+b) \div m$ - кратн. ие.

Пусть какая то часть делителей m содерж. в " a^2 ", а какая то в " b^2 ",

но тогда \nexists какой-нибудь делитель из делителей m в " a^2 " и " b^2 ",

он или в одном, но не в другом $\Rightarrow (a+b) \div m$ - кратн. ие.

Значит m может быть только делителем 8, $\Rightarrow m=8$. Ответ: $m=8$.

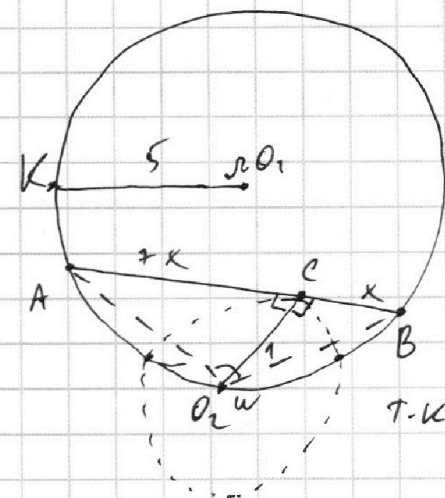
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: окр. ω и окр. Ω ,

$$AC : CB = 7, r(\omega) = 7, r(\Omega) = 5$$

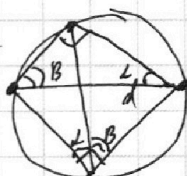
Найти: $AB = ??$

Решение: 1. Пусть $AC = 7k, CB = k,$

т.к. окр. ω кас. $AB \Rightarrow O_2C \perp AB$.

2. По (1) об отношении хорды и диаметра в окр-ти:

$$d = \frac{AB}{\sin \alpha}, \text{ др. джк-ва}$$



d - диаметр, α, β - оги
($\alpha + \beta = 90^\circ$)

Произвольно разделим $\angle 90$ - на α и β , соединив α и β и
углом окр. с α -ым диаметром снова получим \triangle ,

т.к. окр. на диаметр, его стороны (хорды равны соответв.

$d \sin \alpha$ и $d \sin \beta$). Теперь используем, пусть $\angle A O_2 B = \alpha \Rightarrow$

$$AB = 10 \sin \alpha.$$

$$\triangle A O_2 B : \begin{cases} S_{A O_2 B} = \frac{1}{2} AB \cdot CO_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \sin \alpha \cdot 1 \\ S_{A O_2 B} = \frac{1}{2} \cdot AO_2 \cdot BO_2 \sin \alpha \end{cases}$$

$$5 \sin \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{49x^2+1}) (\sqrt{x^2+1}) \sin \alpha;$$

$$10 = \sqrt{49x^2+1} \sqrt{x^2+1};$$

$$100 = (49x^2+1)(x^2+1) \quad \text{Пусть } x^2 = t, \text{ тогда}$$

$$100 = (49t+1)(t+1); \quad 49t^2 + 50t + 1 - 100 = 0;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение -3.

ОДЗ:

$$49t^2 + 150t - 99 = 0;$$

$$t > 0, 4 > 0$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{50}{49}$$

$$t_1 \cdot t_2 = -\frac{99}{49}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{t} = 1$$

$$t_2 = -\frac{99}{49}$$

$$AB = 8x \Rightarrow AB = 8.$$

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 - продолжение

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{47}$$

1. Проверим выполнимость $7x - 1 \geq 0$

$\sqrt{61} \approx 8$ (точно лежит между 7 и 8 т.к. $49 < 61 < 64$)

$$1) \frac{11 + 16}{47} = \frac{27}{47} \quad 7 \cdot \frac{27}{47} - 1 \geq 0 \text{ - верно}$$

$$7 \cdot \frac{11 - 16}{47} - 1 > 0 \text{ - неверно.}$$

2. Проверим $c + \sqrt{b} \geq 0$:

$$2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0, \text{ где } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{47}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq (7x - 2)^2 \\ 7x - 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow 47x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 47 \cdot 3}}{2 \cdot 47} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$$

$$\sqrt{336} \text{ - лежит между } 18 \text{ и } 19 \Rightarrow x_1 \approx \frac{30 + 18}{94} = \frac{48}{94}$$

$$x_2 \approx \frac{30 - 18}{94} = \frac{12}{94}$$

$$x \in \left(\frac{12}{94}; \frac{48}{94} \right)$$

Поэтому, что $\frac{11 + 2\sqrt{61}}{47} > \frac{30 - \sqrt{336}}{94}$, осталось проверить

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{47} \leq \frac{30 + \sqrt{336}}{94} \quad \text{но } \frac{25}{47} > \frac{49}{94} \quad \left(\frac{50}{47} > \frac{98}{94} \right)$$

$$\left(\frac{25}{47}; \frac{27}{47} \right)$$

$$\left(\frac{45}{94}; \frac{49}{94} \right)$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{47} \text{ - не подходит}$$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x;$$

~~Заметим $(2x^2 - 5x + 3) + (2 - 7x) = (2x^2 + 2x + 1)$.~~

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 = (2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x)$

Пусть $2x^2 + 2x + 1 = b$; $2 - 7x = c$, тогда

$$\sqrt{b+c} - \sqrt{b} = c;$$

$$\sqrt{b+c} = c + \sqrt{b};$$

$$\begin{cases} \sqrt{b+c} = c + \sqrt{b}; \\ c + \sqrt{b} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = c^2 + 2c\sqrt{b} + b; \\ c^2 - c + 2c\sqrt{b} = 0; \\ c(c - 1 + 2\sqrt{b}) = 0; \end{cases}$$

- $c = 0$ ($c + \sqrt{b}$ - константа)
- $c - 1 + 2\sqrt{b} = 0;$
 $c = 1 - 2\sqrt{b}$

1. $c = 0 \Rightarrow 2 - 7x = 0;$
 $2 = 7x;$
 $x = \frac{2}{7}$

Нужно убедиться только в $b \geq 0$, так $\sqrt{b+c}$, из $c = 0 \Rightarrow \sqrt{b}$.

для $2x^2 + 2x + 1$, $\begin{cases} D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0 \Rightarrow b > 0 \forall x \in \mathbb{R}. \\ a > 0 (2 > 0) \end{cases}$

2. $c = 1 - 2\sqrt{b} \Rightarrow (2 - 7x) = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1};$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1;$$

$$\begin{cases} 4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1 \Rightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0; \\ 7x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3}}{2 \cdot 41};$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm 4\sqrt{67}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{67}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что от a зависит \angle наклона прямой.

а) Найдем a , когда прямая касается окр. $r=1$

б) Π полуокр., а окр. $r=2$ во Π полуокр. z и оставшиеся 3 пары точек Π -ий.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ ax + 10b = y \end{cases} \Rightarrow 10x + 6y =$$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 4 \\ ax_1 + 10b = y_1 \\ (x_2+1)^2 + y_2^2 = 1 \\ ax_2 + 10b = y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax_1^2 + 10b - x_1^2 = y_1 \\ ax_1^2 + 10b = \sqrt{4 - x_1^2} \\ a\sqrt{4 - y_1^2} + 10b = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_2^2 + 10b = \sqrt{1 - (x_2+1)^2} \end{cases}$$

$$1. ax_1^2 - \sqrt{4 - x_1^2} + 10b = 0;$$

$$2. ax_2^2 + \sqrt{1 - (x_2+1)^2} + 10b = 0;$$

Существует всего 4 значения a удовлетворяющие условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$2x^2 + 4x + 1$$

$$900 \quad 336 \overline{) 3}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-1) \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$2x^2 + 2x + 1 =$$

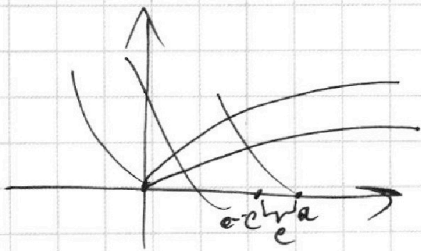
$$x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\sqrt{b+c} - \sqrt{b} = c$$

$$\begin{array}{r} 14 \text{ кн} \\ 25 \\ \hline 41 \end{array}$$



$$90 + 87$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ \times 19 \quad 7 \\ \hline 377 \\ + 79 \\ \hline 301 \quad 27 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$b+c = (c+\sqrt{b})^2;$$

$$b+c = c^2 + 2c\sqrt{b} + b;$$

$$c = c^2 + 2c\sqrt{b};$$

$$c^2 - c + 2c\sqrt{b} = 0;$$

$$\frac{98}{94} \approx 1,05 \quad c(c-1+2\sqrt{b}) = 0;$$

$$c - 1 + 2\sqrt{b} = 0;$$

$$\frac{50}{41} \approx 1,25 \quad c = 1 - 2\sqrt{b}$$

$$\left(\frac{25}{41}; \frac{27}{41}\right)$$

$$\left(\frac{48}{94}; \frac{49}{94}\right)$$

$$2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 4x + 1};$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 4x + 1} \dots$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 4x + 1} \dots$$

$$\begin{array}{r} 47 \quad 2 \\ \underline{4} \\ 188 \quad 22 \\ \hline 564 \end{array}$$

$$112$$

$$11 + 16$$

$$\begin{array}{r} 27 \quad 7 \\ \underline{41} \end{array}$$

$$56$$

$$7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 16 \quad 3 \\ \hline 196 \\ \hline 286 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 286 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 286 \quad 3 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 52 \end{array}$$

$$\sqrt{b+c} - \sqrt{b} = c;$$

$$(b+c) + b - 2\sqrt{(b+c)b} = c^2;$$

$$2b+c-c^2 = 2\sqrt{(b+c)b};$$

$$\begin{array}{r} 488 \quad 21 \\ \hline 986 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ + 22 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ 122 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \quad 2 \\ \hline 488 \end{array}$$

$$22 + 4 \cdot 47 \cdot 3$$

$$169 \quad 1$$

$$\begin{array}{r} 169 \quad 1 \\ \hline 492 \end{array}$$

22