



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Найдите наименьшую степень входящие в abc .

$$ab : 2^{14}; \quad bc : 2^{17}; \quad ac : 2^{20} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$$

Но $a^2 b^2 c^2$ - квадрат \Rightarrow степени входящие четны $\Rightarrow abc : 2^{26}$

Заметьте, что это достигается при $a = a_1 \cdot 2^8$, $b = b_1 \cdot 2^6$, $c = c_1 \cdot 2^{12}$, где $a_1, b_1, c_1 \not\div 2$. $8+6 \geq 14$; $6+12 \geq 17$; $8+12 \geq 20$.

2) Найдите наименьшую степень входящие в abc .

Заметьте, что раз $ac : 7^{37}$, то и $abc : 7^{37}$.

Это достигается при $a = a_1 \cdot 7^{20}$, $b = b_1$, $c = 7^{17} c_1$,

где $a_1, b_1, c_1 \not\div 7$.

3) Т.е. $abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$ и оно достигается при

$$a = 2^{20} \cdot 2^8 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

, причём все условия выполнены

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\frac{a}{b}$ - несократима, $\Rightarrow (a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, чтобы сократить на m , нужно

$\text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2) = m$

2) $(a+b; a^2-6ab+b^2) = (a+b; \overset{-8ab}{+4ab}) = (a+b; 8ab)$

Заметим, что $(a+b, ab) = 1$, т.к. $(a, b) = 1$

$(a+b, ab) = (a+b, a^2)$ или же $(a+b, ab) = (a+b, b^2)$

$\Rightarrow (a+b, ab) \mid (a^2, b^2) = 1$

3) $\Rightarrow (a+b, 8ab) = (a+b, 8)$, т.е. $m = 8$.

4) Заметим, что такое m достигается при $a = 1$ и $b = 7$

$\frac{1+7}{1^2-6 \cdot 1 \cdot 7+7^2} = \frac{8}{1-6 \cdot 7+49} = \frac{8}{8} = 1$

Ответ: $m = 8$

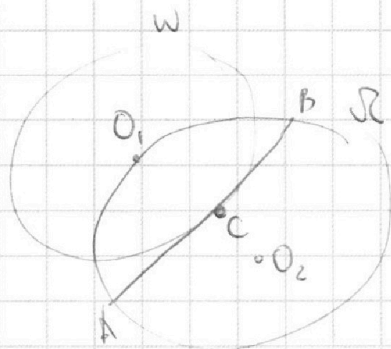
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC : CB = 7 : 1$$

$$O_1 \in \Omega$$

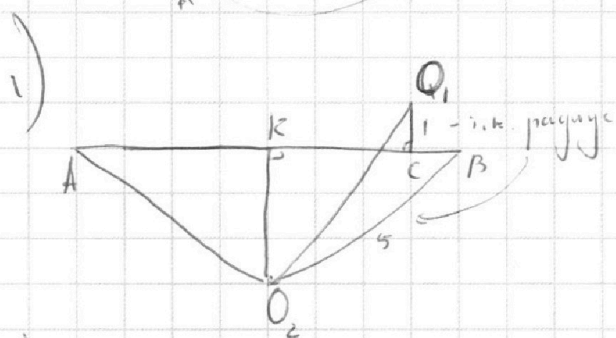
AB - хорда Ω и касательная к ω в A

O_1, O_2 - центры ω и Ω

$O_1 C \perp AB$, т.к. AB - касательная

$O_2 K$ - перпендикуляр к AB.

т.к. O_2 центр, а AB хорда, то $AK = KB$.



2) Заметим, что если $AC = 7k$, то $CB = k$, а $AK = KB = 4k$, $\Rightarrow KC = 3k$.

Пусть $KO_2 = x$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 25 \cdot 4^2 - x^2$; $KC^2 = O_2O_1^2 - (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{25 - x^2}{4^2} = \frac{25 - (x+1)^2}{3^2} \quad \text{из соотношения 4, 3}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 25 - 9x^2 = 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x - 16$$

$$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25 = 0$$

По т. Виета подходит $x = 3$ и $x = -\frac{53}{7}$, но $x > 0$, т.к. радиус

$\Omega >$ радиуса ω . $\Rightarrow x = 3$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 4^2$

$$\Rightarrow AB = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$
$$\left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) =$$
$$= (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)$$

$$\Rightarrow 2 - 7x = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)$$

$$x = \frac{2}{7} \quad \text{или} \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\text{Заметим} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что у $2x^2 + 2x + 1 = 0$ нет решений А.И.В.к. ~~в действительности~~

$$\text{т.к. } a=2 \quad b=2 \quad c=1, \Rightarrow D = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$$

2) Допустим $x = \frac{2}{7}$. Проверим что подходит

$$2 - 7x = \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)$$

у $2 - 7x$ есть решение, у $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ нет такого

решения, \Rightarrow у $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ есть такое решение.

$$\Rightarrow \text{оно подходит. Или же } 2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1, \text{ что верно}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

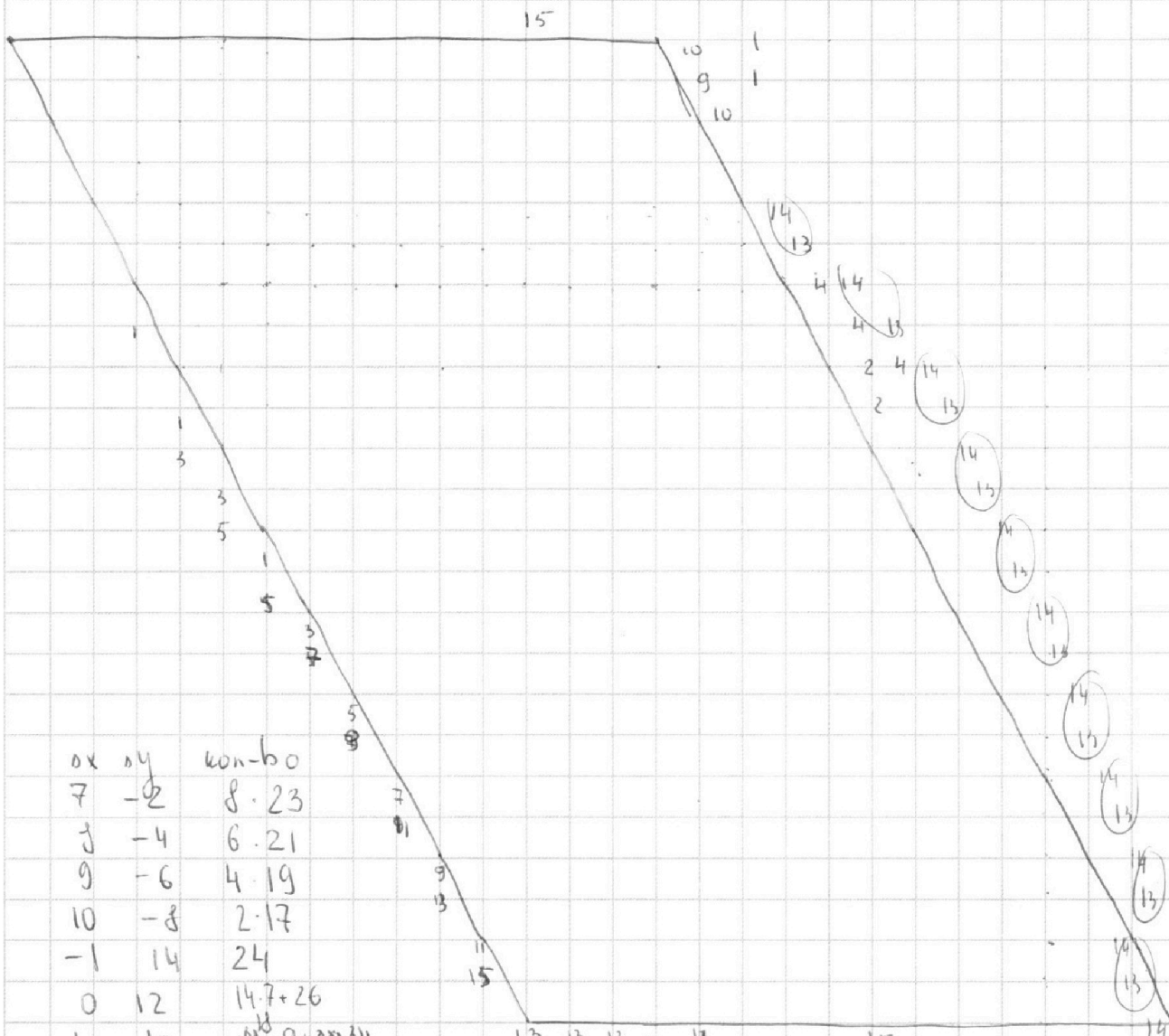
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ox	oy	кон-во
7	-2	8 · 23
3	-4	6 · 21
9	-6	4 · 19
10	-8	2 · 17
-1	14	24
0	12	14 · 7 + 26
1	10	18 · 9 + 30 · 34
2	8	22 · 11 + 42
3	6	26 · 13 + 50
4	4	14 · 4 + 12 · 12
5	2	12 · 12 + 11 · 10
6	0	10 · 13 + 9 · 12

Для каждого случая мы
берем в них и считаем
сумму по Σ .

В итоге мы получим суммарное кол-во написанное в
таблице
Т.к. у нас просто нет, как и вышло это по порядку,
и вы сами увидите

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим как должны относительно друг друга располагаться $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ чтобы $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

а) ~~Рассмотрим~~ ~~A лежит~~ Если A лежит выше и левее B, то

тогда $x_2 - x_1 < 0$ и $y_2 - y_1 < 0$, ~~тогда~~ $\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) < 0 \neq 12$.

б) Если A лежит выше B и правее:

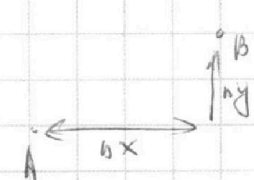


Если $|y_2 - y_1| \geq 8$ то

Δx	Δy
7	-2
8	-4
9	-6
10	-8
11	-9

Больше чем 10; ~~-8~~ y_1 и y_2 не входят в ппм

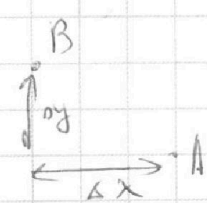
в) Если A лежит ниже B и левее:



Пара больше чем -1; 14 y_1 и y_2 не входят в ппм

Δx	Δy
-1	14
-2	18

г) Если A лежит ниже и правее B.



Других пар точек перекрывающихся в ппм не существует

Δx	Δy
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2
6	0

2) Нарисовать ппм и посчитать количество пар для каждого вида

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

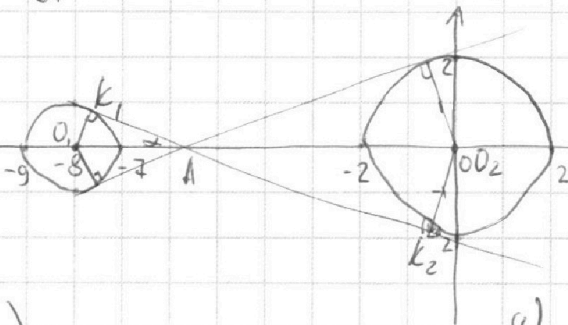
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ (x+8)^2 + y^2 - 1(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Решим графическим способом. Заметим что $ax - y + 10b = 0$ — уравнение прямой, а $(x+8)^2 + y^2 - 1$ и $x^2 + y^2 - 4$ — уравнения окружностей



Изобразим эти окружности. Если вписать окружность (2) необходимо чтобы точка касания ^{лежала} в одной из окружностей. Т.к. окружности не пересекаются, все точки касания и будут подходить

2) Заметим, что если прямая не касается ни одной из окружностей, то решений 0. Если она проходит через какую-либо из окружностей, то k подходит все точки на отрезке O_1O_2 . Т.е. прямые касаются окружностей в двух точках и будут общей касательной.

Общих касательных 2.

$$\begin{aligned} O_1 A K_1 O_1 &\sim A K_2 O_2 \\ \Rightarrow \frac{O_1 A}{O_2 A} &= \frac{K_1 O_1}{K_2 O_2} \end{aligned}$$

Мы знаем, что $O_1 O_2 = 8$,
 $\Rightarrow A O_1 A = \frac{8}{3}$

3) $a = \pm \operatorname{tg} \alpha$, т.к. это координаты касания прямой

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ из } \triangle A K_1 O_1$$

$$\Rightarrow a = \pm \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(\frac{3}{8} \right) \right)$$

Ответ: $a = \pm \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(\frac{3}{8} \right) \right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6

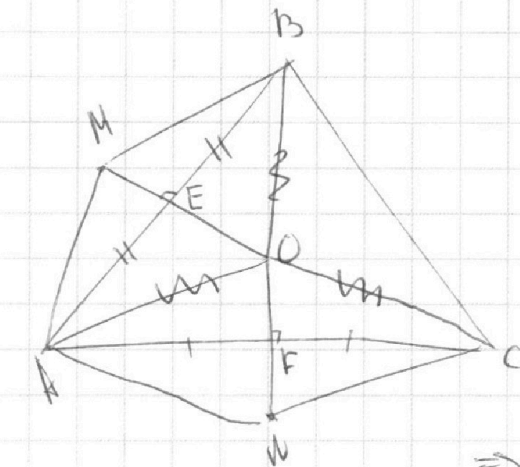


7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O - центр описанной окружности, то точка пересечения середин

2) Т.к. M, N середины дуг, то

$$MB = MA \text{ и } NA = NC$$

\Rightarrow высота, опущенная из них

падает на середину и является его продолжением

3) Заметим, что $OM = OC = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$ $NF = 2$

5) Т.к. $OM = ON$, то $OF + NF = ME + EO$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



③ $y = ax + 10b$



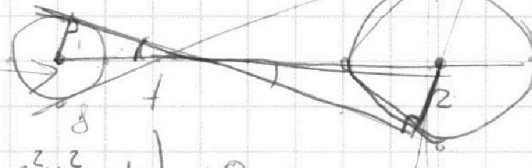
т.к. отрицательное, то либо b отриц.

$y = ax$
 $b = 0 \quad y = 0$

либо нуле, либо отрицат.

при нуле a - ?

b = 0 как ускорит?



$((x+8)^2 + a^2x^2 - 1)(x^2 + a^2x^2 - 4) \leq 0$

решив gba \Rightarrow касаются

$a = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(\arcsin(\frac{3}{8}))}$

④ $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$(x-1) \cdot -1.5$

$\frac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 - 2x} \Big| \frac{x-1}{2x-3}$

$1.5 \times 3 - 1.5 \cdot 5 + 3 = 1.5$

$\frac{-3x+3}{-3x+3}$

$(x-1)(2x-3)$

$x^2 + x + \frac{1}{2} \quad a=1 \quad b=1 \quad c=\frac{1}{2}$
 $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}) - \sqrt{\quad} = (2-7x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1$

$(a+b)^2 - 8ab \cdot 8$

$-7x + 2 = (2-7x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})$ $a=1 \quad b=7$

$x = \frac{2}{7} ?$

$\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad} = 0$

$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{5 \cdot 2}{7} + 3 = \frac{8 - 70 + 3 \cdot 49}{49}$
 $= \frac{8 + 28 + 1 \cdot 49}{49}$

$\Rightarrow \sqrt{\quad} = 0$
 $\sqrt{\quad} = 0$

↑ но у него нет решения, \emptyset

$49 \cdot 2 - 70 \cdot 2 \quad 28$
 $14 - 10 \quad 4 \quad \text{ура}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6)

прямые, где окружности

1 2 3 4 5 6 7

$ab : 2 \begin{matrix} 14 \\ 7 \end{matrix}$

$bc : 2 \begin{matrix} 17 \\ 7 \end{matrix}$

$ac : 2 \begin{matrix} 20 \\ 7 \end{matrix}$

$\times \begin{matrix} 159 \\ 7 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 25 \\ \times 17 \\ \hline 175 \\ -1617 \\ \hline 14 \end{matrix}$

$a+b \quad \leftarrow \text{Чаб}$

$a \neq a+b$

$a=1 \quad b=2$

$a=1 \quad b=3$

$\begin{matrix} 12 \\ 37 \\ \hline 54 \\ 10 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 21 \\ -32 \\ \hline \frac{53}{7} \end{matrix}$

$\begin{matrix} 20+17+14 & 10+17+37 \\ 2 & 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -3 \\ -21 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 20 & 34 & -21 \\ & \frac{17}{41} & -3 \cdot 7 \end{matrix}$

$x=3$

$7x^2 + 32x - 7 \cdot 25 + 16 = 0$

$7x^2 + 32x - 159 = 0$

$\begin{matrix} 21 \\ 32 \end{matrix} \quad a=7$

$abc : 2 \begin{matrix} 21 \\ 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 32 \\ 32 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 42 \\ 3 \end{matrix}$

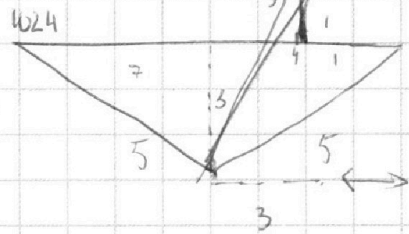
$\Rightarrow c : 2 \begin{matrix} 7 \\ 7 \end{matrix} \quad 22$

$a : 2 \begin{matrix} 13 \\ 7 \end{matrix} \quad 15$

$b :$

$\begin{matrix} 22 \\ 15 \\ \hline 37 \end{matrix}$

$D = b^2 - 4ac = 32^2 + 4 \cdot 159 \cdot 7$



$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = (a+b; -4ab) =$

$a+x+y \geq 10$

$y+z \geq 17$

$z+x \geq 37$

$\Rightarrow x+y+z \geq 32$

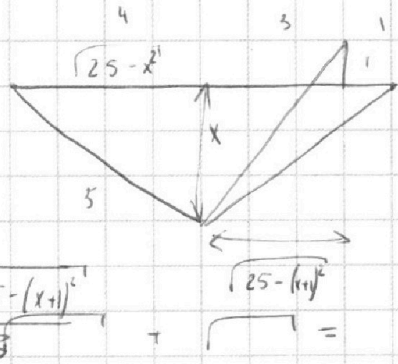
$z=22$

$x=10$

$\frac{25-x^2}{16} = \frac{25-(x+1)^2}{9} \quad z=17$

$9 \cdot 25 - 9x^2 = 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x$

$\frac{\sqrt{25-x^2}}{4} = \frac{\sqrt{25-(x+1)^2}}{3} + \dots$



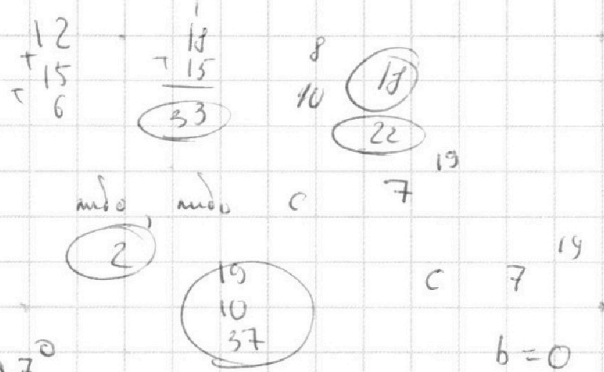
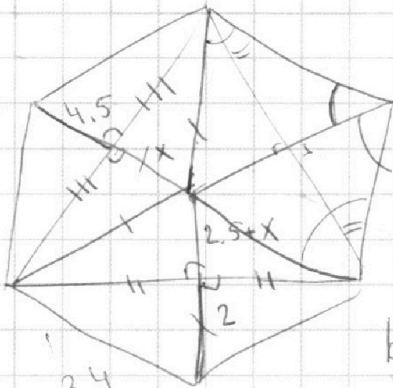
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

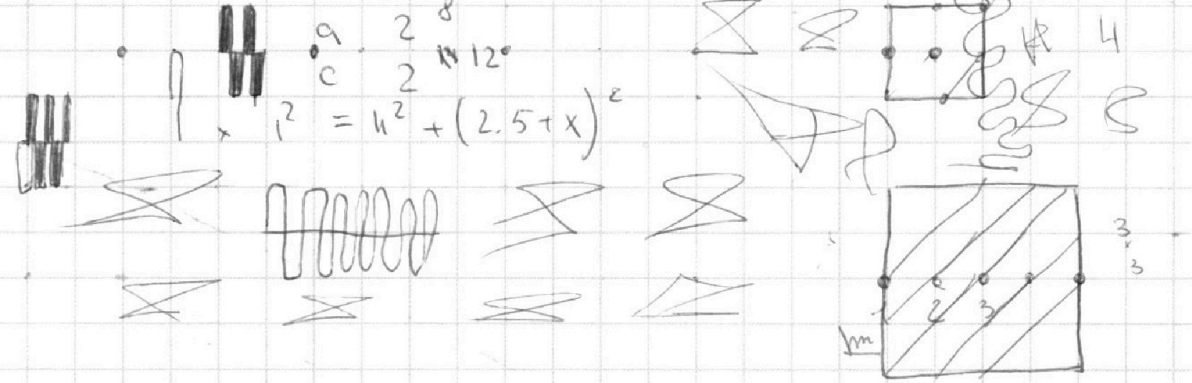


2^{14}
 2^{17}
 2^{20}
 2

$\sqrt{37} abc : 7$
 $\Rightarrow abc = 26$

$b = 2^6$
 $a = 2^8$
 $c = 2^{12}$

$x^2 = 4^2 + (2.5+x)^2$



$$\frac{20 \cdot (1+15) \cdot 9}{2} + 30$$

$$= 14 \cdot 7 + 26$$

$$= 10 \cdot 13 + 9 \cdot 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on a grid background. The main diagram shows a coordinate system with points $(0,0)$, $(-4,8)$, $(1,8)$, and $(5,0)$. A line segment AB is marked with length $9k$. The solution involves several algebraic steps:

$$25 - 9k^2 = (x+1)^2$$

$$25 - (x+1)^2 = 25 - x^2 - 2x - 1 = 24 - 2x - 1 = 23 - 2x$$

$$16 \cdot 25 - (x+1)^2 = 9 \cdot 25 - 9x^2$$

$$7 \cdot 25 = 16(x+1)^2 - 9x^2$$

$$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25 = 0$$

$$7x^2 + 32x - 149 = 0$$

The discriminant is calculated as $D = 32^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-149) = 1024 + 4172 = 5196$. The root $x = 3$ is found. Subsequent calculations lead to $y_2 + y_1 = 14$ and other numerical results like $238 + 1304$.



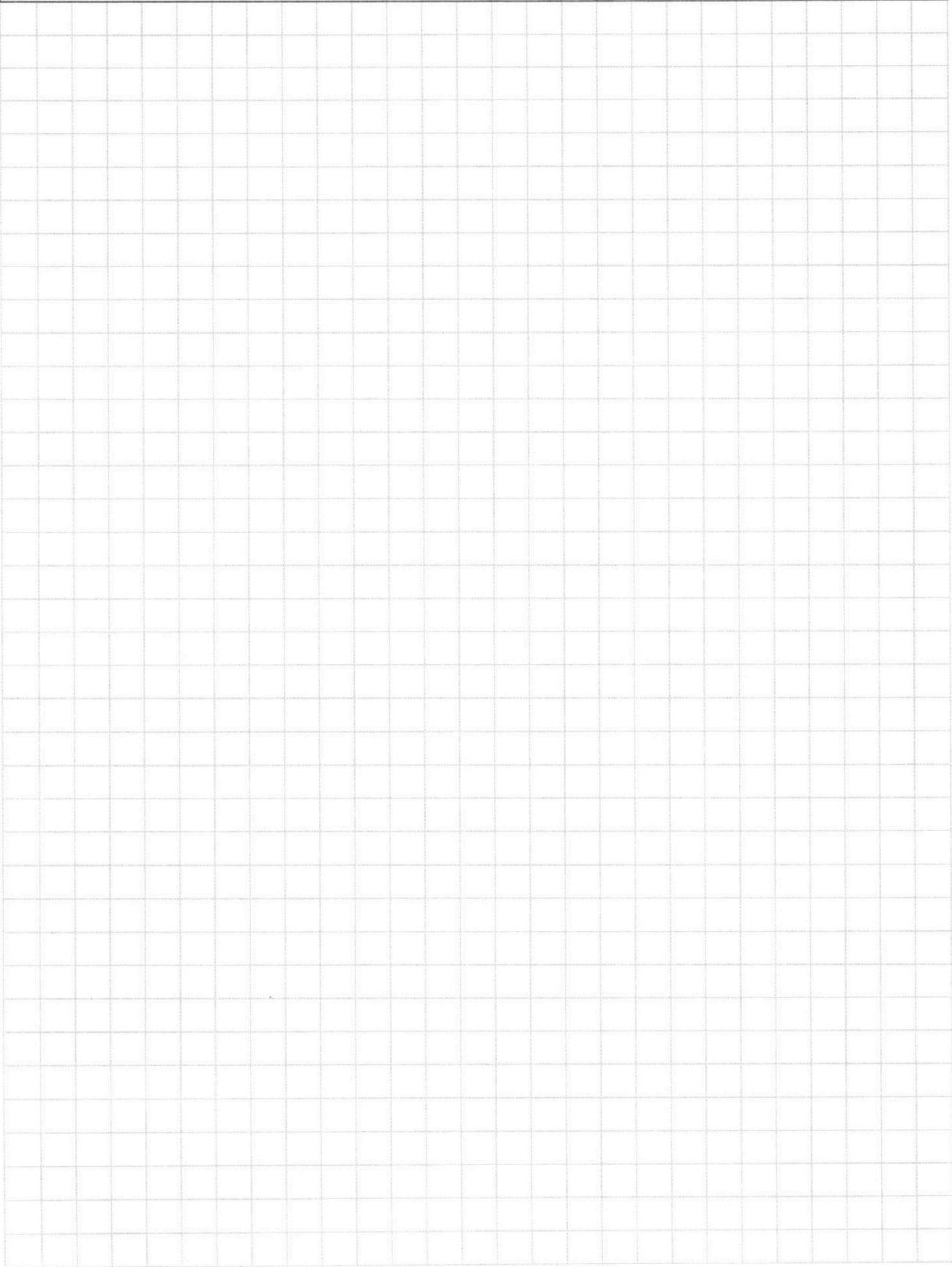
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

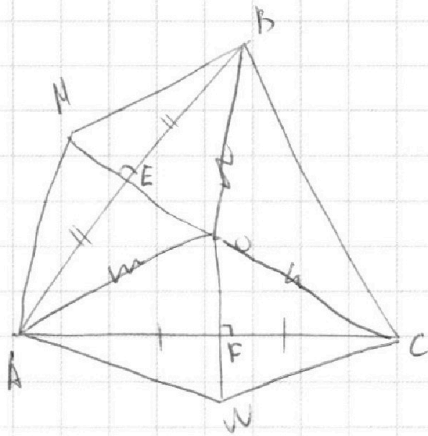


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O -

центр тяжести $\triangle ABC$,
это точка пересечения медиан

2) Т.к. M и N середины AC и BC , то

$$MB = MA \text{ и } NA = NC.$$

\Rightarrow высоты, опущенные из них

падают на одну прямую и являются ее продолжениями.

3) Заметим, что $OM = ON = OB = OA$

4) $ME = 4.5$; $NF = 2$.