



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m \geq 3 \cdot 5^{10}.$$

$$k:3 \rightarrow k \geq 3$$

$$h \geq 3$$

$$\rightarrow kmh \geq 3^3 5^{10}.$$

$$abc \geq 2^{14} 3^{27} 5^{34} \sqrt{3^4 5^{10}} = 2^{14} 3^{29} 5^{39}.$$

$$\text{Пример: } a = 2^5 3^8 5^{12}, \quad b = 2^3 3^7, \quad c = 2^6 3^{14} 5^{27}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k, \quad k, m, n \in \mathbb{N}.$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{14} m$$

$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$$

$$\rightarrow b = \frac{2^8 3^{14} 5^{12} k}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{14} m}{b}$$

$$\rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2^4 3^6 5^5 m}{k}$$

тогда $ac \cdot \frac{c}{a} = c^2 = 2^{16} 3^{24} 5^{24} \frac{nm}{k}$

$$\rightarrow c = 2^8 3^{12} 5^{12} \sqrt{\frac{3nm}{k}}$$

$$ac \cdot \frac{a}{c} = a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m} \quad \rightarrow a = 2^5 3^7 5^{17} \sqrt{\frac{3nk}{m}}$$

$$b = \frac{2^3 3^7 k}{5^5 \sqrt{8nk}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{km}{3n}}$$

тогда $\sqrt{\frac{8nm}{k}} \in \mathbb{Z}, \sqrt{\frac{3nk}{m}} \in \mathbb{Z}, \sqrt{\frac{km}{3n}} \in \mathbb{Z}$.

~~Также отсюда $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (2^9 3^{31})$~~

Также отсюда $abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = 2^{14} 3^{24} 5^{34} \sqrt{3kmn}$.

значит $\sqrt{3kmn} \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{\frac{8nm}{k}} \in \mathbb{Z} \rightarrow k:3 \quad \sqrt{\frac{3nk}{m}} \in \mathbb{Z} \rightarrow m:3$$

$$\sqrt{\frac{km}{3n}} \in \mathbb{Z} \rightarrow km:3n \quad \text{то } km:3 \rightarrow$$

$$k \geq 3, m \geq 3, n \geq 1.$$

$$\rightarrow abc \geq$$

$$\sqrt{3kmn} \in \mathbb{Z} \text{ тогда существуют вложения } 3$$

$$b \text{ и } n \text{ - четные} \rightarrow k \geq 3 \rightarrow n \geq 3$$

~~$$k \geq 3, m \geq 3, n \geq 3 \rightarrow kmn \geq 3^3$$~~

~~$$\rightarrow abc \geq 2^{14} 3^{24} 5^{34} \cdot 3^2 = 2^{14} 3^{29} 5^{34}$$~~

Пример: $a = 2^8 3^{15} 5^{12}, b =$

~~$$a = 2^5 3^7 5^{17} \cdot 3, b =$$~~

$$b \in \mathbb{N} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{3nk}} : 5^5 \rightarrow \frac{m}{3nk} : 5^{10} \rightarrow m : 5^{10}$$

$$m, k, m : 3 \text{ то } m : 3 \cdot 5^{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $\triangle ABC$
 $\angle C = 90^\circ$

$\omega \cap BC = W$.

$CD \perp AB$

$\omega \cap CD = F$

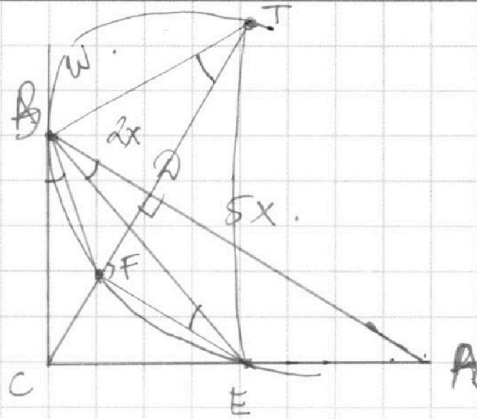
$\omega \cap AC = E$

$AB \parallel EF$

$AD : DB = 5 : 2$

$\angle APC = ?$

$\angle CEF = ?$



Решение: Пусть $BD = 2x$, $AD = 5x$
 $\rightarrow AB = 7x$.

$$\triangle BDC \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC} \quad BC^2 = 14x^2$$

$$BC = x\sqrt{14}$$

$$AC = x\sqrt{35}$$

$$\angle CBF = \angle BEF = \angle ABE$$

$$T = \omega \cap CD$$

$$BC^2 = CF \cdot CT$$

$$14x^2 = CF \cdot (CF + \sqrt{ET^2 - EF^2})$$

$$\angle TFE = 90^\circ \rightarrow TE - \text{диаметр } \omega.$$

$$\text{так } \frac{EF}{CF} = \frac{AD}{AC}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\Leftrightarrow 10 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\pi + 2x = 10 \arccos(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 4\pi + 2x = 10(x + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$$

По ОДЗ уравнение:

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \Leftrightarrow -4\pi \leq 2x \leq 6\pi \Leftrightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\textcircled{1} x \in [-2\pi; -\pi]$$

Уравнение равносильно:

$$4\pi + 2x = 10(-x + \pi) \quad 4\pi + 2x = 10$$

$$4\pi + 2x = 10(x + 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow 8x + 16\pi = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2\pi$$

$$\textcircled{2} x \in [-\pi; 0]$$

$$4\pi + 2x = 10(-x) \Leftrightarrow 4\pi + 12x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\textcircled{3} x \in [0; \pi]$$

$$4\pi + 2x = 10x \Leftrightarrow 4\pi = 8x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{4} x \in [\pi; 2\pi]$$

$$4\pi + 2x = 10(-x + 2\pi) \Leftrightarrow 12x = 16\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\textcircled{5} x \in [2\pi; 3\pi]$$

$$4\pi + 2x = 10(x - 2\pi) \Leftrightarrow 4\pi + 2x = 10x - 20\pi \Leftrightarrow 24\pi = 8x \Leftrightarrow x = 3\pi$$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

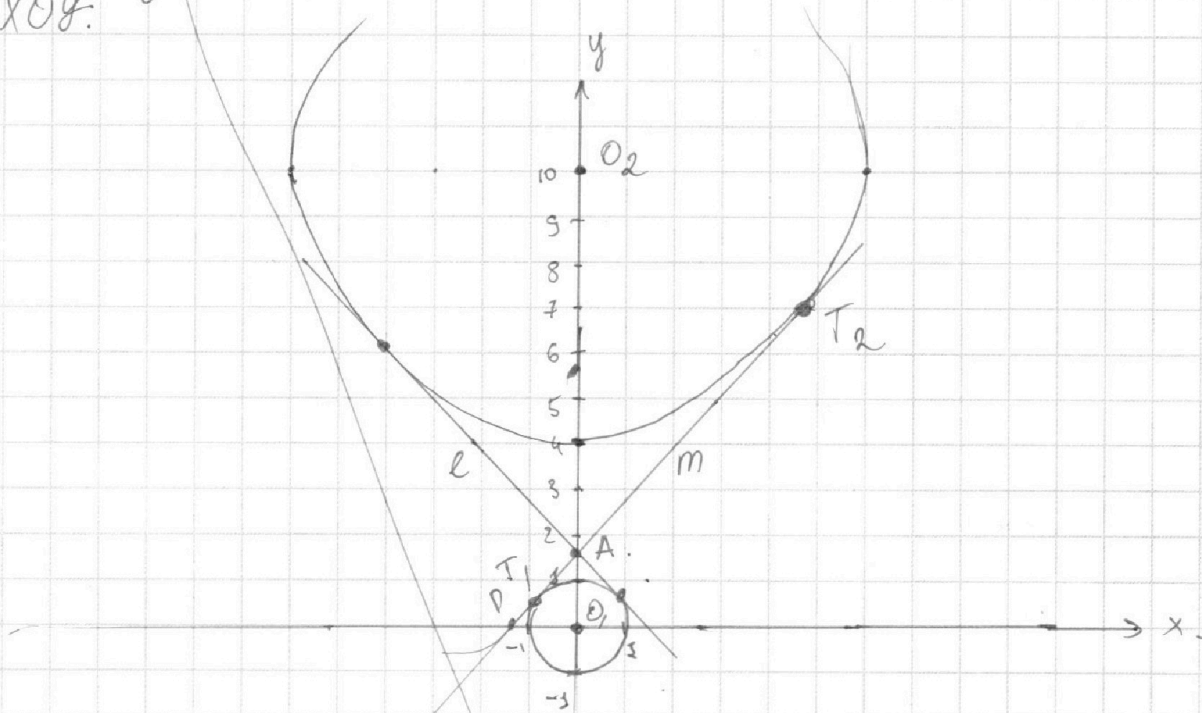
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 48 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}8 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

Изобразим график системы в системе координат xOy .



Графиком 1 уравнения является некоторая прямая, 2 уравнение $(x^2 + y^2 = 1)$ — окружность с центром $O_1(0;0)$ и радиусом 1, 3 уравнение — окружность с центром $O_2(0;10)$ и радиусом 6. т.к. ~~окружности~~ решение системы изображаются точками пересечения прямой и окружностей.

Изобразим l и m — отрезки касательных к окружностям. т.к. окружности симметричны относительно Oy , то l, m — симметричны относительно Oy . Пусть $l \cap m = A$. Тогда

$A \in Oy$. Пусть $A(0; a)$. Тогда отрезок окружности получается и меньшей через соответствующую симметрию

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

точки A с координатами (-6) . Значит $O_1A = \frac{6}{1}$ $O_2A = \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{10-q} = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{10}{7}$$

Пусть $m: kx + \frac{10}{7}$ тогда $a = t = \frac{10}{7}$ имеет 1 решение.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{10}{7} \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - y^2 = x^2 \\ y = kx + \frac{10}{7} \\ k > 0 \end{cases}$$

т.к. данная точка касается m с меньшей окружностью положительно:

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = kx + \frac{10}{7}$$

$$\begin{cases} 1-x^2 = k^2x^2 + \frac{20kx}{7} + \frac{100}{49} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$m: kx + \frac{10}{7}$$

Пусть T_2 - т. касание m с внешней окружностью T_1 - с меньшей, $P = m \cap OX$

$$\sin \angle O_2AT_2 = \frac{6}{\left(\frac{60}{7}\right)} = \frac{7}{10}$$

$$\angle APO_1 = 90 - \angle O_2AT_2$$

$$\Rightarrow \cos \angle APO_1 = \frac{7}{10}$$

$$\sin \angle APO_1 = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle APO_1 = \frac{\sqrt{51}}{7} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow m: \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$$

Уг. симметрии: $\frac{7}{7}$ $\frac{10}{7}$

$$l: -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$$

Все прямые пересекающие каждую окружность в 2 точках находится между l и m , и проходящие через A

$$\text{тогда: } -\frac{\sqrt{51}}{7} < \frac{a}{3} < \frac{\sqrt{51}}{7} \quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{51}}{7} a < \frac{\sqrt{51}}{7} \cdot 3$$

$$\frac{4}{3}b = \frac{10}{7} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 7} = \frac{15}{14}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\frac{a}{3}x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$
объем точек

прямой и окружностей ≤ 2

Иначе перенесем прямую так, чтобы
она проходила через A. тогда точек
пересечения будет 4.

Ответ: $(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

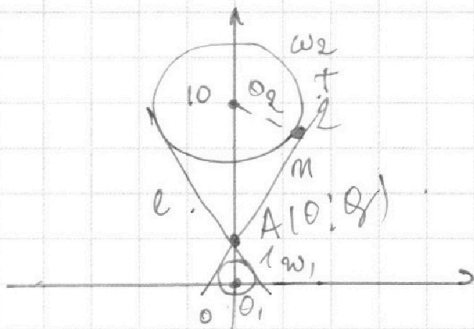


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$$

Нарисуем график
системы в HOY .



$x^2 + y^2 = 1$ — окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 1.
 $x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$ — окружность с центром $(0;10)$ и радиусом 6.

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ — некоторая прямая.

Пусть l и m — общие касательные окружностей
 $l \cap m = A(0;9)$

2 окружности попарно касаются не первой через
 вертикальную ось относительно A в радиусных
 линиях (-6) .

тогда $O_1A : O_2A = 1 : 6$.

$$\rightarrow \frac{9}{10-9} = \frac{1}{6} \rightarrow 9 = \frac{10}{7}$$

$m: kx + \frac{10}{7}$, где k — некоторое число.

Пусть $k > 0$, $m \cap \omega_2 = T$

$$\sin \angle O_2AT = \frac{6}{\frac{60}{7}} = \frac{7}{10}$$

$$\rightarrow k = \operatorname{ctg} \angle O_2AT = \frac{\sqrt{51}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

тогда $l: -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

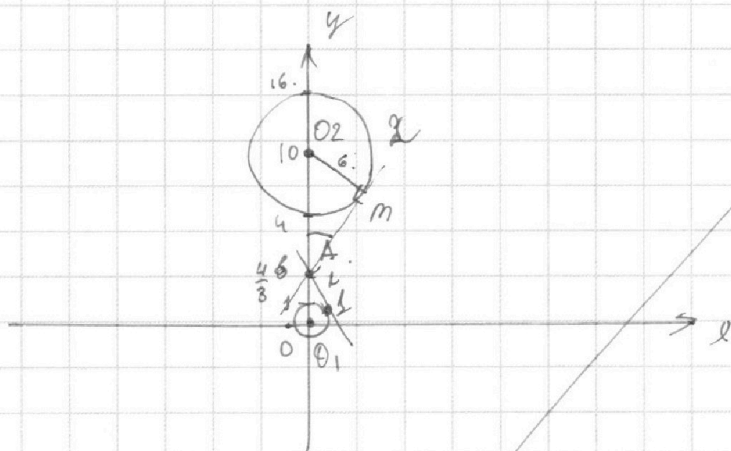
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $a > 0$
то прямая будет
горизонтальной и
пересекет окружность ≤ 2 .



Прямая l прямая пересекает OY в $A(0; \frac{4}{3})$
Найдем касательную m к Γ и m к l и 2 окружностям.
Для удобства касательную $a > 0$:

Угол между m и $OY - \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{6}{10 - \frac{4}{3}} = \frac{18}{30 - 4/3} = \frac{9}{15 - 2/3}$$

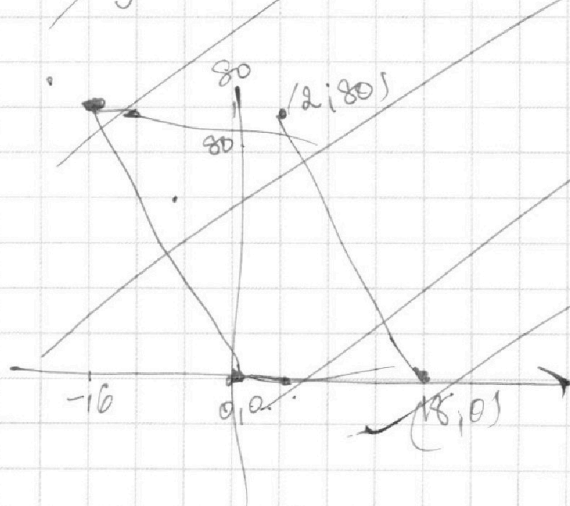
Пусть $m: kx + \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0$ $\rightarrow |k| = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \frac{81}{(15 - 2/3)^2}}}{(\frac{9}{15 - 2/3})}$

$l: px + \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0$

Угол между l и $OY - \beta$:

$$\sin \beta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \rightarrow |\rho| = \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{16}}}{(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Итого $\frac{a}{3} \in (-\infty; -\operatorname{arctg} \{ |k|, |\rho| \}) \cup (\operatorname{arctg} \{ |k|, |\rho| \}; +\infty)$



$A(x_1, y_1)$
 $B(x_2, y_2)$ $c = z$
 $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 6z$
 $5(x_2 - x_1 - z) = y_1 - y_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3.$$

Пусть $t = \log_5(2x)$. из ОДЗ $\log_5(2x) \neq 0$.

Уравнение примет вид:

$$\frac{t^4 - 3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

Пусть $p = \log_5 y$.

Уравнение примет вид:

$$\frac{p^4 + 4}{p} = \frac{-1}{3p} - 3 \Leftrightarrow \frac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3p^5 + 9p + 13}{p} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \end{cases}$$

Составим систему:

$$\begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 3p^5 + 9t + 9p = 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (t+p)(t^4 - t^3p + t^2p^2 - tp^3 + p^4) + 3(t+p) = 0.$$

$$\begin{cases} p \neq 0 \\ t \neq 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+t=0 \\ t^4 - t^3p + t^2p^2 - tp^3 + p^4 + 3 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+t=0 \\ \frac{t^4}{p} = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = 3t^5 + 9t - 13 \quad f'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \text{ при } \forall t.$$

$\rightarrow f(t)$ возрастает на \mathbb{R}

$\rightarrow f(t) = 0$ имеет 1 решение.

Аналогично $3p^5 + 9p + 13$ имеет 1 решение.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение системы уравнений $p+t=0$.~~

тогда $p = -t$.

$$0 = 3p^5 + 9p + 13 = -3t^5 - 9t + 13 = -(3t^5 + 9t - 13) = 0$$

Значит система уравнений $p+t=0$ удовлетворяет системе (*). Если $p \neq 0$ и $t \neq 0$.

~~Сначала~~ ~~примем~~ ~~лог:~~

$$p+t=0 = \log_5 y + \log_5 (2x) = \log_5 (2xy), y > 0.$$

$$2xy = 1, y > 0$$

$$xy = \frac{1}{2}.$$

$f(t) = 3t^5 + 9t - 13$ возрастает на \mathbb{R} т.к.

$$f'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \text{ при } \forall t \in \mathbb{R}.$$

значит $3t^5 + 9t - 13 = 0$ имеет единственное решение.

аналогично $3p^5 + 9p + 13 = 0$ имеет единственное решение.

значимый, что $p = -t_0$ - решение уравнения. где t_0 - корень $3t^5 + 9t - 13 = 0$

значит

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} p+t=0. \\ p \neq 0 \\ t \neq 0. \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+t=0. \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases}$$

$$p+t=0 \Leftrightarrow \log_5 y + \log_5 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 (2xy) = 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}, y > 0$$

ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Пусть O - центр Ω

$$ON \perp BC. \rightarrow ON \perp SN$$

$\rightarrow \angle SON$ - прямоугольный

$$\rightarrow OS = 5$$

$$\rightarrow OS = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \neq \sqrt{49}$$

$$S_{BCS} \cos \angle SBCA = S_{BCM}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle SAB$

AA_1, BB_1, CC_1 - медианы

$\triangle ABC$

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$

сфера Ω

Ω касается AS в L

Ω касается (ABC) в K ,

$K \in AM$.

$\Omega \cap SU = \{P, Q\}$

$SP = MQ$.

$S_{ABC} = 100$

$SA = BC = 16$.

а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

б) $\angle SBCA = ?$

Ω касается BCS в N

$SN = 4$

радиус Ω равен 5

Решение:

а) Рассмотрим $\triangle SA_1A$.

Пусть $\omega = \Omega \cap SA_1A$.

тогда ω - окружность.

$$\text{deg}_{\omega} S = SP \cdot SQ = SL^2$$

$$\begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot SQ = \\ &= SP(SP + SQ) = \\ &= MQ \cdot MP = \text{deg}_{\omega} M = \\ &= MK^2. \end{aligned}$$

как известно:

$$\Rightarrow SL = MK.$$

$$LA = AK$$

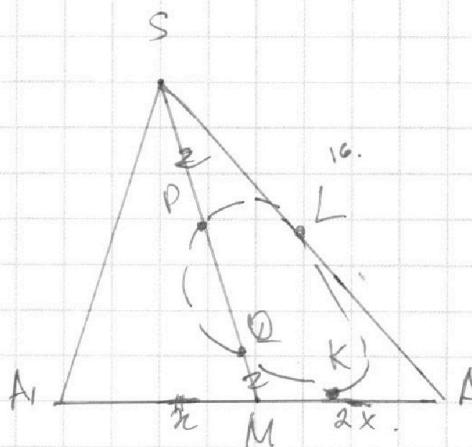
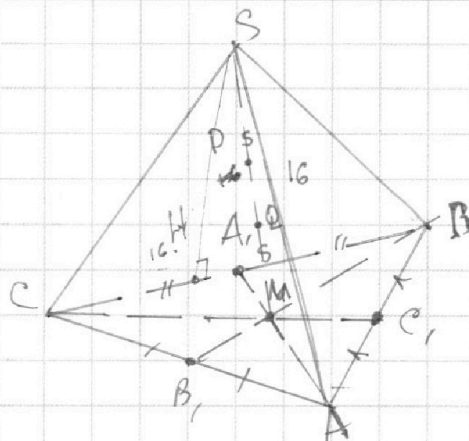
значит $SA = LA$.

значит $MA = 16$.

$$\text{тогда } AA_1 = \frac{3 \cdot 16}{2} = 24.$$

$$AA_1 = \frac{16}{2} = 8. \quad CA_1 = 8.$$

$$S_{CA_1M} = 3 S_{ABC} / 2 = \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{100}{6} = \frac{CA_1 \cdot AM \sin \angle CA_1M}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{100}{6} = 32 \sin \angle CA_1M.$$

$$\sin \angle CA_1M = \frac{100}{6 \cdot 32} = \frac{25}{48}$$

$$\cos \angle CA_1M = \frac{48}{48} \sqrt{\frac{48^2 - 25^2}{48^2}} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \quad (\text{не используем отрицательность } \cos \angle CA_1M > 0)$$

по теореме косинусов $\triangle CA_1M$:

$$CM^2 = 2 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 128 \left(\frac{48 - \sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right) =$$

$$= \frac{26}{6} (48 - \sqrt{23 \cdot 73}) = \frac{13}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$CM = \sqrt{\frac{13}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})}$$

$$CC_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$= \frac{2 \cdot 8^2}{48} \left(\frac{48 - \sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right) = \frac{8^2}{3 \cdot 8} (48 - \sqrt{23 \cdot 73}) =$$

$$= \frac{8}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$CM = 2 \sqrt{\frac{2}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})}$$

$$CC_1 = 3 \sqrt{\frac{2}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})} = \sqrt{6} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$\cos \angle MA_1B = -\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$ по теореме косинусов $\triangle MA_1B$:

$$BM^2 = 2 \cdot 8^2 (48 + \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$BM = \sqrt{6} (48 + \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot 6 \cdot \sqrt{48^2 - 23 \cdot 73} = 24 \cdot 6 \cdot 25.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



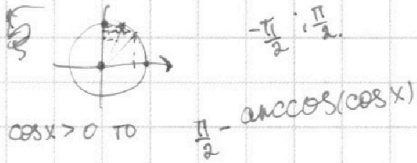
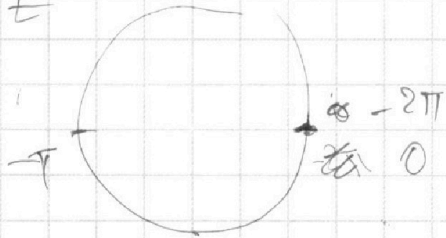
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$\log_5 2x = t.$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3.$$

$$\frac{t^5 - 3 - \frac{4}{3} + 3t}{t} = 0$$



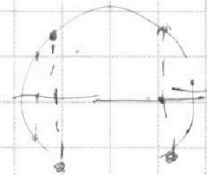
$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$4\pi + 2x = \arccos(\cos x)$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

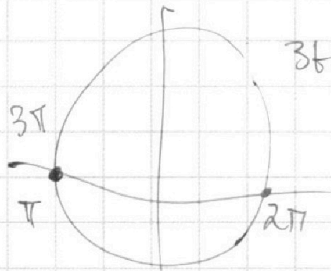


$$\frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{t} = 0$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0.$$

$$4\pi + 2x = x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4\pi$$



$$4\pi + 2x = \frac{1}{2}x + 2\pi n, \cos x > 0$$

$$-x + 2\pi n, \cos x < 0.$$

$$x = 2\pi(n-2)$$

$$x = \frac{2\pi(n-2)}{3}$$

$$3t^4 - 4t^2 + 9t - 9 = 0$$

$$3t^2(t^2 - 1) + 9(t - 1) = t^2$$

$$3(t-1)(t(t+1)+9) = t^2$$

$$x^4 - x^3 + \frac{x^2-1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{9}{x^4} = 0$$

$$xy - ?$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 3625 - 3.$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5$$

$$= \log_y 30,2 - 3.$$

$$\frac{\log_5^4(2x) - 3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3.$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - \frac{9}{3t}$$

$$\frac{3t^4 - 9 - 4t^2 + 9t}{3t} = 0$$

123456x
+
+
+
+
+
+

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 ab &= 2^8 3^{14} 5^{12} k \\
 bc &= 2^{12} 3^{20} 5^{17} m \\
 ac &= 2^{14} 3^{21} 5^{39} n \\
 a^2 b^2 c^2 &= 2^{34} 3^{55} 5^{68} kmn.
 \end{aligned}$$

min abc - 9

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 2^{10} 3^{15} 5^{34} nk \\
 a &= 2^5 3^7 5^{17} \sqrt{\frac{3nk}{m}} \\
 abc &= 2^a 3^b 5^c \dots \\
 a &\geq 17 \\
 b &\geq 28 \\
 c &\geq 34.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= 2^8 3^{14} 5^{12} k \\
 b &= 2^{12} 3^{20} 5^{17} m \\
 a &\leq \frac{c}{3}
 \end{aligned}$$

$$abc = 2^{14} 3^{28} 5^{34}$$

$$c = 2^9 3^{13} 5^{14} \sqrt{\frac{3mk}{k}}$$

$$b = 2^3 3^7 m \sqrt{\frac{3mk}{k}}$$

$$\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5 \frac{m}{k}$$

$$b = \frac{2^8 3^{15} 5^{12}}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{17}}{c}$$

$$\frac{c}{a} \geq 2^4 3^5 5^5 \sqrt{\frac{3nk}{m}} \geq 5^5$$

$$\frac{3nk}{m} \geq 5^{10}$$

$$c^2 = 2^{18} 3^{26} 5^{34}$$

$$c = 2^9 3^{13} 5^{17} \quad m=3$$

$$a = 2^5 3^8 5^{22}$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{22}$$

$$kmn = 3$$



$$ck = 2^9 3^{14} 5^{22}$$

$$a = 2^9 3^{14} 5^{22}$$

$$b = 2^3 3^7$$

$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{1-x^2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\
 &1-x^2 \in [0, \frac{\pi^2}{4}] \\
 &0 \leq 1-x^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \\
 &|x| \leq \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

ab
 bc 10
 ac
 abc

$$\begin{aligned}
 n &= 3 \\
 ab &= 2^8 3^{14} 5^{12} \\
 bc &= 2^{12} 3^{20} 5^{17} \\
 ac &= 2^{14} 3^{21} 5^{39} \\
 b &= \frac{2^8 3^{14} 5^{12}}{a}
 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5$$

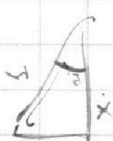
$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$c^2 = 2^{18} 3^{26} 5^{34}$$

$$c = 2^9 3^{13} 5^{17}$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{22}$$

$$\begin{aligned}
 10 \arcsin(\cos x) &= \pi - 2x \\
 \Rightarrow 10 \sqrt{1-x^2} &= \pi - 2x
 \end{aligned}$$



$$\frac{2^8 3^{14} 5^{12}}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{17}}{c}$$

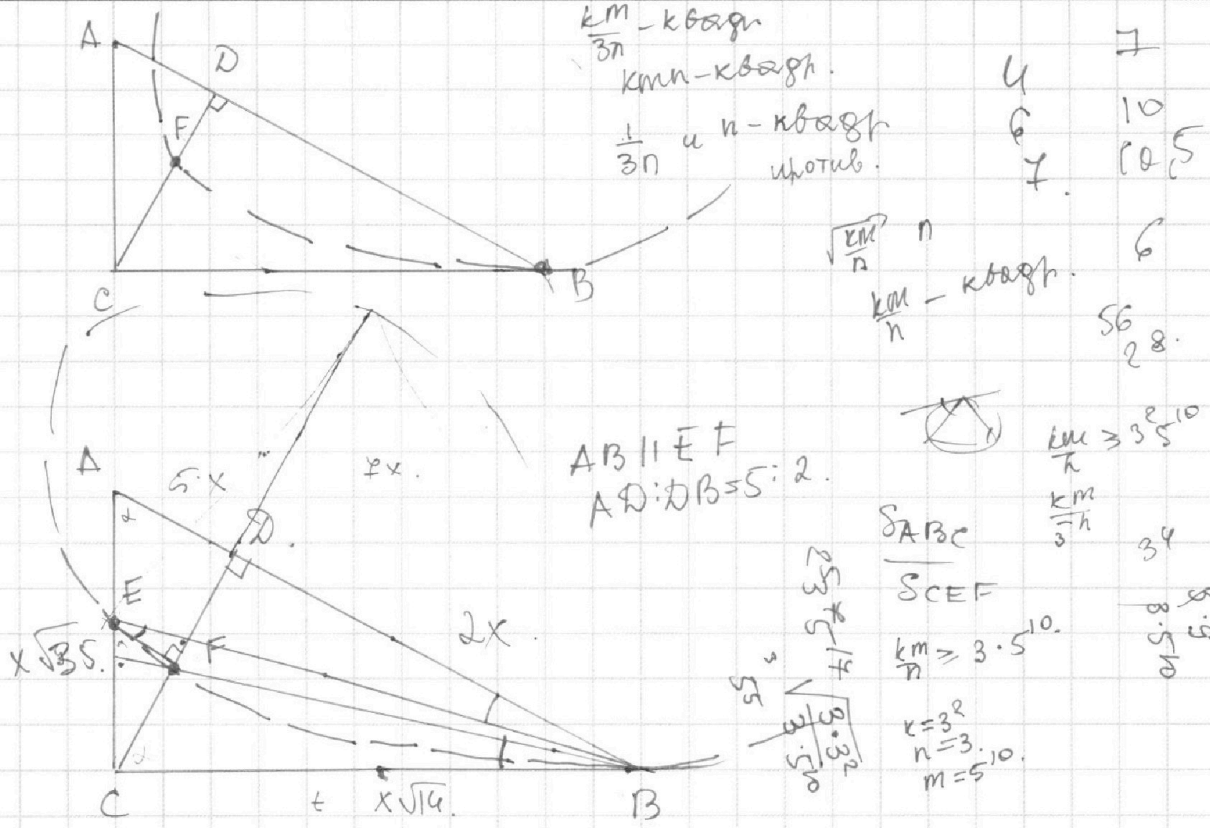
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5x}{y} = \frac{y}{7x}$$

$$35x^2 = y^2$$

$$y = x\sqrt{35}$$

$$49x^2 - 35x^2 < 44x^2$$

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{14} m$$

$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$$

$$b = 2^8 3^{14} 5^{12} \frac{k}{a} = 2^{12} 3^{20} 5^{14} \frac{m}{c}$$

$$\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5 \frac{m}{k}$$

$$c^2 = 2^{18} 3^{24} 5^{44} \frac{mn}{k}$$

$$a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m}$$

$$a = 2^5 3^7 5^{17} \sqrt{\frac{3nk}{m}}$$

$$c = 2^9 3^{13} 5^{22} \sqrt{\frac{3mn}{k}}$$

$$b = \frac{2^3 3^7}{5^5} \cdot k \sqrt{\frac{m}{8nk}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{km}{8n}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} \frac{m}{\sqrt{8mn}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{km}{3n}}$$

$$\sqrt{\frac{km}{3n}} \geq 5^5$$

$$\frac{km}{3n} \geq 5^{10}$$

$$abc = 2^5 3^7 5^{17} \cdot \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{km}{3n}} \cdot 2^9 3^{13} 5^{22}$$

$$\sqrt{\frac{3nk}{m}} \sqrt{\frac{3mn}{k}} = 2^{14} 3^{20} 5^{34}$$

$$\sqrt{\frac{km}{n}} = \sqrt{\frac{km}{n} \cdot 1}$$

$$\geq 11\sqrt{3} \cdot 5^{10}$$

$$\geq 5^5 n \sqrt{3}$$

$$2^8 3^{13} 5^{22} \sqrt{3 \cdot 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}}$$