



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $x$  - степень вхождения двойки в  $a$ ,  $y$  - в  $b$ ,  
 $z$  - в  $c$ . Тогда, т.к.  $ab : 2^8$ ;  $bc : 2^{12}$ ;  $ac : 2^{14} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 14 \end{cases} & \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow (abc)^2 : 2^{34} \Rightarrow \\ & \Rightarrow abc : 2^{17} \end{aligned}$$

Аналогично, т.к.  $ab : 3^{14}$ ;  $bc : 3^{20}$ ;  $ac : 3^{21}$

то  $(abc)^2 : 3^{55}$  но т.к.  $abc \in \mathbb{N}$ , то степень  
вхождения тройки в  $abc$  должна быть целой  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc : 3^{28}$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 5^{39}$$

Т.к. 2; 3; 5 попарно взаимнопросты, то

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Пример:

$$\begin{aligned} a &= 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19} & ab &= 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ b &= 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0 & bc &= 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ c &= 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} & ac &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2$$

$$ab \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac \geq 2^{21} \cdot 3^{14} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{34}$$

$$\begin{matrix} abc : ab \\ abc : bc \\ abc : ac \end{matrix}$$

$$\Rightarrow abc : \text{НОК}(2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}; 2^{21} \cdot 3^{14} \cdot 5^{39}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Пусть  $x$  - степень вхождения двойки в  $a$ ,  $y$  - в  $b$ ,  $z$  - в  $c$ . Тогда, т.к.  $ab : 2^8$ ;  $bc : 2^{12}$ ;  $ac : 2^{21}$   $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x+y \geq 8$$

$$y+z \geq 12$$

$$z+x \geq 21$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow x+y+z \geq 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17}$$

Аналогично  $(abc)^2 : 3^{55} \Rightarrow abc : 3^{28}$  (т.к.  $abc \in \mathbb{N}$ )

а также  $(abc)^2 : 5^{68} \Rightarrow abc : 5^{34}$

Т.к.  $2, 3, 5$  попарно взаимнопросты следует, что

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

Пример:  $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5$

$$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

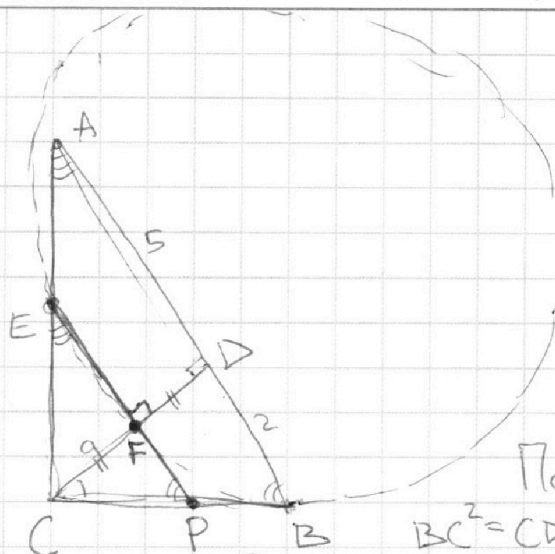
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В силу масштаба  
будем считать, что  
 $AB = 7$ .

Тогда т.к.  $AD:DB = \frac{5}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AD = 5 \quad DB = 2$

$CD$  - высота в прямом  $\Delta$   
проведенная к гипотенузе  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{10}$   
 $EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$

По т. Пифагора в  $\Delta CBD$ :

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 = 10 + 4 = 14 \Rightarrow BC = \sqrt{14}$$

$P$  - пересечение  $EF$  с  $BC$

Пусть длина  $CF = a$ .

Тогда т.к.  $\Delta CPF \sim \Delta CBD$  (по 2-м углам)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow PF = \frac{BD \cdot CF}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{10}}; CP = \frac{BC \cdot a}{CD} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}} \Rightarrow BP = \sqrt{14} - \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}}$$

$$\Delta CPE \sim \Delta CBA \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow PE = \frac{AB \cdot CF}{CD} = \frac{7a}{\sqrt{10}}$$

По св-ву касательной:  $PB^2 = PF \cdot PE$

$$\left( \sqrt{14} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{10}} \right) \right)^2 = \frac{14a^2}{10}$$

$$1 - \frac{2a}{\sqrt{10}} + \frac{a^2}{10} = \frac{a^2}{10} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow F - \text{середина } CD$$

$$\Delta CEF \sim \Delta BAC \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{BC^2}{CF^2} =$$

$$= \frac{14}{\frac{10}{4}} = \frac{28}{\frac{10}{4}} = \frac{14}{\frac{10}{4}} = \frac{56}{10} = 5,6$$

Ответ: 5,6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Проверка: } 10 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \pi - \pi$$

$$10 \arcsin(0) \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

График первого ур-ия - прямая

Графики второго и третьего ур-ий - окр-ти

Система будет иметь ровно 4 решения тогда и только тогда, когда прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  будет пересекать каждую из этих окр-тей в 2-х различных точках

Построим общие внутренние касательные к этим окр-там.

Пусть  $y$  той из них, у которой положительный коэф. при  $x$  этот коэф. равен  $k$ .

Тогда т.к. окр-ти симметричны отн-но оси  $y$ , то у второй окр-ти коэф. при  $x = -k$

Заметим, что если  $\frac{a}{3} \in [-k; k]$ , то

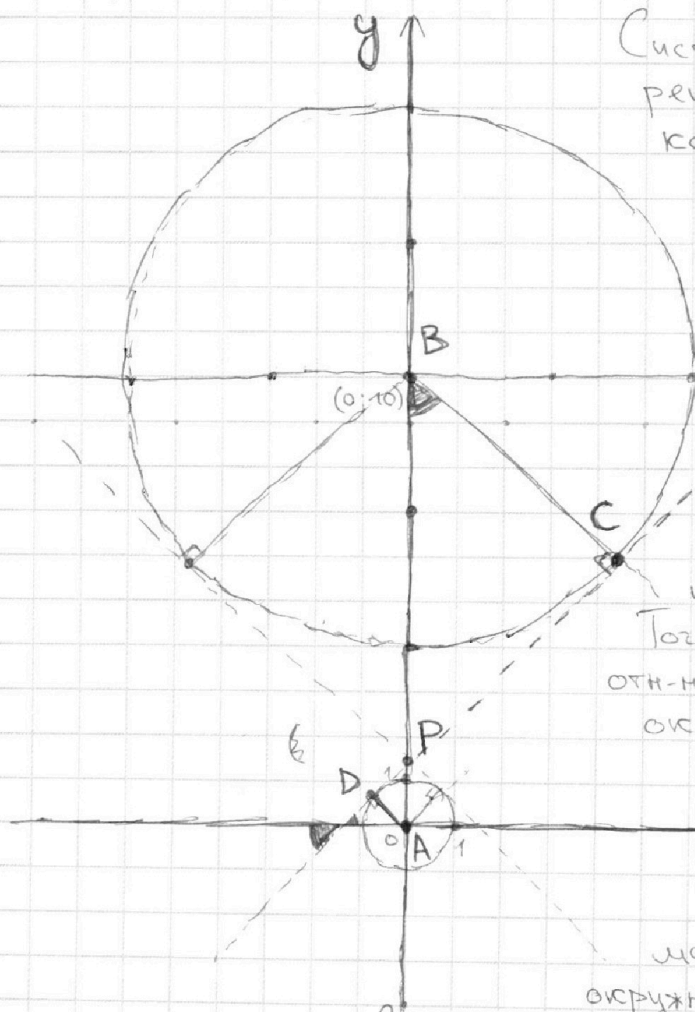
прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

может пересекать только одну окружность или касаться обеих,

но тогда количество корней системы  $\neq 4$ . И наоборот, если  $\frac{a}{3} \notin [-k; k]$ , то взяв  $b$  такое, чтобы прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  проходила через точку пересечения общих внутренних касательных к окр-там, мы получим 4 пересечения  $\Rightarrow$  4 корня.

Обозначим

Осталось посчитать  $k$   $\longrightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим точкой  $A$  центр маленькой окр-ти  
точкой  $B$  - центр большой. Точками  $C$  и  $D$  - точки  
касания положительной общей касательной с  
большой и маленькой окружностями.  $P$  - точка  
пересечения касательных.

Очевидно, что  $BC \parallel AD \Rightarrow$  по т. Палеса  $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$   
Пусть  $|AP| = d$ , тогда  $BP = 10 - d$ ;  $AD = 1$ ;  $BC = 6$  (радиусы)  
 $\Rightarrow \frac{d}{10-d} = \frac{1}{6} \quad 6d = 10 \quad d = \frac{10}{7} \quad BP = 10 - d = \frac{60}{7}$

~~Очевидно~~ По определению  $k$  - тангенс угла, образованного  
положительной касательной с осью  $X$ . Очевидно, что этот  
угол равен  $\angle PBC$

$$\operatorname{tg} \angle PBC = \frac{PC}{BC}$$

~~По т. Пифагора~~ По т. Пифагора в  $\triangle PCB$ :  $PC^2 = PB^2 - BC^2 =$   
 $= \left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2 = \frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49} = \frac{36 \cdot 51}{49} \quad PC = \frac{6}{7} \sqrt{51}$

$$\operatorname{tg} \angle PBC = \frac{\frac{6}{7} \sqrt{51}}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $t = \log_5 2x$ ;  $s = \log_5 y$

Тогда  $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 \Leftrightarrow t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow s^4 + \frac{4}{s} = -\frac{1}{3s} - 3 \Leftrightarrow s^4 + \frac{13}{3s} + 3 = 0$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \\ s^4 + \frac{13}{3s} + 3 = 0 \end{cases} \quad t, s \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \\ s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0 \end{cases}$$

Сложим эти ур-ия:  $t^5 + s^5 + 3(s+t) = 0$

$$(s+t)(s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3) = 0$$

Заметим, что  $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 > 0$ , т.к.  $s^5 + t^5 = 0$   
тогда и только тогда, когда  $t = -s$ .

Отсюда  $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3 > 3 \Rightarrow$  не обращается в 0

$$\Rightarrow s+t = 0$$

$$\log_5 2x + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☐☐☒☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x_1 - 5x_2 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + \frac{y_2 - y_1}{5} = 9$$

Теперь давайте уменьшим единичный отрезок оси  $y$  в пять раз

$$\begin{aligned} O &= (0; 0) & Q &= (2; 20) \\ P &= (-16; 20) & R &= (18; 0) \end{aligned}$$

Нам надо в таком параллелограмме найти все ~~пары~~ пары точек таких, что  $x_1 - x_2 +$

Рассмотрим систему координат такую, что в ней ось  $x$  обычная, а ось  $y$  имеет ед. отрезок равный пр пяти ед. отрезкам изначальной системы коорд.

Тогда в новой системе коорд:

$$O = (0; 0) \quad P = (-16; 16)$$

$$Q = (2; 16) \quad R = (18; 0)$$

Заметим, что мы можем двигать наш параллелограмм на вектора с целыми координатами и от этого # подходящих пар не изменится, т.к.:

$$5(x_2 + \alpha_x) - 5(x_1 + \alpha_x) + (y_2 + \alpha_y) - (y_1 + \alpha_y) = 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1$$

где  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  - сдвиги по осям  $x$  и  $y$

Рассмотрим парал-м с вершинами  $(-80; 80), (10; 80), (0; 0), (0; 80)$

Заметим, что # искомых пар в парал-ме PQRO = # пар точек, таких, что  $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 45$  в новом парал-ме

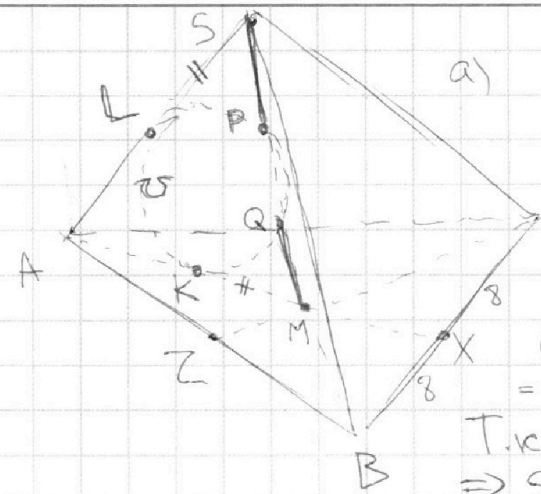
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) Пусть  $X$  - середина  $BC$   
 $Y$  - середина  $AC$   
 $Z$  - середина  $AB$

Степень точки  $S$  отн-но  $\alpha = SL^2 = SP \cdot SQ$

Степень точки  $M$  отн-но  $\alpha = MK^2 = MQ \cdot MP$

Т.к.  $MQ = MP = SP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$

$AK = AL$  (отрезки касательных из  $A$  к  $\alpha$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS = AM = BC = 16$

$M$  - точка пересечения медиан  $\Rightarrow AX = \frac{3}{2} AM = 24$   
 $\Rightarrow AM = 2MX \Rightarrow$

$\Rightarrow MX = 8$ . В  $\triangle BMC$  медиана  $MX$  равна половине  $BC \Rightarrow$

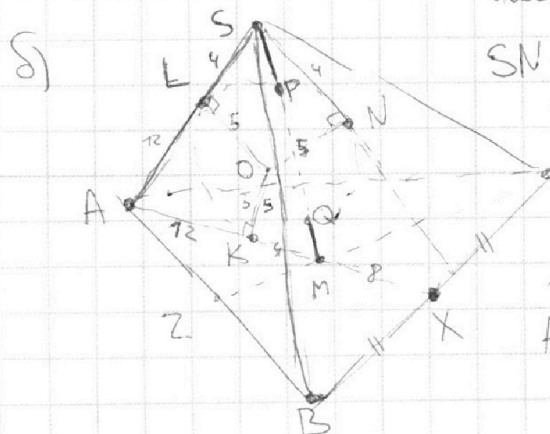
$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

$M$  - точка пересечения медиан  $\triangle ABC \Rightarrow S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{100}{3}$

$\angle BMC = 90^\circ \Rightarrow S_{BMC} = \frac{BM \cdot MC}{2} \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{200}{3}$

$BM = \frac{2}{3} BY$ ;  $CM = \frac{2}{3} CZ \Rightarrow \frac{4}{9} BY \cdot CZ = \frac{200}{3} \Rightarrow BY \cdot CZ = 150$

$BY \cdot CZ \cdot AX = 24 \cdot 150 = 3600$



$SN = SL$  (отрезки касательных из  $S$  к  $\alpha$ )

$SL = MK$  (доказано в п. а)  $\Rightarrow MK = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = AL = 12$  (т.к.  $AM = 16$ )

$ON$  - нормаль к  $(BCS)$   $\Rightarrow$

$OK$  - нормаль к  $(ABC)$

$\Rightarrow \angle((ABC), (BCS)) = \angle(ON, OK) = \angle NOK$

$AK = KX = 12$

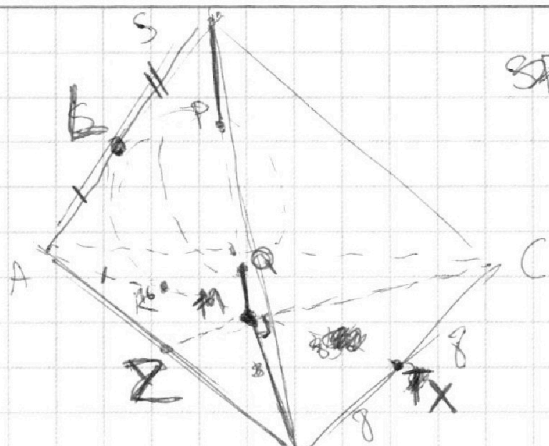
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

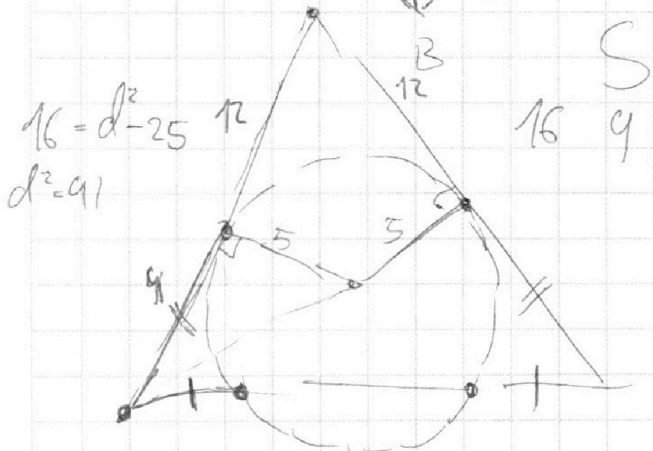
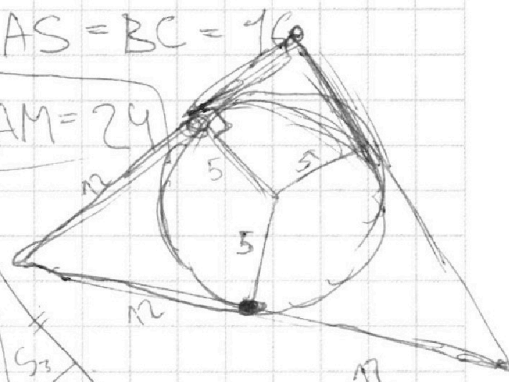
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} SP \cdot MK^2 &= MQ \cdot MP \\ SL^2 &= SP \cdot SQ \end{aligned} \Rightarrow MK = SL$$

$$\begin{aligned} AM &= AS = BC = 16 \\ AT &= \frac{3}{2} AM = 24 \end{aligned}$$



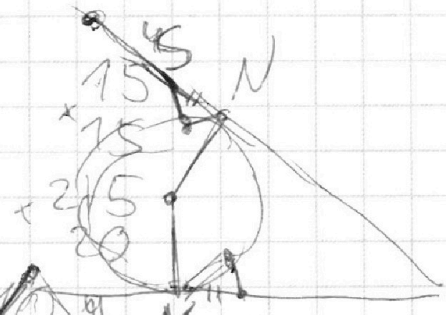
$$\frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{100}{3}$$

$$\begin{aligned} 16 & \quad 16 \\ 24 & \quad 24 \\ p &= 28 \end{aligned}$$

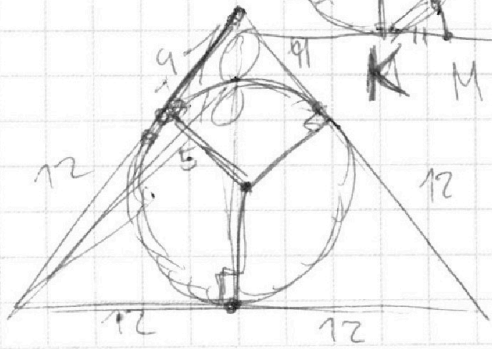
$$BM \cdot MC = \frac{200}{3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{28 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4} &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 & \quad 150 \\ 24 & \quad 60 \\ 30 & \quad 3600 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 169 & \quad 13 \\ 20 & \quad 13 \\ 3380 & \quad 39 \\ 13 & \quad 13 \end{aligned}$$



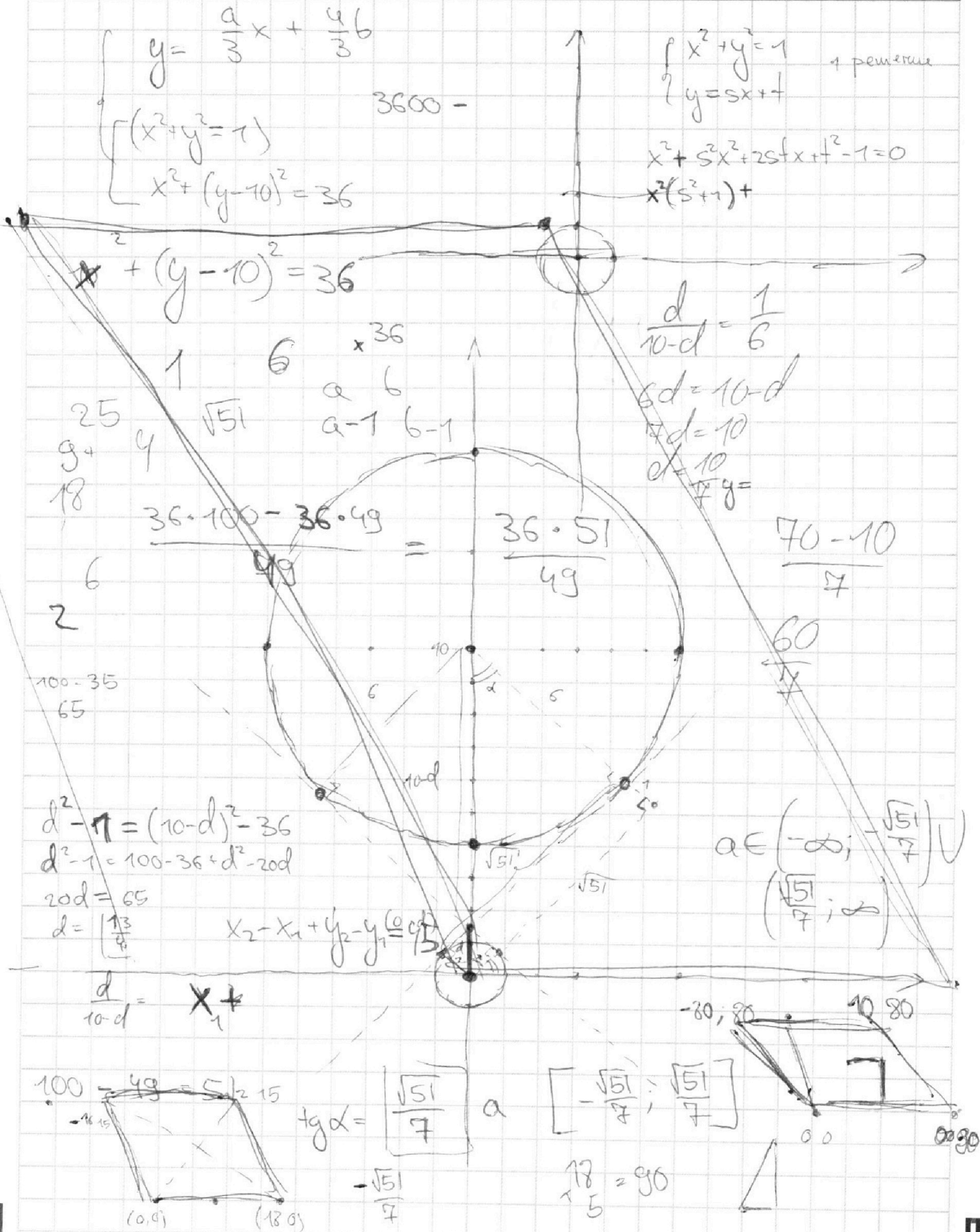
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad ((s+t)(s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4+3)=0$$

$$\log_{2x} 5 = t \quad \begin{matrix} 5^2 \\ 1 \\ 25 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{t^4} - 3t = \frac{4}{3}t - 3$$

$$\left( \frac{13t}{3} - \frac{1}{t^4} - 3 = 0 \right)$$

$$\frac{13s}{3} + \frac{1}{s^4} + 3 = 0$$

$$\log_y 5 = s$$

$$\frac{1}{s^4} + 4s = -\frac{1}{3}s - 3$$

$$\frac{13}{3}s - \frac{1}{s^4}$$

$$\left( \frac{13}{3}t - \frac{1}{t^4} - 3 = 0 \right)$$

$$\log_5 y = s$$

$$\frac{13}{3t} - \frac{1}{t^4} - 3 = 0$$

$$\frac{13}{3s} + s^4 + 3 = 0$$

$$\frac{13}{3} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) + s^4 - t^4 = 0$$

$$s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0$$

$$s^5 + t^5 + 3t + 3s = 0$$

$$\frac{13}{3} \left( \frac{t+s}{ts} \right) + (s-t)(s+t)(s^2+t^2) = 0$$

$$(t+s) \left( \frac{13}{3ts} + (s-t)(s^2+t^2) \right) = 0$$

$$t+s=0 \quad \log_5 2x + \log_5 y = 0 \quad \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$13 = 3ts(t-s)(s^2+t^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$x+y \geq 28$$

$$y+z \geq 12$$

$$z+x \geq 14$$

$$2(x+y+z) \geq 34$$

$$x+y+z \geq 17$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 21 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$a =$$

$$x+y =$$

✓

7

N

$$x+y+z = 17$$

$$z = 3$$

$$x = 5$$

$$y = 3$$

$$y =$$

C

$$\frac{1}{1}$$

$$a+b \geq 12$$

$$b+c \geq 17$$

$$(a+c \geq 39)$$

$$c = 20$$

a

$$\log_{8 \times 3} 625 = \frac{1}{\log_{625} 8 \times 3}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4} \log_5 24}$$

$$x+y+z = 28$$

$$x+y = 15$$

$$y+z = 20$$

$$z+x = 21$$

$$z = 13$$

$$x = 8$$

$$y = 7$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 17 \\ + 29 \\ + 39 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$14$$

$$x+y+z = 34$$

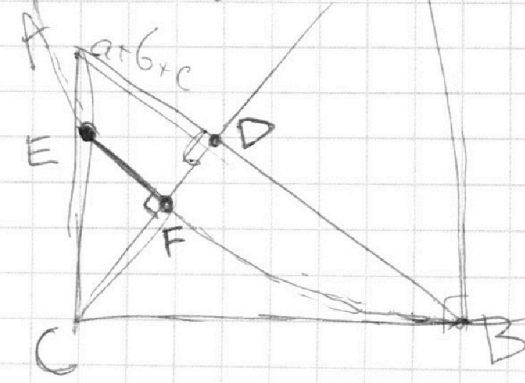
$$x+y = 12$$

$$y+z = 17$$

$$z+x = 39$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 68 \end{array}$$

$$2(a+b+c) \geq 68$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

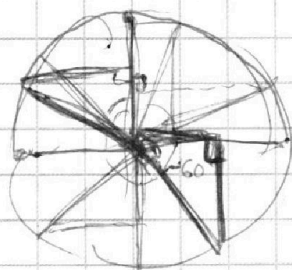


$$\sin(0) = 0$$

$$0 = 0$$

$$10 \arcsin(0) = 0$$

$$10 \arcsin(\phi) = \pi$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\right)$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$

5

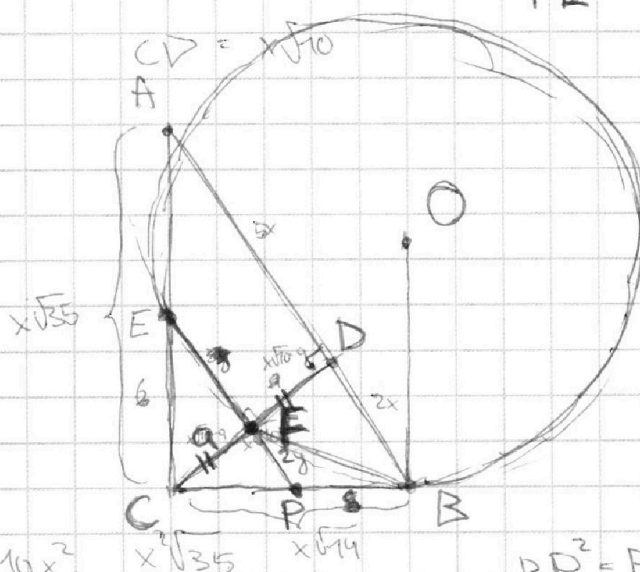
$$\frac{5\sqrt{10}}{10} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$\frac{5x}{CD} = \frac{CD}{2x}$$

$$CE \cdot CA = BC^2$$

$$PE = 2$$

$$\begin{aligned} &35 \\ &- 14 \\ &49 \\ &90 - (-60) \\ &= 150 \end{aligned}$$



$$PF = \frac{2x}{x\sqrt{10}} \cdot a$$

$$PE = \frac{4x}{x\sqrt{10}} \cdot a$$

$$CP = \frac{x\sqrt{14}}{x\sqrt{10}} \cdot a$$

$$BP = x\sqrt{14} \left(1 - \frac{a}{x\sqrt{10}}\right)$$

$$= x\sqrt{14} \left(\frac{x\sqrt{10} - a}{x\sqrt{10}}\right)$$

$$25x^2 + 10x^2$$

$$x\sqrt{35}$$

$$\frac{a}{x\sqrt{10}} = \frac{b}{x\sqrt{35}}$$

$$b = a \frac{x\sqrt{35}}{x\sqrt{10}} = a \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x\sqrt{35} = a \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$7ax^2 = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

2

$$14 \left( \frac{10 + a^2 + 2a\sqrt{10}}{10} \right) = \frac{14a^2}{10}$$

$$14(10 + a^2 + 2a\sqrt{10}) = 14a^2$$

$$140 = 28a\sqrt{10}$$

$$5 = a\sqrt{10}$$

$$a = \boxed{\frac{5}{\sqrt{10}}} =$$