МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

А значит $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Пример: $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$
$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$
$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

Как мы уже знаем для таких a, b, c выполняется условие.

Ответ: $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Часть 1

Обозначим степень вхождения 2 в a, b, c за $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно, степени вхождения 3 за $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, а степени вхождения 5 за $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Тогда из делимости следует, что

1) $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9.$ $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$ $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 19$

2) $\beta_1 + \beta_2 \geq 10$ $\beta_2 + \beta_3 \geq 13$ $\beta_3 + \beta_1 \geq 18$

3). $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 10$ $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$ $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 30.$

Здесь все переменные целые неотрицательные числа.

Рассмотрим первую систему. Сложим все неравенства. Получим. $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 9 + 14 + 19 = 42$

Значит $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 21$ Пример где выполняется равенство $\alpha_1 = 7$ $\alpha_2 = 2$ $\alpha_3 = 12$ легко видеть, что и система выполняется.

Теперь рассмотрим вторую систему. Сложим все. Получим $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41$ но т.к $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$ - четное то. $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21$ Пример $\beta_1 = 7$ $\beta_2 = 3$ $\beta_3 = 11$, Так-же понимаем, что система выполняется.

Теперь рассмотрим систему 3.

~~Сложим все получим~~

~~Знач~~ $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$

Пример

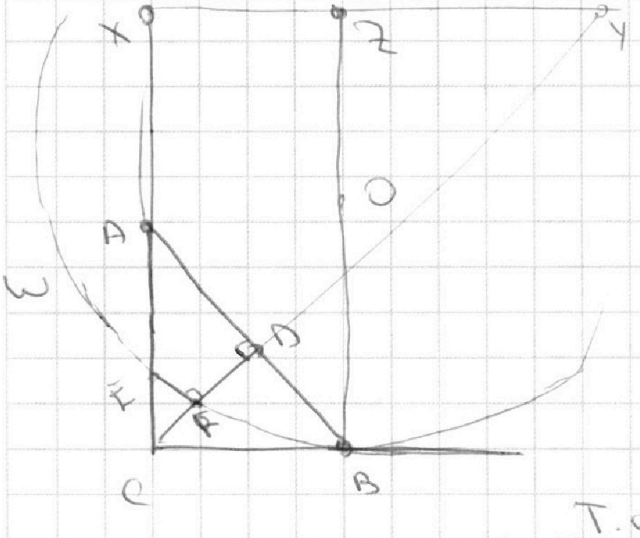
$\gamma_2 = 0$ $\gamma_1 = 15 = \gamma_3$. Так-же система выполняется.

Итого получаем, что abc делится на $2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



известно, что

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC^2}{BC^2} = 3$ т.е

$\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ т.е $tg\angle B = \sqrt{3}$

т.е $\angle B = \frac{\pi}{3}$

$X = AC \cap \omega$ $Y = CF \cap \omega$ EY - диаметр

т.к $\angle EFD = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle EXY = \frac{\pi}{2}$

O - центр ω $\Rightarrow Z \in BO \cap XY$ $\angle CBO = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle XZB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $XZBC$ - прямоугольник

$XZ = ZY$ в силу симметрии относительно ZB (диаметр.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$5\pi - 10x = \pi + 2x$

$4\pi = 12x \to x = \frac{\pi}{3}$

Проверим, что $x = \frac{\pi}{3}$ подходит.

$5\arcsin(\cos x) = 5\arcsin(\frac{1}{2}) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} =$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Часть 1

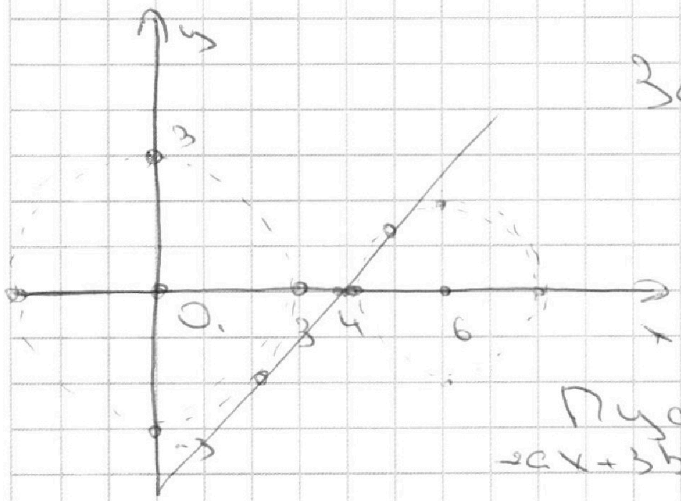
Рассмотрим случаи когда.

$x^2+y^2-9=0$ $\quad x^2+y^2-12x+32=0$. Заметим, что

$x^2+y^2=3^2$; $(x-6)^2+y^2=4$. Это окружности

с центрами в точках $O_1(0,0)$ и $O_2(6,0)$

и радиусами 3 и 2.

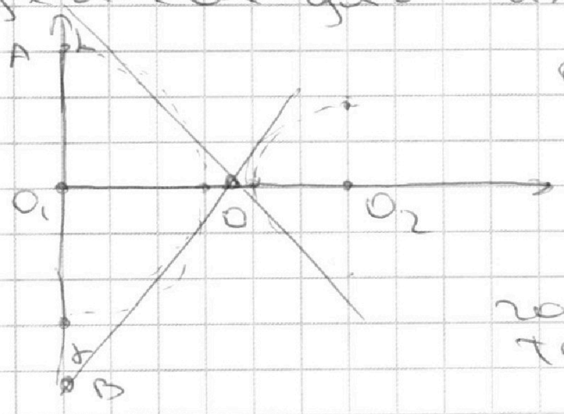


Заметим, что при фиксированном a и изменение b ~~[illegible]~~ угол прямой $ax+2y-3b=0$ не изменяется.

Пусть мы зафиксировали. $-ax+3b=2y$. Тогда

Пусть $a<0$, Проведем общую внутреннюю касательную с положительным коэ-ф наклона

Тогда ~~[illegible]~~. понятно, что прямая с коэф наклона больше чем у этой касательной она пересекает одну из окружностей не более чем в одной точке. Аналогично сделаем для $a>0$. Получим картинку



O - точка пересечения касательных лежит на линии центров т.к. является одним из центров гомотетии этих окружностей.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

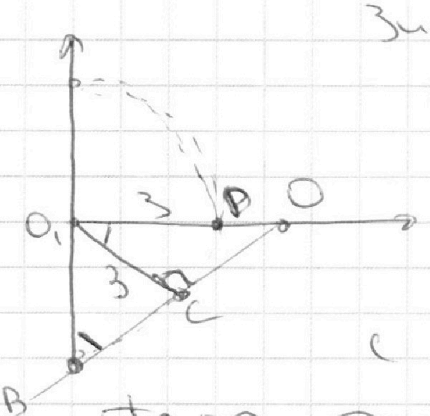
Часть 2.

Пусть тогда A и B точки пересечения общих касательных и оси ординат.

$\angle ABO = \angle BAO = \alpha$. Тогда нам подходят прямые с углом наклона $[0; \alpha) \cup (-\alpha; 0]$.

Найдем это α. Точка O делит O_1O_2 в отношении $\frac{3}{2}$ т.к. центр гомотетии.

Значит $O\left(\frac{6 \cdot 3}{5}; 0\right)$



Пусть D = пересечение OO_1 и окружности с центром O_1 т.е $D = (3;0)$, а C - точка касания это окружности с общей касательной

~~Тогда $OD \cdot DO_1 = OC^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{3^3 \cdot 2}{5^2}$~~

$\frac{CO}{OO_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 3^2}}{\frac{18}{5}} = \sqrt{1 - 9 : \frac{18^2}{5^2}} = \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 5^2}{18^2}} =$

$= \sqrt{1 - \frac{5^2}{2 \cdot 18}} = \sqrt{\frac{36-25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ Заметим, что

это $tg(\angle CO_1O) = tg(\angle O_1BO) = \frac{\sqrt{11}}{6}$

Т.е мы получаем, что $\frac{a}{2} \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$ ~~Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{11}}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$~~.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Часть 3

Нам нужно чтобы прямая пересекала эти две окружности в 4 точках т.к. прямая - это ~~нер.~~ решение 1-ого уравнения 2-окружности второго.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{4}}{3}; \frac{\sqrt{4}}{3}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Часть 1

Пусть $a = \log_3 x$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 =$

$= \frac{1}{2}\log_x 3^5 - 8 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$ Домножим на

$2a \,|\, 2a^5 + 12 = 5 - 16a$. получим

$2a^5 + 16a + 7 = 0$. Заметим, что

все нечетные степени нечетные значит

~~корень~~ ~~для~~ $a^5 + 16a + 7$ монотонна.

~~Значит~~ Значит корень ровно один пусть это

x. Рассмотрим теперь второе условие

Пусть $b = \log_3(5y)$

$\log_{25y^2}(3^4) - 8 = \frac{4}{2}\log_{5y}(3) - 8$. т.е

делая замену получим.

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{4}{2b} - 8$ умножим на

$2b$.

$2b^5 + 4 = 4 - 16b$

$2b^5 + 16b - 7 = 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Часть 2.

Аналогично $2b^5+16b-7$ монотонно а значит имеет ровно один корень докажем, что это $-x$. Действительно мы знаем, что $2x^5+16x+7=0$. тогда $2(-x)^5+16(-x)-7=0$. Значит

$0=x+(-x)=\log_3 x+\log_3 5y=$

$\log_3 5xy=0 \Rightarrow 5xy=1 \Rightarrow xy=\frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

часть 2

через хотя-бы одну целую точку $x_0;y_0$ то $3x_0+8y_0=A \Rightarrow A\in\mathbb{Z}$. Но тогда рассмотрим l_2 и l_1 ~~вектор~~

~~Найдем это на l_2 столько и на столько~~ не целых точек сколько и на PD

Посчитаем, кол-во целых точек на прямой $3x+\cancel{8}y=A$ в нашем параллелограмме. ~~Это~~ Среди них $(0;A)$. Тогда ~~все~~ $(k;A-3k)$ вообще $k\in\mathbb{Z}$. все целые точки на этой прямой. Но $A-3k\in[0;42]$. Т.е ~~если нужно~~ количество точек на этой прямой это количество чисел от 0 до 42 с остатком как у A по модулю 3. Таких 14 если $A\not\equiv_3 0$ и 15 если $A\equiv_3 0$.

Но т.к $A\equiv_3 A-33$ то на $3x+y=A-33$ лежит столько же целых точек внутри как и у $3x+y=A$.

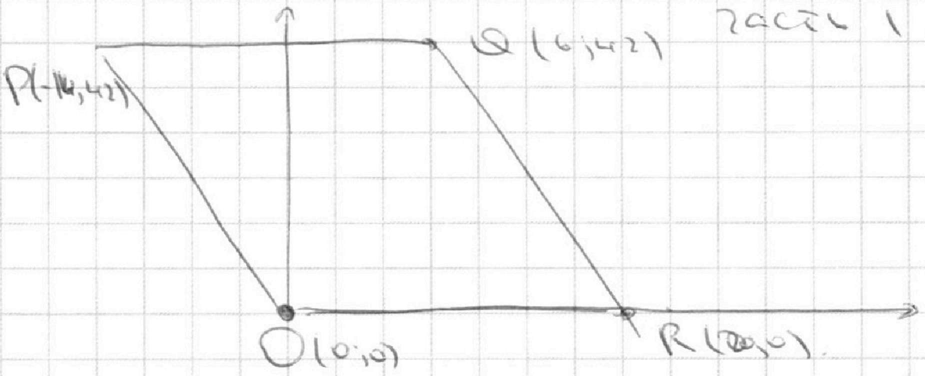
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Часть 1.



Пусть у нас есть прямая l_2 и l_1.
$3x_2+y_2=A$ и $3x_1+y_1=A-33$. Тогда
$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$. Т.е одну точку мы выбираем на прямой $3x+y=A$, а другую на $3x+y=A-33$. ~~Обозначим прямые~~ Найдем такие A, что обе прямые будут пересекать параллелограмм. Заметим прямая PO — это $3x+y=0$. Значит l_2 и l_1 и PO и QR. А значит PO и QR и являются этими крайними положениями. пусть QR $= 3x+y=A$ $\Rightarrow A=60$

Т.е $\begin{cases} A\in[0;60] \\ A-33\in[0;60] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\in[0;60] \\ A\in[33;93] \end{cases} = A\in[33;60]$

Так-же если $3x+y=A$ проходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Часть 3. ~~Р~~ Посчитаем теперь пары точек. 1) $A \equiv_3 0$ $A \in [33;60]$ Таких A 10 A для каждой A у нас 2 прямые по 15 точек на каждой т.е $10 \cdot 15^2$ 2) $A \not\equiv_3 0$ $A [33;60]$ Таких A соответственно 18 для каждой 2-прямые по 14 точек т.е всего пар

$14^2 \cdot 18$.

Итого получаем

$10 \cdot 15^2 + 14^2 \cdot 18 = 2250 + 196 \cdot 18 =$

$2250 + 200 \cdot 18 - 4 \cdot 18 = 2250 + 3600 - 72 =$

$5850 - 72 = 5778$.

Ответ: 5778.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_{x^2} a = \frac{1}{2}\log_x 243 = \frac{1}{2}\log_x 3^5 =$

$\frac{5}{2}\log_x 3$

$\log_3 x = a$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$

$2t^5 + 12 = 5 - 16t$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$\log_3 54 = b$

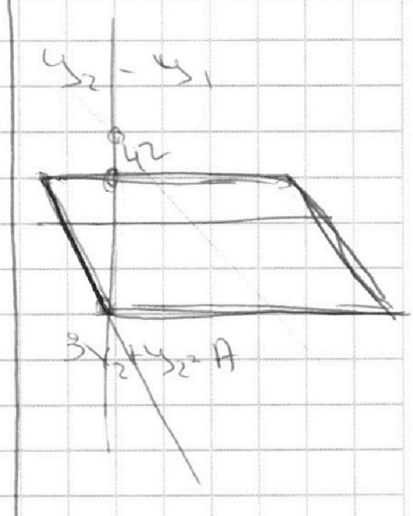
$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{4}{2}\frac{1}{b} - 8$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{43}{2b} - 8$

$2b^5 + 4 = 11 - 16b$

$2b^5 + 16b - 11 = 0$

$10b^4 + 16 = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

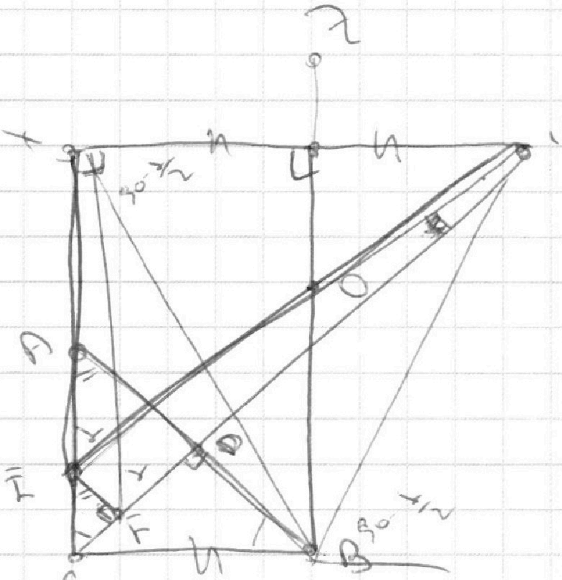
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\left(\frac{CE}{AB}\right)^2$

$\cancel{CE \cdot EX} = CF \cdot CY$

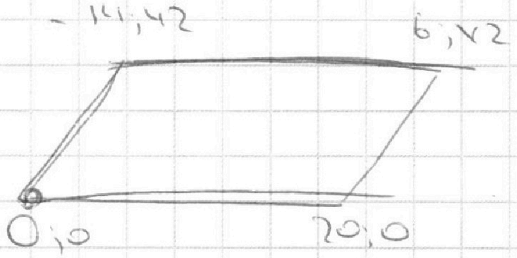
$\frac{EF}{AD} = \cancel{XY} \quad \frac{EF}{XY} \cdot \frac{XY}{AD} = \frac{EF}{XY} \cdot \frac{CY}{CA}$

$\frac{EF}{CA}$

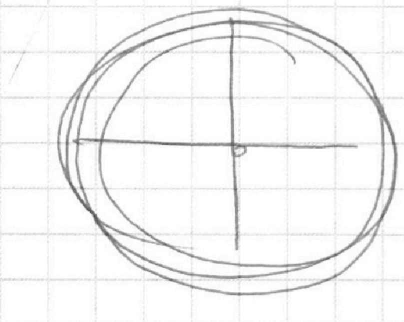


$\frac{BC}{XC} \cdot \frac{BC}{CE} = ctg(30 - \frac{x}{2})$

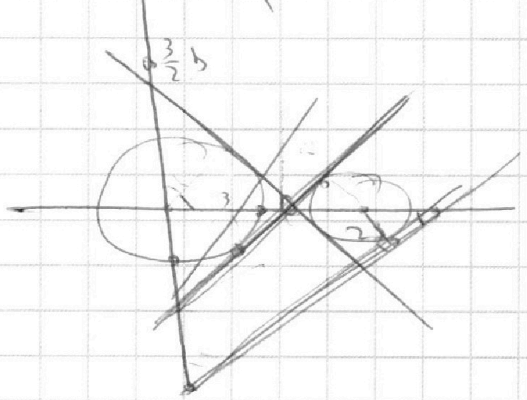
$\frac{BC}{CF} = tg$



$\cancel{\quad} \quad \frac{\pi}{2} - x$



$(x-6)$



$b = 2b_0$

$a = 2a_0$

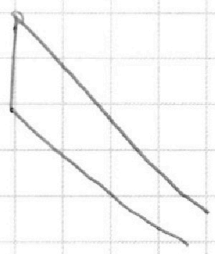
$a_0 x + y - 3b_0 = 0$

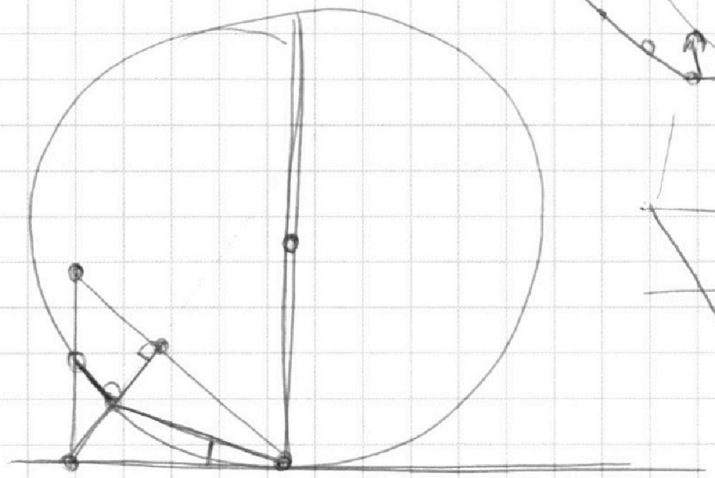
$-a_0 x + 3b_0 = y$

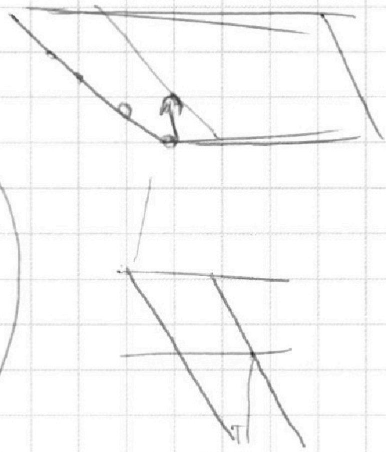
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

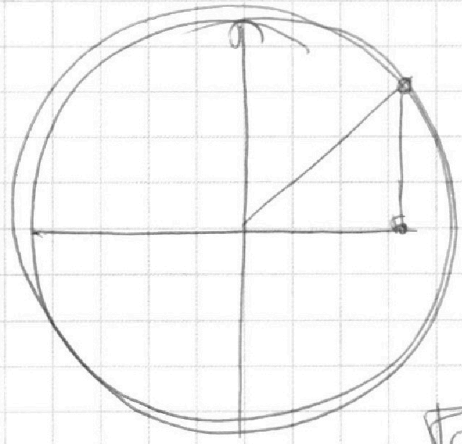
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\boxed{\cos x = \sin \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}}$$

$$\boxed{\arcsin(\sin x) = x}$$

60 $\sin \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$5 \cdot 30 = 60 + 90$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 Л_1 Л_2 Л_3 $\text{Л}_1+\text{Л}_2 \geq 9$

3 B_1 B_2 B_3 $\text{Л}_2+\text{Л}_3 \geq 14$

5 $У_1$ $У_2$ $У_3$ $\text{Л}_1+\text{Л}_3 \geq 19$

$2(\text{Л}_1+\text{Л}_2+\text{Л}_3) \geq 9+14+19 = 28+14 = 42$

$\text{Л}_1+\text{Л}_2+\text{Л}_3 \geq 21$ $\text{Л}_3 = 12$ $\text{Л}_2 = 2$ $\text{Л}_1 = 7$

$B_1+B_2 \geq 10$

$B_2+B_3 \geq 13 | 14$

$B_3+B_1 \geq 18$

$2(B_1+B_2+B_3) \geq 41.$ $42\ldots$

$У_1+У_2 \geq 10$

$У_2+У_3 \geq 13$

$У_3+У_1 \geq 30$

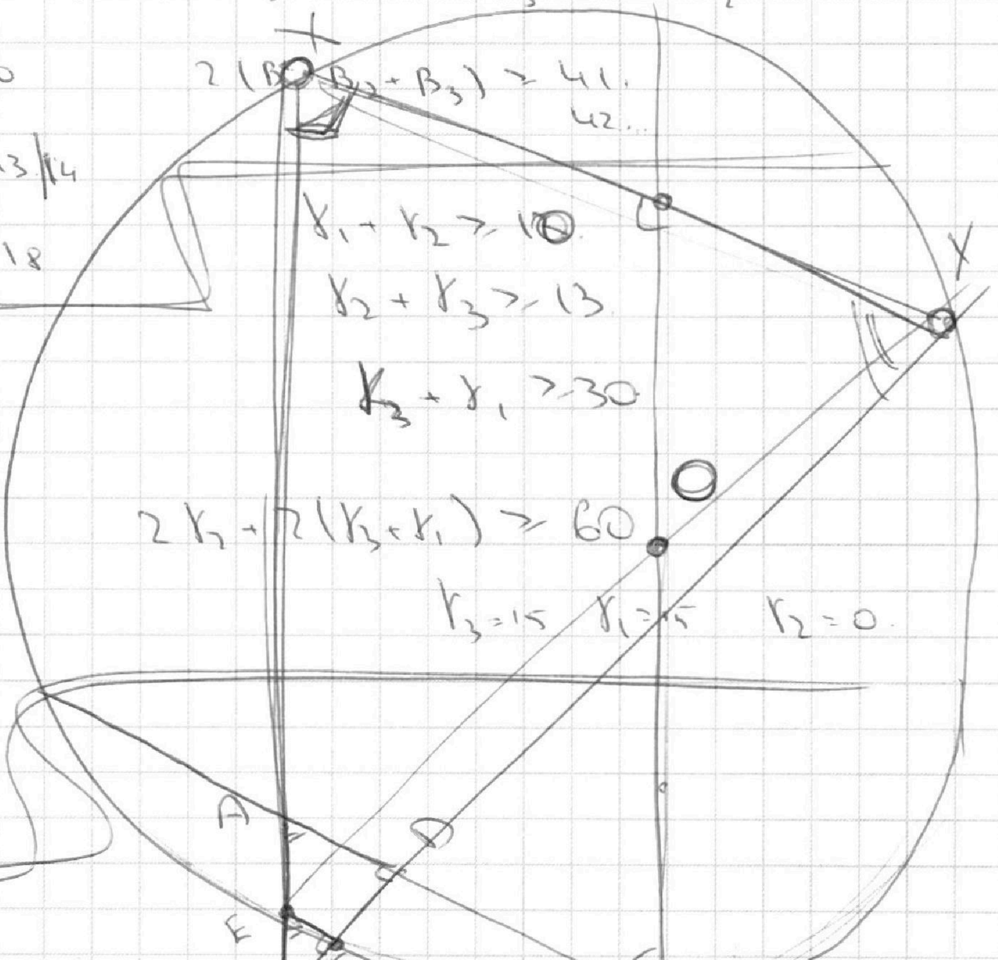
$2У_2+2(У_3+У_1) \geq 60$

$У_3 = 15$ $У_1 = 15$ $У_2 = 0.$

$B_1 = 7.$

$B_2 = 3.$

$B_3 = 11.$



$\frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BD}$

$BC^2 = AB \cdot BD$

$AC^2 = AB \cdot AD$

$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}.$

$\frac{AD}{BD} = \boxed{\frac{AC^2}{BC^2}}$ $k = \sqrt{3}$