МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☑	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1.

Из условия следует, что $\exists\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, такие что

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k_1 \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k_2 \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot k_3 \end{cases};$$

~~Значит~~ $\cancel{(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5}$

Значит $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k_1 k_2 k_3$

т.е $(abc)^2 \vdots\ 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

Т.к. $(abc)^2$ - точный квадрат, то 3 входит

в разложение $(abc)^2$ в чётной степени $\Rightarrow$

$(abc)^2 \vdots\ 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, откуда следует, что

$\cancel{abc \vdots 2^{36}}$ $abc \vdots\ 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, однако т.к. $ac \vdots 5^{28}$, то

$abc \vdots\ 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$;

Тогда $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$; $bc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14}$; $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$

Понятно, что условие задачи выполняется.

В свою очередь $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

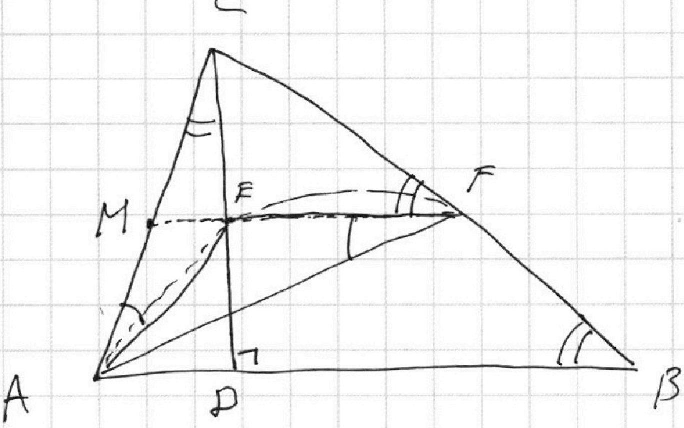
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☑ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2



1) т.к. AC касается окружности (AEF)

$\angle CAE = \angle EFA$

2) т.к $EF \parallel AB$, то

$\angle ACD = \angle CBD = \angle CFE$, первое равенство следует из $\angle ACD + \angle BCD = 90° = \angle BCD + \angle CBD$, отсюда AC касается окружности (CEF)

3) Пусть теперь $M = EF \cap AC$ $\Rightarrow$ из касаний прямой AC и окружностей (CEF) и (AEF)

$MC^2 = ME \cdot MF = MA^2 \Rightarrow MC = MA \Rightarrow M$ - сер. AC

т.к. $EF \parallel AB$, EF проходит через середину AC, EF - ср. линия ~~$\Delta CAB \Rightarrow EF = \Delta$~~ $\Delta CBD \Rightarrow$

$EF = \frac{BD}{2}$.

4) $AD = AB - BD = 1{,}4BD - BD = 0{,}4BD \Rightarrow$

$CD^2 = AD \cdot BD = 0{,}4 BD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{0{,}4}\, BD \Rightarrow$

при этом ΔCAD и ΔCEF подобны по 2-ум углам

$(\angle CFE = \angle ACD$ (п.2); $\angle CEF = 90° = \angle ADC) \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \frac{0{,}4BD^2}{0{,}25BD^2} = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
		V				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 (стр. 1)

$10\arccos(\sin x)+10\arcsin(\sin x)=5\pi \Rightarrow$

$10\arccos(\sin x)=5\pi-10\arcsin(\sin x) \Rightarrow$

$5\pi-10\arcsin(\sin x)=9\pi-2x$

$2x-4\pi=10\arcsin(\sin x) \quad (*)$

Заметим, что $\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$10\arcsin t \in [-5\pi;5\pi] \Rightarrow$

$2x-4\pi \geq -5\pi$ т.е $x \geq -\frac{\pi}{2}$

$2x-4\pi \leq 5\pi \Rightarrow x \leq \frac{9\pi}{2}$

Разберём 5 случаев.

1) $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; тогда $\arcsin(\sin x)=x \Rightarrow$

$(*)$ переписывается в виде

$10x=2x-4\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$, такой x попадает

на требуемый отрезок $\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ - корень

2) $x \in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$; тогда $\arcsin(\sin x)=\pi-x$, подставив в $(*)$

$2x-4\pi=10\pi-10x$

$12x=14\pi \Rightarrow x=\frac{7}{6}\pi$, т~~акой x~~ $\frac{7}{6}\pi \in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}] \Rightarrow$

$\frac{7}{6}\pi$ - корень.

3) $x \in [\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$; ~~$\arcsin x=$~~ тогда $\arcsin(\sin x)=x-2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3. Продолжение (стр.2)

Подставив это в (*)

$$10x - 2\pi = 2x - 4\pi$$

$$x = 2\pi;\ 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow 2\pi \text{ - корень}$$

4) $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow$ ~~arc sin(sin x) = 30π − 10x~~

$\arcsin(\sin x) = 3\pi - x$, подставив в (*)

$$30\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$x = \frac{17}{6}\pi;\ \frac{17}{6}\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$\frac{17}{6}\pi$ - корень.

5) $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin x = x - 4\pi \Rightarrow$

подставив в (*)

$$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$$

$$x = \frac{9}{2}\pi;\ \frac{9}{2}\pi \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$\frac{9}{2}\pi$ - корень

Выше было доказано, что $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$

рассмотрение данных 5-ти случаев достаточно.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7}{6}\pi$; 2π; $\frac{17}{6}\pi$; $\frac{9}{2}\pi$

Задача 4 (стр 1)
Продвижения.

Рассмотрим каждое из ур-ий системы

$$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \quad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{x^2+y^2=25} \\ \cancel{x^2+(y+9)^2=4} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$$

Значит графиком этого ур-ия (1) является 2 окружности с центрами $(0;0)$ $(0;-9)$ и радиусами 5 и 2 соответственно. (ω_1 и ω_2)

$$5x+6ay-b=0 \quad (2)$$

$$y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a}.$$

Значит графиком 2-го ур-ия является прямая.

Тогда с помощью „а" мы можем изменять её угловой коэфф.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☑	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5. (стр 1.)

Пусть $a=\log_{11}x \qquad b=\log_{11}(0{,}5y) \Rightarrow$

$6\log_{x}11=\frac{6}{a}$; $\log_{(0,5y)}11=\frac{1}{b}$

$$\log_{x^3}\frac{1}{121}=\frac{\log_x\frac{1}{121}}{3}=\frac{\log_x 11^{-2}}{3}=-\frac{2\log_x 11}{3}=-\frac{2a}{3}$$

$$\log_{(0,125y^3)}\left(11^{-13}\right)=\frac{\log_{(0,5y)}\left(11^{-13}\right)}{3}=-\frac{13}{3}b$$

Подставляя это всё в данные равенства получаем.

$$\begin{cases} a^4-\frac{6}{a}+\frac{2}{3a}+15=0 & \Big|\cdot 3a \\ b+\frac{1}{b}+\frac{13}{3b}+5=0 & \Big|\cdot 3b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5+15a-18+2=0 \\ 3b^5+15b+13+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5+15a=16 \\ 3b^5+15b=-16 \end{cases}$$

Т.к. производная $\left(3x^5+15x\right)'=15x^4+15>0$ каждое своё значение она принимает ровно 1 раз.

Задача 5 (стр 2.)

Теперь заметим, что.

если $3a^5+15a=16$, то.

$3(-a)^5+15(-a)=-16 \Rightarrow$

т.к. ~~$f(x)=3x^5+15a$~~ $f(x)=3x^5+15x$

принимает каждое значение ровно

по 1-ому разу $a=-b \Rightarrow$

$\log_{11}x+\log_{11}(0{,}5y)=a+b=0 \Rightarrow$

$\log_{11}(0{,}5xy)=0 \Rightarrow$

$0{,}5xy=11^0=1 \Rightarrow xy=2$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☑

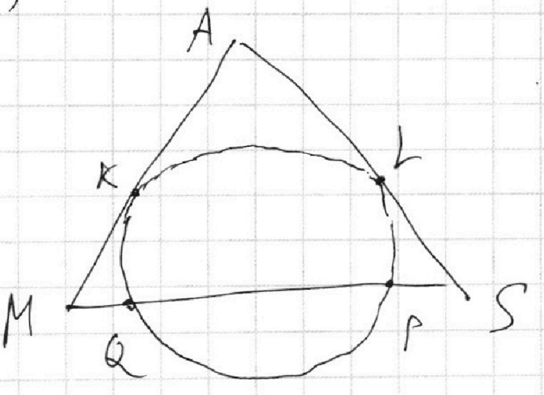
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 (стр 1)

1) Посмотрим на плоскость (ASM). Назовём её α. Известно, что α сечёт Ω по окружности, назовём эту окр ω, тогда т.к. Ω касается AS и AM в точках L и K, то и ω касается AS и AM в точках L и K. а также пересекает SM в тех же точках P и Q, то и Ω. БОО $P \in SQ$.

2)



Тогда

$SQ = SP + PQ = MQ + PQ = MP \Rightarrow$

$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = MK^2 \Rightarrow$

$SL = MK$; $AK = AL$ $\Rightarrow$

$AM = AS = 20$

M-точка пересечения медиан $\Delta BAC \Rightarrow$

$AA_1 = AM \cdot \frac{3}{2} = 30$.

3) По условию S_{ABC}. Пусть тогда AH-его высота (БОО H лежит с той-же стороны от A_1, что и B, далее из решения будет понятно, что H и A_1 не совпадают, т.к. $AA_1 \neq AH$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

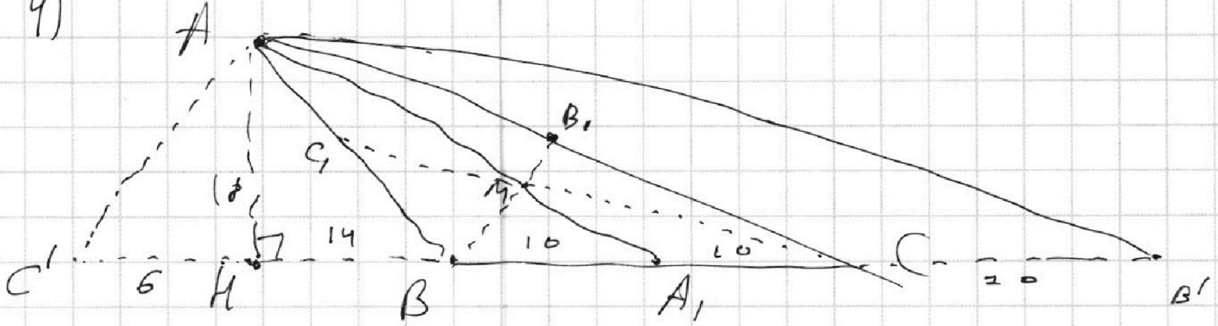
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☑

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7. Продолжение. (стр 2)

4)



Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18 \Rightarrow$

$HA_1^2 = AA_1^2 - AH^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2$ (т. Пифагора для $\triangle AHA_1$) $\Rightarrow$

$HA_1 = 24 \Rightarrow HB = 14$

5) Отразим т. B относительно C, получив B'

Тогда $CM \parallel AB'$ (т.к. $\frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3} = \frac{A_1C}{A_1B'}$)

$HB' = HB + 2BC = 14 + 40 = 54 = 3 \cdot 18 \Rightarrow$ по т. Пифагора ($\triangle AHB'$)

$AB'^2 = AH^2 + HB'^2 = 18^2 + 9 \cdot 18^2 = 10 \cdot 18^2 \Rightarrow (AB') = 18\sqrt{10} \Rightarrow$

$\cancel{CM}\ CC_1 = CM \cdot \frac{3}{2} = \frac{AB'}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{AB'}{2} = 9\sqrt{10}$

6) Отразим C относ. B, получив C', тогда

аналогично (п.5) $AC' \parallel BM$, B - середина $CC' \Rightarrow$

BB_1 - ср. линия $\triangle ACC'$; легко получить, что $CC' = 6 \Rightarrow$

$(AC')^2 = 6^2 + 9 \cdot 6^2 = 10 \cdot 6^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{10}\, 6 \Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{10} \Rightarrow$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} \cdot 30 = 9 \cdot 9 \cdot 100 = 8100$

Ответ: 8100 (пункт а)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 ✓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

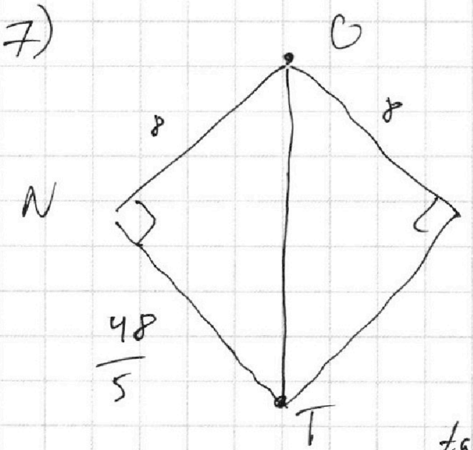
Задача 7 (стр 4.)

Из первой части решения $AH = 18$

$\triangle AHA_1$ очевидно подобен $\triangle KTA_1 \Rightarrow$

$$KT = AH \cdot \frac{A_1K}{AA_1} = AH \cdot \frac{AA_1 - AK}{AA_1} = 18 \cdot \frac{30-14}{30} = 18 \cdot \frac{16}{30} = \frac{16 \cdot 3}{5} = \frac{48}{5}$$

7)



Рассм. плоск. $(ONTK)$

очевидно.

$ONTK$ – дельтоид $\Rightarrow$

$\angle NTK = 2 \cdot \angle NTO$

$$tg \angle NTO = \frac{NO}{NT} = \frac{8}{48} \cdot 5 = \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$\angle NTO = arctg\frac{5}{6}$ (очевидно $\angle NTO$ – острый) $\Rightarrow$

$\angle NTK = 2\,arctg\frac{5}{6}$.

~~Ответ: 8100 (пункта)~~, а) 8100, б) $2arctg\frac{5}{6}$

~~Задача 7 (стр 4)~~

Здесь мы пользовались тем, что ON и OK перпендикулярны (SBC) и (ABC) соответственно т.к. Ω касается этих граней в точках N и K

Ответ: а) 8100, б) $2arctg\frac{5}{6}$

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$

$10 \arccos(\sin x) + 10 \arcsin(\sin x) = 5\pi \Rightarrow$

$10 \arcsin(\sin x) = \cancel{2x-4}\ 2x - 4\pi$

$\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arcsin t \in [-5\pi; 5\pi]$

Тогда $2x - 4\pi \geq -5\pi$ т.е $2x \geq -\pi$

$2x - 4\pi \leq 5\pi$ т.е $2x \leq 9\pi$

$x \geq -\frac{\pi}{2}$; $x \leq 4\frac{1}{2}\pi, \frac{9\pi}{2}$

1) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$10 \arcsin(\sin x) = 10x = 2x - 4\pi \Rightarrow -8x = 4\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}.$

2) $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin x) + x = \pi \Rightarrow$

$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$

$14\pi = 12x \quad x = \frac{7}{6}\pi$

3) $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$10x - 20\pi = 2x - 4\pi$

$8x = 16\pi \quad x = 2\pi$

4) $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin x) \cancel{+} x = 3\pi$

$30\pi - 10x = 2x - 4\pi \quad 34\pi = 12x \Rightarrow x = \frac{34}{12}\pi \quad \frac{17}{6}\pi$

5) $x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$

$\arcsin x = x - 4\pi$

$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$

$8x = 36\pi$

$x = \frac{9}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$~~

$a+b$.

$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0$.

$\frac{1}{b^4}$

$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0$

$\log_{11} 0,5xy = t$

$0,5xy = 11^t$

$3a^5 - 18 + 2 + 15a = 0$

$x, y > 0$.

$+$

$3b^5 + 3 + 13 + 15b = 0$.

$x \neq 1$.

$3(a^5+b^5) + 15(a+b) - 16 + 16 = 0$.

$y \neq 2$.

$a^5+b^5 + 5(a+b) = 0$.

$(a+b)(a^4+b^4) = a^5+b^5 + ab(a^3+b^3) = 5(a+b) + ab(a^3+b^3)$

$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 5$

$\geq 5a^2b^2 \quad a^2b^2 \leq 1$.

$a^5 + 5a = 16$. t. $-t$.

$b^5 + 5b = -16$. $5a^4 + 5 > 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

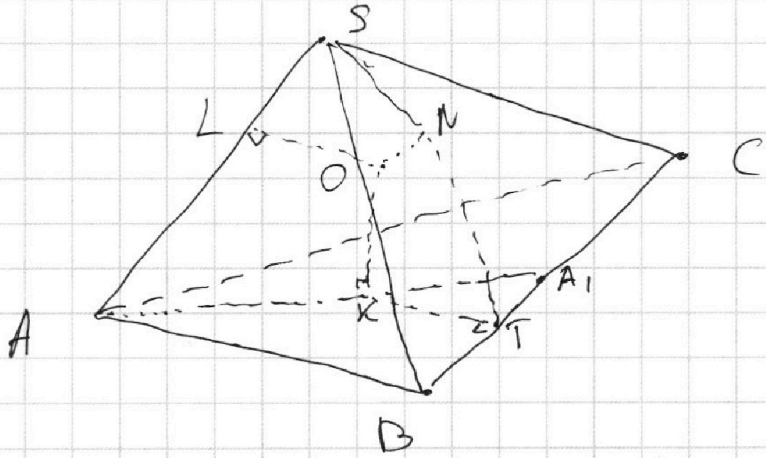
МФТИ

Задача 4 (стр 2).

а после этого с помощью „в" параллельно её сдвигать, тогда нужно найти все такие „а", что можно параллельно сдвинуть прямую $y = -\frac{3x}{6a}$ так, чтоби она пересекала обе окружности ω_1 и ω_2 в двух точках ~~#~~ (при $a=0$ $b=0$ подходит).

Задача 7. Продолжение. (стр 3)

б)



Пусть O – центр Ω

Рассм. ΔSON и ΔSOL – прямоугольные

SO – общая, $OL = ON = 8$ – радиусы Ω $\Rightarrow$ они

равны $\Rightarrow SL = 6$, тогда $AL = 20 - 6 = 14$, т.к. $AL = AK$,

то $AK = 14$

Пусть T такая точка на BC, что

$KT \perp BC$ (возможно T не лежит на отр. BC)

Тогда $BC \perp KT$, $BC \perp OK \Rightarrow BC \perp (OKT) \Rightarrow$

$\underline{BC \perp OT}$, но BC также $\underline{BC \perp ON} \Rightarrow$

$BC \perp (ONT) \Rightarrow BC \perp NT \Rightarrow \angle NTK =$

двугранный угол $SABC$ при ребре BC.

причём все точки O, N, T, K лежат

в одной плоскости, которая проходит

через T перпендикулярно BC

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \end{cases}$ $kx+b$ $D=4k^2b^2-4(k^2+1)(b^2-25)$

$-kx-b$

$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ y=kx+b \end{cases}$ $x^2+k^2x^2+b^2+2kxb=5^2.$

$(k^2+1)x^2+2kbx+b^2-25=0.$

$4k^2b-4(k^2b^2+b^2-k^2-25)=$

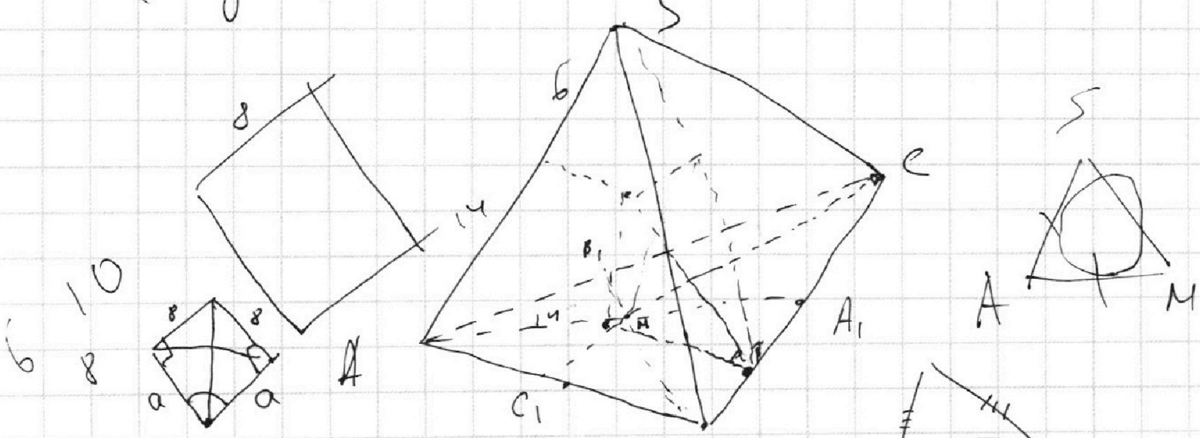
$=\cancel{4k^2b-4k^2b}-4b^2+100k^2+100$

$100(k^2+1)-4b^2=0.$ $x=ky+s$

$25(k^2+1)=b^2$ $y=$ $D=4k^2s^2+324+72ks-$

$k^2y^2+s^2+2kys+y^2+18y+77=0. \Rightarrow -4(k^2s^2+s^2+77k^2+77)=$

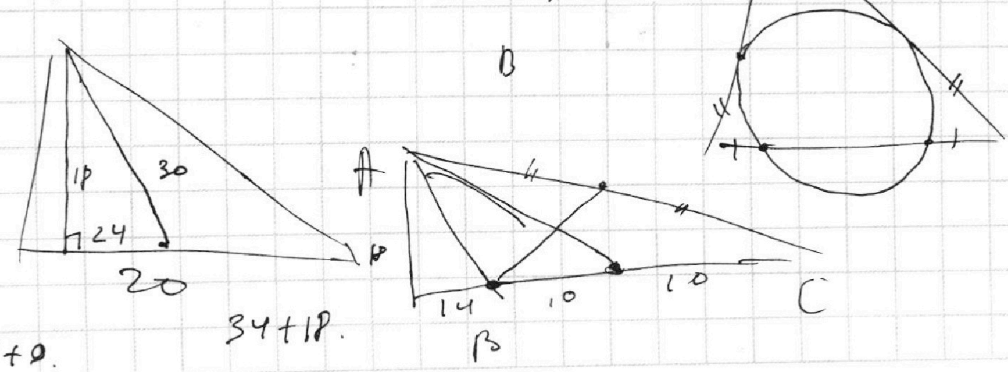
$(k^2+1)y^2+(2ks+18)y+s^2+77=0.$ $=324$



1
$\begin{array}{r} 289 \\ +\ 81 \\ \hline 370 \end{array}$

$37\cdot 10$

~~324~~



$34+18.$

$17+9.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^x = b \quad b^{yx} = a^x = b \quad a^x b^y = ab.$

$a^{x \cdot \frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}} \quad b^t = a. \quad xy = 1$

$a^2 - \frac{6}{a} = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$

$\log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{\log_x \frac{1}{121}}{3.} = \frac{-\log_x 121}{3} = \frac{-\cancel{\log} -2\log_x 11}{3}.$

$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$

$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$

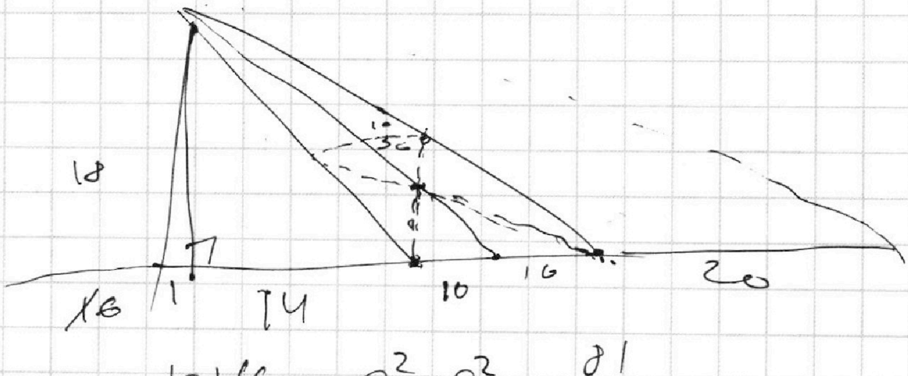
$1 - 6a^5 = -\frac{2a^5}{3} - 5a^4 \quad 3 - 18a^5 = -2a^5 - 15a^4$

$16a^5 - 15a^4 - 3 = 0.$

$\log_{11} x + \log_{11} y = \log_{11} xy.$

$\frac{1}{b^4} + b = -\frac{13}{3} b - 5$

18 6.



$18 + 18 \quad 8^2 \quad 9^2 = \frac{81}{64}$

$18^2 \cdot 3^2 + 18^2$

$18^2 \cdot 10 = 18\sqrt{10} \cdot \frac{1}{3}$

$6\sqrt{10}.$

$54^2 + 18^2 =$

$18^2 \cdot 4$

$145 = \sqrt{529} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик.

$(abc)^2 \vdots 2^{\cancel{6+14+16}\ 36} \cdot \cancel{6}\ 3^{59} \cdot 5^{52}$ 2·9. 81.

$+\begin{array}{r}13\\21\\25\\\hline 59\end{array}$ $\begin{array}{r}24\\28\\\hline 52\end{array}$

$abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ $x^2+y^2+18y+81=4.$

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ $x^2+(y+9)^2=4.$

$x^2+y^2=25.$

$x+y=6$
$y+z=14$
$z+16=\cancel{1}2$
$x+y+z=\cancel{1}2.$
$z=$

$c=2^{10} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

$a=2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$ $c=2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$

$b=2^{4} \cdot 3^4 \cdot 5$ $a=2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$

~~$c=2^{10} \cdot 3$ $a=2^6$ $b=2^4$~~ $b=2^2 \cdot 3^{\cancel{25}\ 17} \cdot 5^0$

$c=2^8$ $t+16-t+14-t=18$ $t+25-t+13-t=30$

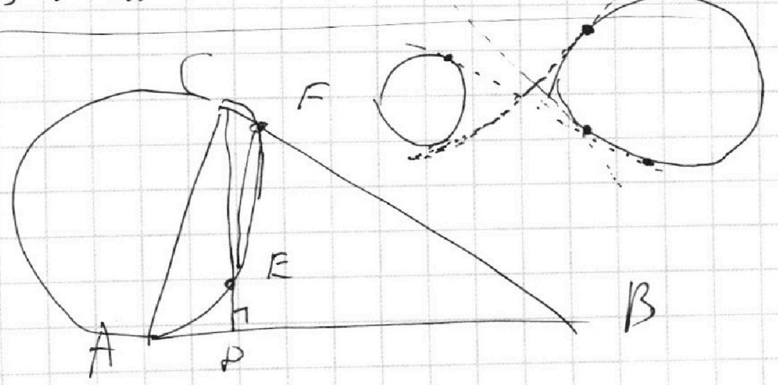
$a=2^8$ $16+14-t=18$ $25+13-t=30$

$b=2^6$ $t=30-18=12.$ $t=8.$

$t+28-t+13-t=26.$ $abc=2^{18} \cdot \cancel{6}\ 3^{30} \cdot 5^{28}$

$28+13-t=26.$ $t=$

$\cancel{t}+28-\cancel{t}+$



$5x+6ay-b=0.$

$6ay=b-5x.$

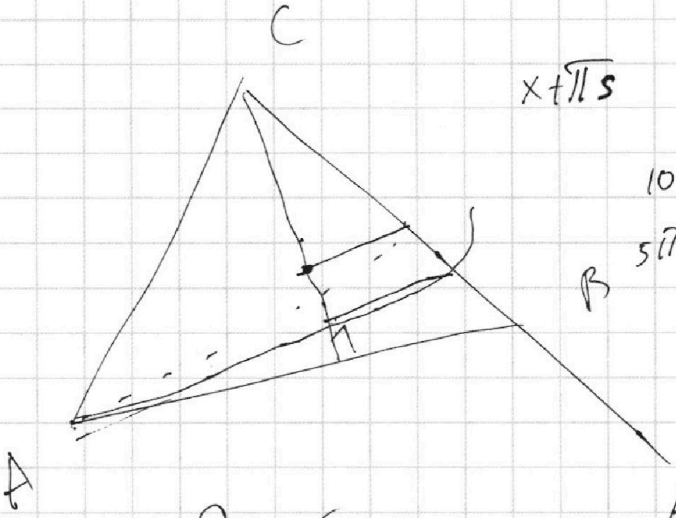
$y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

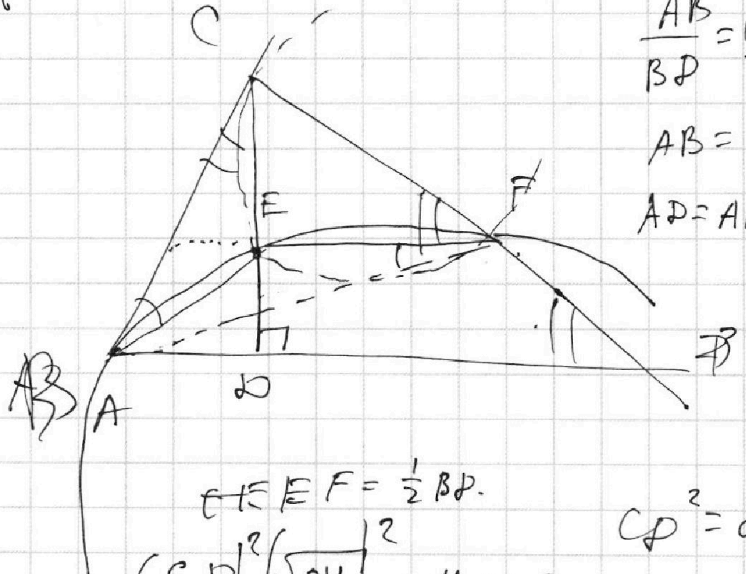


$x+\pi s$

$10(x+2k\pi)$

$5\pi-20k\pi$

$20k\pi-4\pi=$



$\frac{AB}{BD}=1{,}4.$

$AB=1{,}4BD.$

$AD=AB-BD=1{,}4BD-BD=0{,}4BD$

$\cancel{EF}\ EF=\frac{1}{2}BD.$

$CD^2=0{,}4BD^2$

$\left(\frac{CD}{EF}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{0{,}4}}{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{0{,}4}{0{,}25}=\frac{40}{25}=\frac{8}{5}$

$CD=\sqrt{0{,}4}\,BD$

$\arcsin\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

~~10(arccos x)~~ ~~10 arccos~~

x

$10\arccos(\sin x)=9\pi-2x.$

$10\arcsin x\in[-5\pi;5\pi]$

$10\arccos(\sin x)+10\arcsin(\sin x)=5\pi$

$9\pi-2x\geq0.$

$9\pi\geq2x.$

$5\pi-10\arcsin(\sin x)=9\pi-2x.$

$9\pi-2x\leq10\pi$

$2x\leq-\pi$

$5\pi-10x=9\pi-2x.$

$0;10\pi$