



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x.$$

- ✓ 4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

- ✓ 5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

- ✓ 6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1.

Пример:

Оценка:

$$\begin{aligned}
 ab &= 3^{14} \cdot 7^{13} & bc &= 3^{19} \cdot 7^{17} & ac &= 3^{23} \cdot 7^{42} \Rightarrow \\
 abc &= 3^{56} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc &= 3^{28} \cdot 7^{36} \Rightarrow \\
 abc &\geq 3^{28} \cdot 7^{36}, a, b, c \in \mathbb{N}. \text{ Но } ac &= 7^{42} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow abc &= 7^{42}
 \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned}
 a &= 3^9 \cdot 7^{21} \\
 b &= 3^5 \cdot 7^0 \\
 c &= 3^{14} \cdot 7^{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 abc &= 7^{42} \cdot 3^{28} \\
 \text{Ответ: } &7^{42} \cdot 3^{28}
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что условие выполняется.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1.$$

$$\exists \text{ цел } a, b : m, \quad a^2 - 9ab + b^2 : m, \quad m \neq 1.$$

$$a \equiv -b \pmod{m} \quad (a, b) = 1 \Rightarrow (a, m) = 1 \quad (b, m) = 1.$$

$$a^2 - 9ab + b^2 = (a-b)^2 - 7ab.$$

$$a-b \equiv -2b \pmod{m} \Rightarrow (a-b)^2 \equiv 4b^2 \pmod{m}.$$

$$a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow 4b^2 \equiv 7ab \pmod{m} \quad (b, m) = 1 \Rightarrow$$

$$4b \equiv 7a \pmod{m} \quad a \equiv -b \pmod{m} \Rightarrow -4a \equiv 7a \pmod{m} \Rightarrow 11a \equiv 0 \pmod{m}, \text{ Но}$$

$$(m, a) = 1 \Rightarrow 11 : m \Rightarrow m = 11. \text{ ~~И это верно~~$$

~~для $\forall$ любых нат. чисел a и b , что $a+b : 11$.~~

$a=10 \quad b=1$ подходит.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пример:

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Пусть } x = \frac{5}{6} \quad 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1 = 7$$

$$1.4 = 0,$$

$$5 - 6x = 5 - 5 = 0 \Rightarrow 1.4 = 0 \Rightarrow 1.4 = 1.4, \quad \checkmark$$

Проверка:

~~$$3x^2 - 5x + 6 = 7$$~~

~~$$\text{Подставим } x = \frac{5}{6}$$~~

Решим

$$f_1(x) = 3x^2 - 5x + 6 \quad f_2(x) = 3x^2 + x + 1,$$

~~$$f_1(x) \geq f_2(x)$$~~

$$f_1(x) \geq 1 \quad \text{и} \quad f_2(x) \geq 1 \quad \forall x, \text{ так как их дискриминант } \Delta < 0.$$

$$f_1(x) - f_2(x) = 5 - 6x = 1.4, \text{ а так как в левой части}$$

$$\text{у нас } \sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)}, \text{ то так как } f_1(x) \geq 1 \text{ и } f_2(x) \geq 1,$$

$$\text{то } \sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)} \leq f_1(x) - f_2(x) \quad \forall x, \text{ кроме случая}$$

$$f_1(x) - f_2(x) = 0, \text{ а в нем, очевидно следует, что } x = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

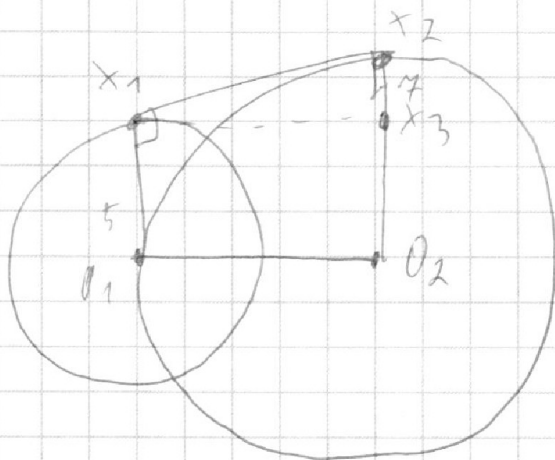


Рисунок. X_1X_2 - одна кас. X_3 такая, что

$X_1X_3 \parallel O_1O_2$ $X_3 \in O_1X_2$

$O_1X_1 \parallel O_2X_3 \Rightarrow O_1X_1 = O_2X_3 = 5 \Rightarrow X_3X_2 = 13 - 5 = 8$
 $\Rightarrow O_1O_2 = 13$, так как $O_1 \in \Omega \Rightarrow$

$$X_1X_3 = 13$$

$$X_1X_3^2 = X_2X_3^2 + X_1X_2^2 = 13^2 = 8^2 + X_1X_2^2 \Rightarrow$$

$$X_1X_2^2 = 13^2 - 8^2 = 20 \cdot 6 = 120 \Rightarrow X_1X_2 = \sqrt{120}$$

Отв: $\sqrt{120}$

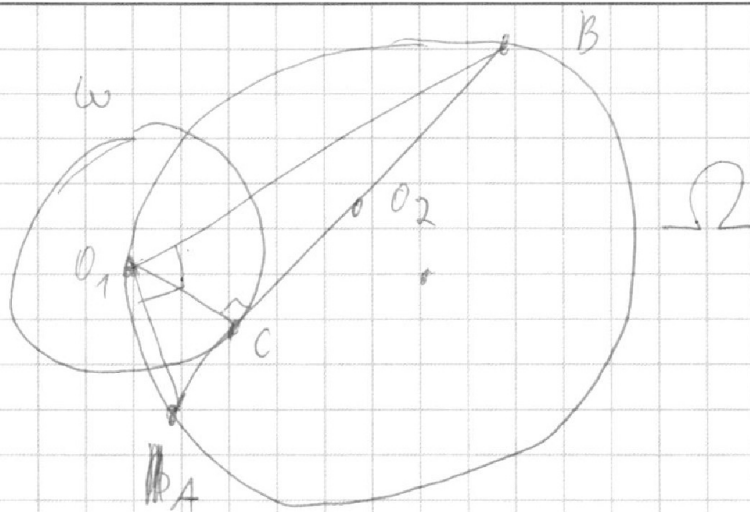
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - центр ω O_2 - центр Ω .

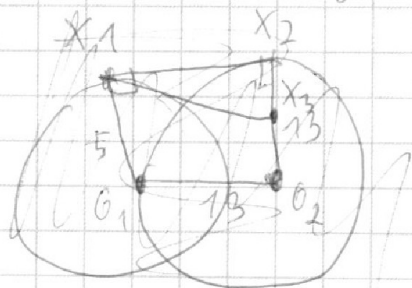
AB - кас $\omega \Rightarrow O_1C \perp AB$ $AB = 1 + 25 = 26$,

$\angle A O_1 B = 90$ ($A, O_1, B \in \Omega$ $O_2 \in AB$), $\Rightarrow$

$$O_1C = \sqrt{1 \cdot 25} = \sqrt{AC \cdot CB} = 5.$$

r - радиус ω , R - радиус Ω .

$$r = 5, R = \frac{26}{2} = 13.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П. е. для $x=2$, $z=3$ $y=1$ ~~не проводим~~, проводим,
проводим для $x=2$, $z=\frac{25}{6}$.

$$y = 5x - 3z = 10 - 12,5 = -2,5,$$

~~Вет~~

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = 100 - \frac{25}{4} - \frac{625}{4}$$

$$\frac{25}{4} + 3 \cdot \frac{625}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow < 0$, а знаменатель > 0 и отрицательный.

Ответ:

$$\frac{100 - \frac{25}{4} - \frac{625}{4}}{\frac{25}{4} + 3 \cdot \frac{625}{4}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что числа $x=2, y=1, z=3$ удовл. усл.

А при них $\text{Знат. Вырате} = 9$.

Заметим, что в IV условии, ~~и в выражении~~
~~назовем его $P(x)$~~ , сократится однородность,
а ст. выражения равна 0, т.е. можно делить
на z , ~~что~~ что $x=2$.

$$5x - y = 3z \quad y = 5x - 3z.$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + z = 15xy \Rightarrow$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$41xz - 24z^2 = 45x^2 - 45xz$$

$$86xz - 24z^2 = 45x^2 \quad (x=2)$$

$$86z - 24z^2 = 90$$

$$24z^2 - 86z + 90 = 0$$

$$192z - 24z^2 = 300.$$

$$24z^2 - 192z + 300 = 0$$

$z_1 = 3$ подходит. (написано выше)

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{300}{24} = 12,5.$$

$$z_2 = \frac{12,5}{3} = \frac{25}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть v_1 - скорость велосипедиста, S - длина дороги,
 v_2 - скорость мотоциклиста,

~~* $S = v_2 t$~~ $S = 6 \text{ км}$, $v = 6 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow$

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2}$$

$$\frac{S}{v_1 + 4} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 4}$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 49 = S - \text{из 2-ого условия. } \frac{v_1}{v_2} S - \text{проехал вел.}$$

S - проехал мотоциклист, 49 км - разница.

Итого 3 уравнения с 3 неизвестными. Ответ очевиден!

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2} \Rightarrow S v_2 - v_1 v_2 = S v_1$$

$$S (v_2 - v_1) = v_1 v_2$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 49 = S \Rightarrow \frac{v_2 - v_1}{v_2} S = 49 \Rightarrow S = \frac{49 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$= \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} \Rightarrow v_1 = 49$$

С8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v_1 = 4g$$

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2} \quad ; \quad \frac{S}{v_1 + 7} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 4g = S$$

$$\frac{4g}{v_2} S + 4g = S \quad \text{---} \quad S v_2 - v_1 v_2 =$$

$$\frac{S}{4g} - 1 = \frac{S}{v_2} \quad ; \quad \frac{S}{56} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$

$$v_2 S - 4g v_2 = 4g S$$

$$v_2 S + 7S - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot 7 - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot v_2$$

$$= 56S$$

$$v_2 S - 4g v_2 = 4g S$$

$$v_2 S + 7S - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot 7 - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot v_2 = 56S$$

$$v_2 S - 4g v_2 = 4g S = v_2 S - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot 7 - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot v_2$$

$$4g v_2 = \frac{3}{5} \cdot 56 v_2 + \frac{3 \cdot 56 \cdot 7}{5} \Rightarrow v_2 \neq$$

$$77 v_2 = 868 v_2 + 1176$$

$$77 v_2 = 1176$$

$$v_2 = \frac{1176}{77}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad ; \quad 1798$$

$$v_1 = 4g \quad v_2 = \frac{1176}{77}$$

сг,

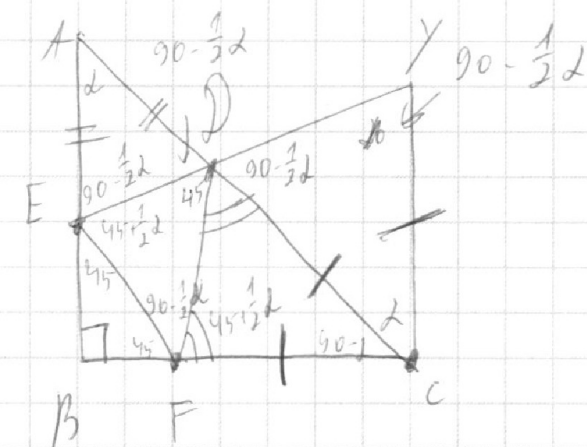
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$FC = CD = CY \quad FD = DY \cdot \sqrt{2}$$

$$\angle FED = 90 - \frac{1}{2}\alpha \quad \angle FED = 45 + \frac{1}{2}\alpha \quad \angle EDF = 45^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

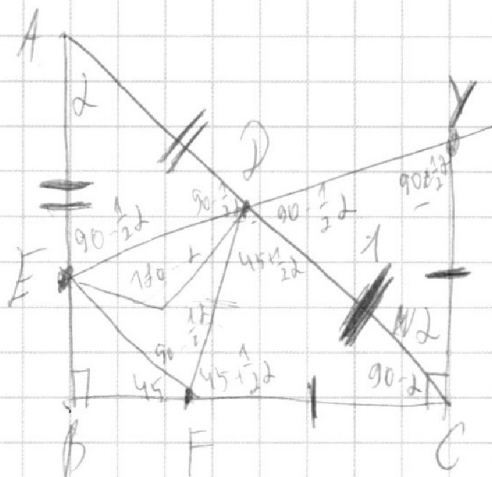
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



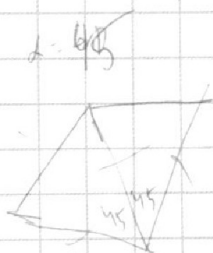
черновик, Озари Демовик.



$$\frac{\sin 90 - \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 90 - \frac{1}{2}\alpha}{\sin 45 + \frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sin 90 - \frac{1}{2}\alpha}{\sin 45 + \frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{\sin 90 - \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = 30$$



$$\alpha = 30$$



$$\frac{\sin 75}{\sin 30} \cdot \frac{\sin 60}{\sin 60}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$$

C 70

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



v_1 - велосипедист $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$

S - путь, км

v_2 - мотоциклист.

$$S = \frac{49 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2}$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$

$$v_2 S - v_1 v_2 = v_1 S$$

$$v_2 (S - v_1) = v_1 S$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 49 = \frac{S}{v_2}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{v_2} S = 49$$

$$\frac{S}{v_2} = \frac{S}{v_1} - 1$$

$$S = \frac{49 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\left(\frac{S}{v_1} - 1 \right) (v_2 - v_1) = 49$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$25 - 4 \cdot 5 \cdot 3$$

$$(2x - 1)^2 - x^2 + x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

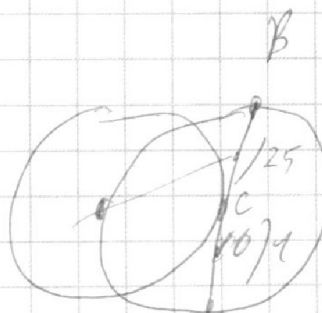
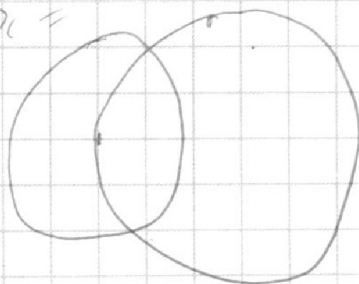
$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

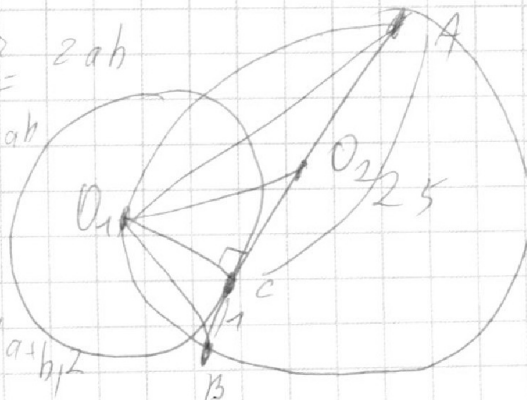
$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{6} + 6} - \sqrt{\quad}$$

$$1 + x^2 + x^2 + 25^2 = 26^2$$

$$2x^2$$



$$x^2 = 2ah$$



$$a^2 + 2x^2 + b^2 = (a+b)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x - y = 3z \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$25x^2 - y^2 - 9z^2$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$x = 2 \quad y = 1 \quad z = 3$$

$$\frac{100 - 1 - 9}{1 + 9} = 9$$

$$v_1 \quad v_2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$21 \cdot 56$$

$$5x - y = 3z$$

$$1120 - 56 = 1176$$

$$y = 5x - 3z$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz$$

$$86xz - 24z^2 = 75x^2$$

$$x = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

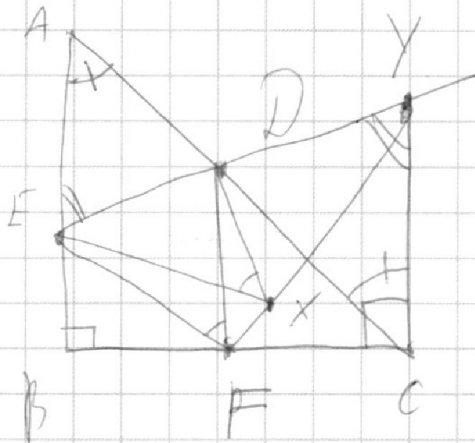
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.

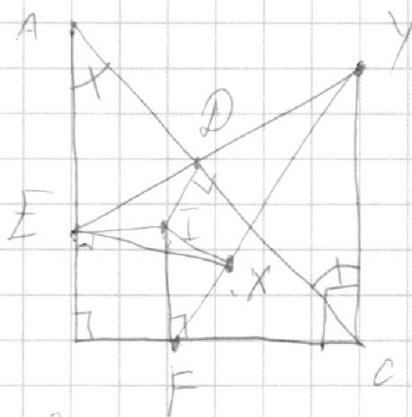


$$EX = \sqrt{2} \times Y$$

$$\frac{AD}{DC} = ?$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$$

EDXF - впис.



№ 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\cancel{3x^2 - 5x + 6} - \cancel{3x^2 + x + 1}$$

$$5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{}$$

$$2 -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{matrix} \sqrt{1} \\ (abc)^2 : 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 14+19+23 \\ 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 13+17+42 \\ 7 \end{matrix}$$

$$\cancel{a+c=12}$$

$$\cancel{b=13}$$

$$\begin{matrix} 2 \\ (abc)^2 : 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 56 \\ 7 \end{matrix}$$

$$a=10 \quad b=1$$

$$100 - 90 + 1$$

$$\begin{matrix} 28 \\ abc : 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 36 \\ 7 \end{matrix}$$

$$a+b=14$$

$$b+c=19$$

$$a+c=23$$

$$\begin{matrix} 14+3 \\ 3+19 \end{matrix}$$

$$a=11$$

$$b=3$$

$$c=12$$

$$\begin{matrix} a & b \\ 9 & +5 \\ b & c \\ 5 & +14 \\ c & d \\ 14 & +9 = 23 \end{matrix}$$

$$a+b=d$$

$$a=b$$

$$4b^2 = 7ab$$

$$a+b=13$$

$$b+c=17$$

$$a+c=42$$

$$a = \begin{matrix} 21 \\ 7 \end{matrix}$$

$$c = \begin{matrix} 21 \\ 7 \end{matrix}$$

$$b = 7$$

$$a^2 - 9ab + b^2$$

$$4b = 7a$$

$$-4a = 7a$$

$$11a = 0$$

$$\begin{matrix} a+b \\ (a-b)^2 - 7ab \end{matrix}$$

$$a+b=0$$

$$a-b = -2b$$

$$(a-b)^2 = 4b^2$$