



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $a, b, c \in \mathbb{N}$

1)  $ab: 2^{75} \cdot 7^{77}$

2)  $bc: 2^{77} \cdot 7^{79}$

3)  $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

Перепишем найденные при выражении  $\epsilon$ :

$a^2 b^2 c^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$

Заметим, что числа  $abc$  делится на  $2^{28}$ . Пусть  $abc \in 2^{28}$ , тогда  $abc \in 2^{k+28}$

где  $k \leq 27$ . Тогда  $(abc)^2: 2^{2k} \cdot 2^{2 \cdot 28}$ . Тогда

$2k \geq 55 \Rightarrow k \geq 28$ . ~~Но это невозможно, так как~~

$abc \in 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$  Полу-

чим, что  $(abc: 2^{28} \cdot 7^{39}) \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{39}$

Тогда  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ . Проверим условие, когда

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ . Пусть  $a = 7^{77} \cdot 2^{70}$ ;  $b = 2^5$ ;

$c = 7^{28} \cdot 2^{13}$

Тогда все условия выполнены и

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Из условия  $(a; b) = 7$ . Пусть  $m = d$ .

Тогда  $a+b \equiv 8d$ ;  $a^2 - 7ab + b^2 \equiv d$ . Заметим,

что тогда  $(a; d) = 1$ , значит  $a \equiv k$ ;  $d \equiv k \cdot k \pmod{7}$

$(a+b \equiv 8d; x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow dx - a \equiv b \pmod{k}$ . Так как

$(a; b) \geq k$  противоречие, значит,  $(a; d) = 7$

$(b; d) = 7$  аналогично.

$(a+b) \equiv d \Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - 7ab + b^2 \equiv d$

Выведем из  $a^2 - 7ab + b^2$  наименьшее выра-

жение, выучив  $b^2 - (-8b^2) = 9b^2 \equiv d$ . Тогда

$(b; d) = 7 \Rightarrow 9 \equiv d \pmod{7} \Rightarrow d \equiv 9$ . Приведем

пример, когда  $d = 9$ . Пусть  $a = 4$ ;  $b = 5$ . Тогда

$(a; b) = 1$ ;  $a+b = 9 \equiv 9$ ;  $a^2 - 7ab + b^2 =$

$$\iff = 17 - 140 = -123 \equiv 9$$

Ответ:  $d = 9$



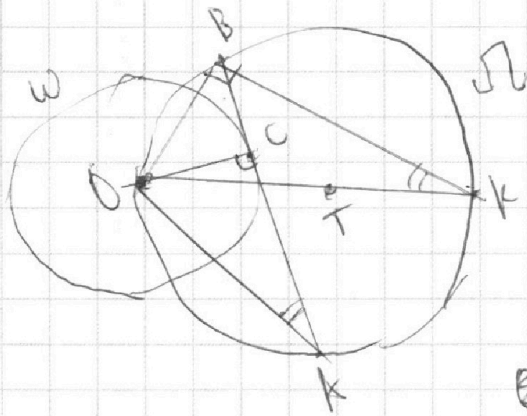
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O$  - центр  $\omega$

$OC \perp BK$

$\Rightarrow T$  - центр  $\Omega$   
 $OT \perp \Omega = K$

$\angle OBK = 90^\circ$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{7} \quad AC = 7 + x \quad CB = 7x$$

$\triangle OBK \sim \triangle OCB$   $\Rightarrow$  по 2 признакам

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OK}$$

$$OA \cdot OB = OC \cdot OK = 7 \cdot 14$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 Обозначим  $2-3x=t$ ;  $3x^2-6x+2=k$

Тогда  $3x^2+3x+1=k-t$ . Перпишем уравнение:

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-t} = t \quad k \geq 0; k-t \geq 0$$

$$\sqrt{k} = t + \sqrt{k-t} \quad \text{возведем в квадрат обе части}$$

$$k = t^2 + k - t + 2t\sqrt{k-t}$$

$$t - t^2 = 2t\sqrt{k-t} \quad (1)$$

Рассмотрим случай  $t=0$ , тогда  $2-3x=0$

$$x = \frac{2}{3}, \text{ тогда } \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 2} - \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} + 1} - \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ кор-}$$

нем.

Пусть  $t \neq 0$ . Разделим (1) на  $t$

$$1-t = 2\sqrt{k-t}$$

$$t^2 + 1 - 2t = 4(k-t)$$

$$t^2 + 1 + 2t = 4k$$

$$4k = (t+1)^2 \quad \text{Квадратим, что такое } k \text{ и } t$$

$$4(3x^2-6x+2) = (2-3x)^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 8x^2 - 36x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$69x^2 - 72x - 4 = 0$$

$$D = 744 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 76(9 + 69) = 76 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{72 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{72 - 6 - 2\sqrt{78}}{69} < \frac{70}{69}$$

$$3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 3 \frac{(6 - 2\sqrt{78})^2}{69^2} + 3 \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 =$$

$$= 3 \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \left( \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 \right) + 1 > 0$$

$$3x_1^2 + 3x_1 + 1 > 0, \text{ следовательно } x_1 < 0$$

$$x_2 = \frac{72 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{22}{69}$$

$$\text{Проверка: } 3x_2^2 - 6x_2 + 2 > 0; \quad 3x_2^2 + 3x_2 + 1 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Даны окружности на плоскости неравенства. ~~Первое~~  $x^2 + y^2 =$

$= 25$  задает окружность с центром  $O(0; 0)$  и ради-

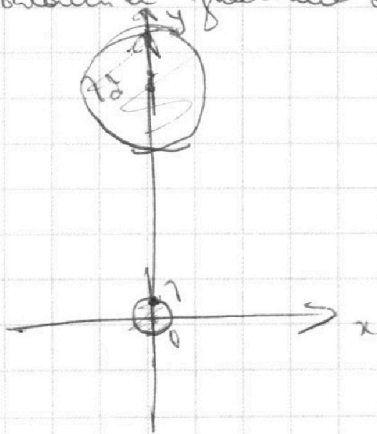
усом 5.  $x^2 + (y - 12)^2 = 76$  задает окружность

с радиусом 4 с центром  $B(0; 12)$ . Найдите реше-

ние неравенства. Будет внутренняя часть

и граница этих окружностей, но в аналогичной

области значение обеих сторон будет  $> 0$ .



Первое уравнение перепишем:

$$y = -ax + 8b \text{ - это прямая.}$$

Если эта прямая пересекает  
окружность  $x^2 + y^2 = 25$

почва, то решение системы

заключается в том. Если прямая не имеет точек пересе-

чения с окружностью  $\Rightarrow$  она должна касаться обеих

окружностей. Каждое уравнение описывает внутр.

часть, а также описывает внешнюю часть.

Общая внутренняя:

$$y = k_1 x + c_1$$







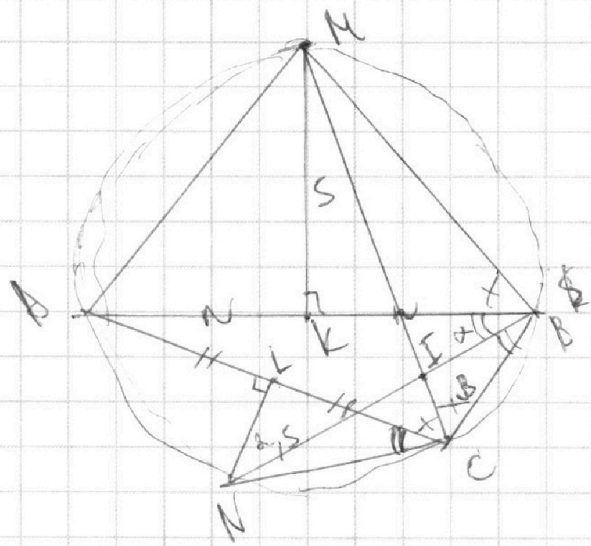
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MK \perp AB$$

$$NL \perp AC$$

$(\angle ABM = \angle ACM; \angle ACM =$   
 $= \angle ABN; \angle AMC = \angle ABC)$   
из вписанности  $AMBCN$

Из условия,  $M$  - середина  $AB \Rightarrow AM = MB; AN = NB$   
 $N$  - середина  $AC \Rightarrow AN = NC; AL = LC$ .  $CN$  - медиана  $\angle ACB$

По м. синусов  $\frac{BM}{\sin B} = \frac{CN}{\sin \alpha}$  (1)

Из  $\triangle LCN$   $\sin \alpha = \frac{NL}{CN} = \frac{2,5}{CN}$ ; из  $\triangle MKB$

$\sin B = \frac{MK}{MB} = \frac{5}{MB}$  - подставляем в (1)

$$\frac{MB^2}{5} = \frac{CN^2}{2,5}$$

$$MB^2 = CN^2 \cdot 2 \quad MB = \sqrt{2} \cdot CN$$

$$\frac{MB}{CN} = \sqrt{2} = \frac{AM}{AN} \quad AM = \sqrt{2} \cdot AN$$

По м. синусов  $\triangle ACM$ :  $\frac{AC}{AM} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin B} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin B}$  (2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим  $\angle I = \angle CM \cap BN$  тогда в заданном треугольнике найдём  $AI$

из т. синусов  $\angle I = \angle AIC$

$$\frac{AI}{\sin \angle AIC} = \frac{AC}{\sin \angle C} \Rightarrow \frac{AI}{\sin \angle AIC} = \frac{AC}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

$$= \frac{AC}{\cos \alpha}$$

Из  $\triangle$   $\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot AM}{\sin \beta}$  . Попробуем

то  $\angle AI = \frac{AC}{\cos \alpha} \cdot \sin \beta$

$AI = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot AM}{\sin \beta}$  . ~~sin beta~~

Из  $\triangle$   $\sin \alpha = \frac{2,5}{CN} = \frac{2,5}{AN} \Rightarrow \frac{2,5 \cdot \sqrt{2}}{AM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha \cdot AM = 2,5 \sqrt{2}$  , тогда

~~AI =~~  $AI = 2 \cdot \sin \alpha \cdot AM = 2 \cdot 2,5 \sqrt{2} =$

$= 5 \sqrt{2}$

$AI = 5 \sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $a, b, c \geq 1$

1)  $ab \geq 2^{75} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{75} \cdot 7^{11}$

2)  $bc \geq 2^{77} \cdot 7^{18} \Rightarrow bc \geq 2^{77} \cdot 7^{18}$

3)  $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Проверим все три найденные неравенства:

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$ . Заметим, что наша abc

делится на  ~~$2^{27}$~~   $2^{28}$ . Пусть  $abc = \cancel{2^{27}} \cdot 2^{28}$

Пусть  $abc = 2^k$ , где  $k \leq 27$ . Тогда  ~~$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55}$~~

~~$(abc)^2 \geq 2^{2k} \cdot 2^{2k+1}$~~ . Пусть  ~~$abc = 2^{55}$~~ , что

~~$55 \geq 2 \cdot 27 + 1$~~



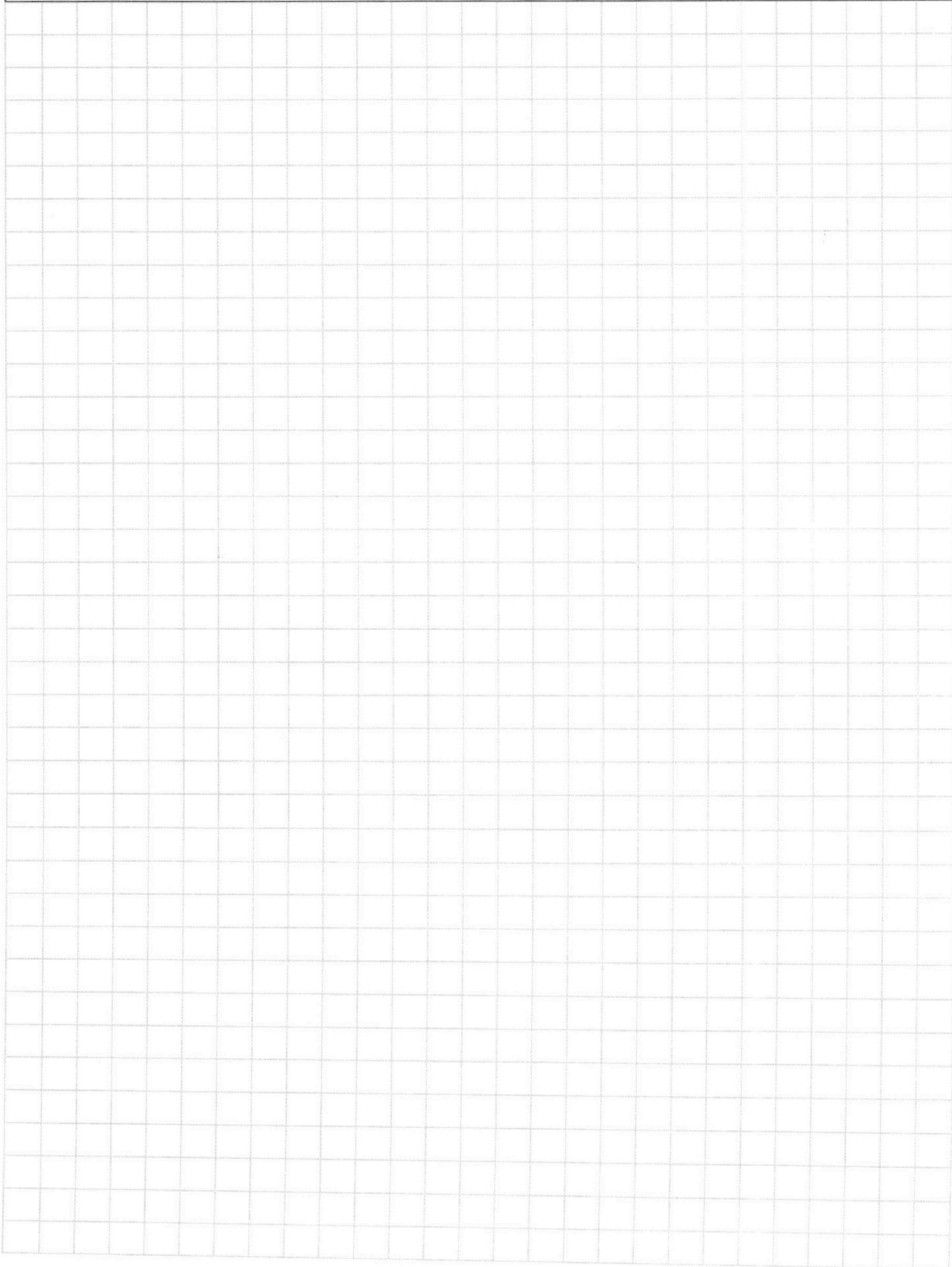
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2)  $d = m$

~~$(a; b)$~~   $(a; b) = 1$   $(b; d) = 1$

~~$(a; b)$~~   ~~$(a; d) = 1$~~

~~$(a+b) \cdot d$~~   $a^2 - 7ab + 6b^2 ; d$

~~$(a+b)(a-8b) ; d$~~

$(a+b)(a-8b) ; d$

~~$a^2 + ab - 8ab - 8ba ; d$~~

$a^2 - 7ab - 8b^2 ; d$

$8b^2 ; d$

~~$(a+b) \cdot 8b ; d$~~

~~$8ab ; d$~~

$9 ; d$

$d \leq 9$

~~$a = 4, b = 5$~~   $47 - 740$

~~$26 \cdot 55 - 740$~~

Или  $d = 9$

$a = 4, b = 5 \quad a + b = 9 \neq 9$

~~$a + b = 9$~~   $a^2 - 7ab + 6b^2 = 47 - 740 = 5 - 99$

$9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\cancel{a = 2^{23} \cdot 7}$$

$$\cancel{abc} \geq 2^{23} \cdot 2^{75} \cdot 2^{77} \cdot 7^{77} \cdot 7^{78} \cdot 7^{39} =$$
$$= 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\cancel{abc} \rightarrow$$

$$abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68}} \geq 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$\cancel{a = 7^{11}}$$
$$\cancel{b = 7^{17}}$$
$$\cancel{c = 7}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$abc \geq 7^{39}$$

$$\cancel{b} \geq 7^{39}$$

$$\cancel{abc} \geq 7^{39}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{39}$$

$$a \mid 7^{11} \quad c \mid 7^{18}$$

$$a = 7^{11} \cdot 2^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 7^{18} \cdot 2^{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$LT = \sqrt{74 \frac{7}{7,4 \cdot 3,4}}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{7,4 \cdot 3,4 + 7}{7,4 \cdot 3,4}}$$

~~$$7,4 \cdot 3,4 =$$~~

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times 3,4 \\ \hline 296 \\ 42 \\ \hline 4,76 \end{array}$$

~~$$74$$~~

~~$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline \end{array}$$~~

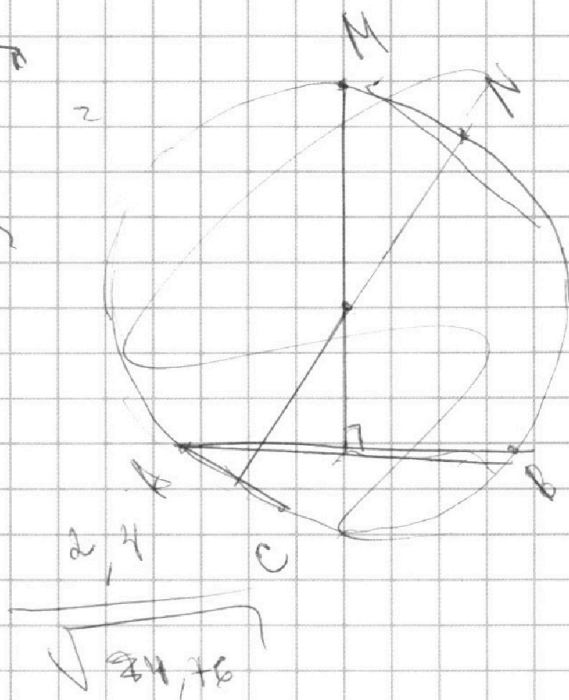
~~$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 96 \\ \hline 576 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 96 \\ \hline 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$0 = k \cdot \frac{24}{\sqrt{4,76}} + 2,4$$

$$\left( \frac{k}{\sqrt{4,76}} + 7 \right) = 0$$

$$k = -\sqrt{4,76}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

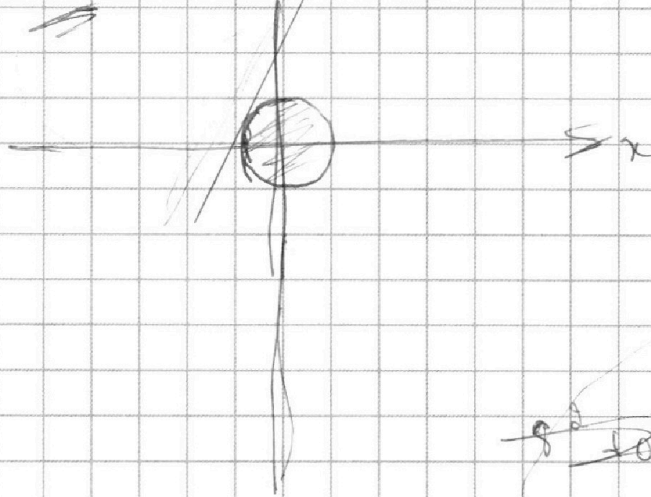
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 = 7$ 
 $x^2 + (y - 2.2)^2 = 7.6$



$ax + y - 8.6 = 0$

~~$ax + y = 8.6$~~

~~$ax = 8.6 - y$~~

~~$y = ax + 8.6$~~

$y = kx + c$

$c = 2.4$

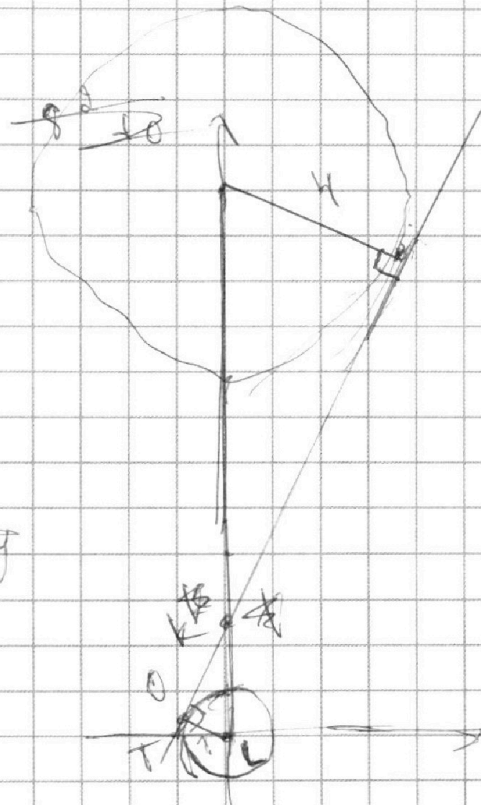
$\sqrt{2.4^2 - 7.2^2} =$

$= \sqrt{7.4 - 3.4} = k_0$

~~$k = \frac{7.2}{5} = 2.4$~~

$k_0 \cdot OT = 7$

$OT = \frac{7}{\sqrt{7.4 - 3.4}}$



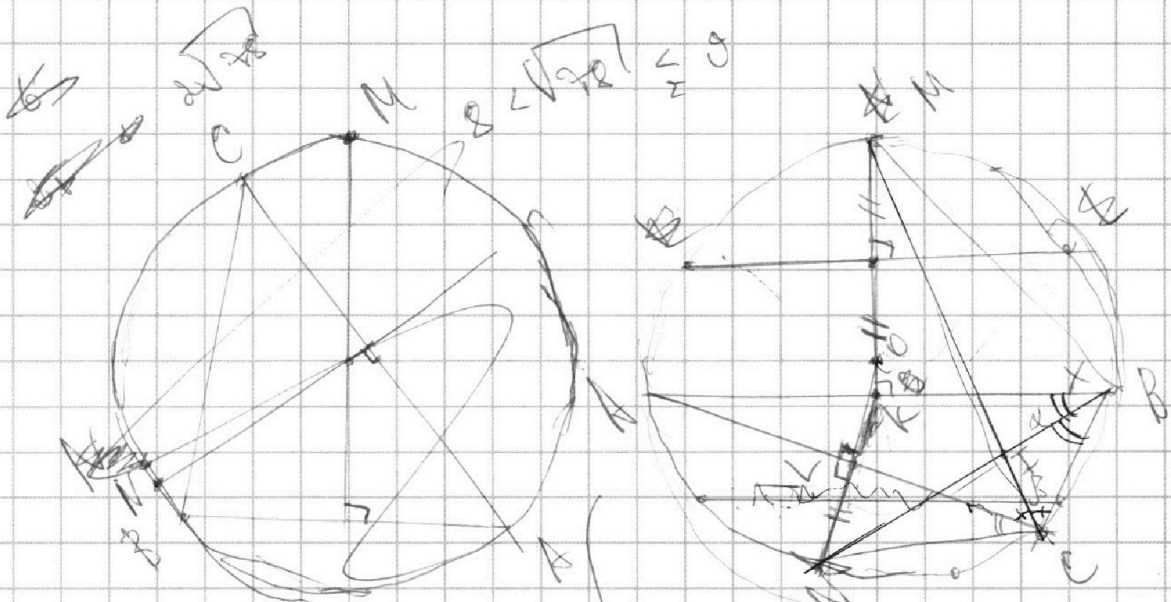
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4)

$$3x = t$$

$$3x^2 - 6x = k$$

$$\sqrt{k+2} = \sqrt{k+t}$$

$$7 - 3x = t$$

$$3x^2 - 6x + 2 = k$$

$$k - t = 3x^2 - 6x + 2 + 3x - 7 = 3x^2 - 3x - 5$$

$$= 3x^2 + 2x + 7$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-t} = t$$

$$k + k - t - 2\sqrt{k(k-t)} = t^2$$

$$k = t^2 + k - t + 2t\sqrt{k-t}$$

$\sin \alpha = \frac{CN}{BN}$   
 $\sin \alpha = \frac{CN}{CN}$   
 $\sin \alpha = \frac{S}{MB}$   
 $CN = 2R$   
 $\sin \alpha = \frac{2S}{CN}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t - t^2 = 2t \sqrt{k - t} \quad t \in \mathbb{R}$$

~~$t = 0$~~

$$1 - t = 2 \sqrt{k - t}$$

$$1 + t^2 - 2t = 4(k - t)$$

~~$t = 0$~~

$$t^2 + 1 - 2t = 4k - 4t$$

$$t^2 + 1 + 2t = 4k$$

$$4k = (t + 1)^2$$

~~$4k = 0$~~

$$4(3x^2k - 6x + 2) = (2 - 9x)^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 - 36x + 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 76 \cdot 69 = 76 \cdot (9 + 69) =$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 4 \cdot 144 + 4 \cdot 76 \cdot 69 = 76 \cdot (9 + 69) = 76 \cdot 78$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical derivations on a grid background:

$$\frac{BM}{\sin \beta} = \frac{CN}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2,5}{AN}$$

$$\frac{BM^2}{s} = \frac{CN^2}{2,5}$$

$$BM^2 = \frac{2}{5} CN^2$$

$$\frac{BM}{CN} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$$

$$BM = \sqrt{\frac{2}{5}} CN$$

$$\sin \alpha \cdot AM = \sin \alpha \cdot \frac{AM}{\sqrt{2}} = 2,5$$

$$\sin \alpha \cdot AM = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot 2,5$$

$$\frac{AT}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{AC}{\cos \alpha}$$

$$2,5 = 2AL = AK$$

$$\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{AM \cdot \sin \alpha \cdot 2}{\sin \beta}$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\sin \alpha \cdot 2}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \beta}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|AI| \rightarrow \frac{AC \cdot \sin B}{\cos \alpha} = \frac{AM \cdot 2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{AM \cdot 2 \sin \alpha}{\sin B} \cdot \sin B \rightarrow AM \cdot 2 \sin \alpha =$$

$$= 2 \cdot \sin \alpha \sqrt{a^2} = 2 \sqrt{a^2}$$

