



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обозначим степени вхождения в числа 2
в a, b, c за a_1, b_1, c_1 соответственно.

по условию

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq 23$$

суммируем

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 55$$

то есть

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 27,5, \text{ но } a_1 + b_1 + c_1 - \text{целое, значит}$$
$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 28. \quad (1)$$

Также заметим, что $abc \div 7^{39}$, значит
 $abc \div 7^{39} \quad (2)$

из (1) и (2) имеем $abc \geq 2^{28} 7^{39}$

Пример:

$$a = 2^{11} 7^{19}$$

$$c = 2^{12} 7^{19}$$

$$b = 2^5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

То, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$.

Найдем $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2)$. Заметим, что
из $a^2-7ab+b^2$ мы можем вычесть $k \cdot (a+b)$,
а значит, когда не помещается. Вычтем
 $(a+b)^2$

$$(a+b)(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; -9ab)$$

Заметим, что если $a \not\vdots p$, то $a+b \not\vdots p$,
т.к. $(a; b) = (a; a+b) = 1$. Аналогично
 $(b; a+b) = (a; b) = 1$. Это есть $(a+b; -9ab) =$
 $= (a+b; -9)$. Это есть $m \leq 9$.

Заметим, что если $a=4, b=5$ то
дробь сократится и

Заметим, что для $a=4, b=5$ можно
сократить на 9.

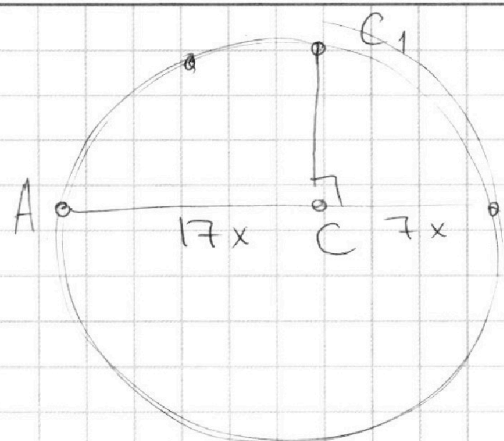
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



C_1 - центр ω
 $C_1C \perp AB$ - касание

Заметим, что
для $\triangle AC_1B$ впис.

$$AC_1 \cdot C_1B \cdot AB = 4 \cdot S \cdot R$$

(S - пл. $\triangle AC_1B$, R - радиус Ω)

$$AC_1 = \sqrt{(17x)^2 + 49}$$

$$BC_1 = \sqrt{(7x)^2 + 49}$$

$$AB = 24x$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot C_1C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x$$

$$R = 13$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} \cdot 24x = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 13 \cdot 4$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 2 \cdot 13$$

$$((17x)^2 + 49)(49x^2 + 49) = 4 \cdot 49 \cdot 169$$

$$(289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 4 \cdot 169$$

$$t = x^2$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 4 \cdot 169$$

Заметим, что $t > 0$. При $t = 1$ выполняется равенство а при $t > 0$ функция слева очевидно монотонно возрастает.

$$t = 1$$

$$x = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим

$$\sqrt{A} = m$$

$$\sqrt{B} = n$$

$$m - n = m^2 - n^2$$

$$m^2 + m =$$

$$m^2 - m = n^2 - n$$

рассмотрим

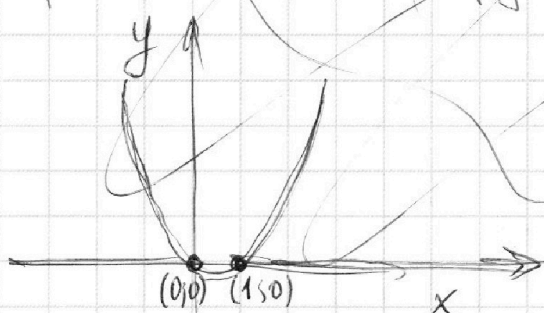
графики

функции

$$m, n \geq 0$$

$$y = x^2 - x$$

Это парабола с
ветвями вверх,
также имеет корни
 $x_1 = 0, x_2 = 1$. Тогда
видно, что



$$(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) \quad \text{по разности квадратов}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \text{когда} \quad 1 - 9x = 0 \quad (x = \frac{1}{9}). \quad \text{иначе}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$$

тогда

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B}) + (\sqrt{A} - \sqrt{B}) = 1 + 1 - 9x$$

$$2\sqrt{A}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 - 36x + 81x^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 - 36x + 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$$

пусть $3x^2 + 3x + 1 = a$
 $1 - 9x = b$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b = b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$(b - b^2) = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$(1-b)^2 = 4a$$

||

||

$$(9x)^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 16 \cdot 69 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

~~предположим $x, x/b$ (1), (2)~~

пусть $3x^2 - 6x + 2 = A$

$$3x^2 + 3x + 1 = B$$

тогда $\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$. Тогда берём

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда есть 17 основных отрезков и 16 пунктирных (на ~~на~~ интересуют не пределы, а отрезки)

На основном отрезке PO лежит 14 целых точек

На побочном отрезке PO_1 лежит 13 целых точек

(т.к. это сдвиг PO на $(1; -1)$, от отбрасывания точки O выходит за пределы пар. границ)

Теперь проанализируем основные отрезки основного $A_1, \dots, A_{17}$ и пунктирные $B_1, \dots, B_{16}$

Заметим, что для точки на A_i ГМТ B является прямой A_{i+7} .

Для точки на B_i — B_{i+7} .

Тогда для прямых $A_1, \dots, A_{10}$ найдем прямые вида A_{i+7} , то есть это

10 · 14 · 14 пар точек

Также для $B_1, \dots, B_9$ найдем B_{i+7} , то есть это 9 · 13 · 13 пар точек

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 140 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \times 107 \quad 117 \\ \quad 13 \quad 13 \\ \hline 321 \quad 351 \\ 107 \quad 117 \\ \hline 41 \quad 1521 \end{array}$$

$$\text{Ответ: } \begin{array}{r} 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

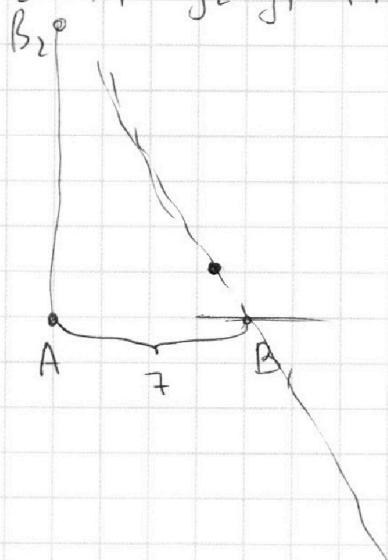
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для произвольной точки плоскости $A(x_1; y_1)$
найдем ГМТ точки $B(x_2; y_2)$ чтобы

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$$

Очевидно подходит
 $B_1(x_1 + 7; y_1)$. Далее
мы можем дать
нам y B

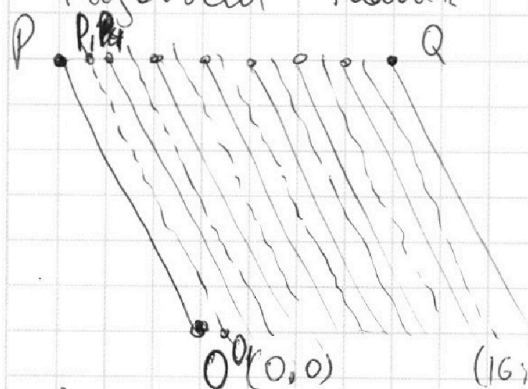


Все такие точки
должны лежать на
прямой $y = -2x + 2x_1 + y_1 + 14$,
то есть каждой прямой
всем

подходит еще B_2

$(x_1; y_1 + 14)$. То есть ГМТ - это целые
точки прямой B, B_2 .

Разобьем наш пар. грани. на прямые



Через целые точки
на отрезке PQ проведем
прямые, $\parallel PO$ (это
прямая $y = -2x$)

Еще проведем прямые

средние линии между сосед. проведенными
(пункт.) Тогда все эти прямые содержат все
точки цел. точки пар-граней (так как
если проведем ординату, то найдем прям.
содержат пересек. ее во всех полученных
точках, значит целые они содержат).

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

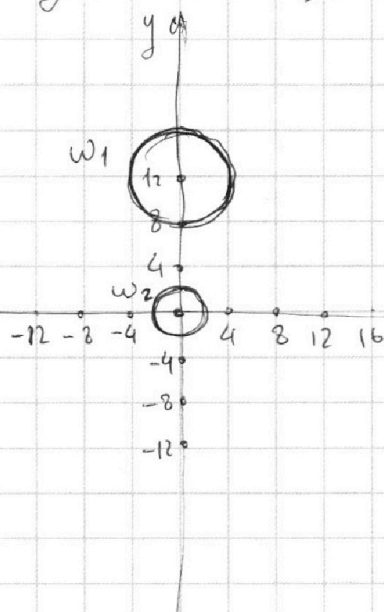
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нарисуем координатную плоскость Oxy .



Заметим, что
прямая $ax + y - 8b = 0$
должна касаться двух
окружностей.

Не пересекают 2 круга
(включ. сар. в данном случае)
она не может —
второе уравнение неравенство
не выполняется.

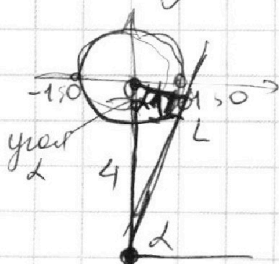
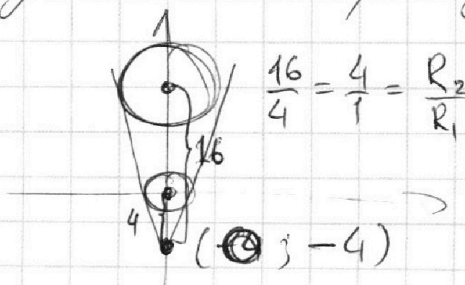
~~Пересечь круг — прямая~~

~~Пересечь только один круг — прямая не
может, так как у системы будет либо
1, либо беск. кол-во решений (круги не пересекаются,
значит если точка внутри W_1 , то вне W_2 ,
она явл. решением).~~

Так как круги не пересекаются (вкл. сар.),
любая точка W_1 или W_2 является решением
уравн., значит у прямой должно быть 2
точки пересеч. с ними — общая кас.

Найдем уравн. общ. кас.

1) Прямая проходит через $(0; -4)$ — центр ниж. окружности.



$$KL = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$a = -\tan \alpha = -\sqrt{3}$$

и уравн. прямой
 $a = \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

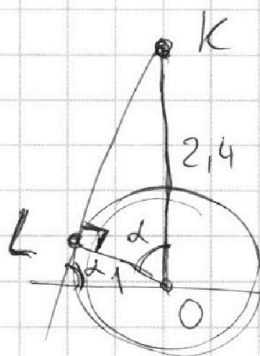
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) внешн. касат. проходит через
центр окруж. ω_1 и ω_2
~~(0; 2,4)~~ $(0; 2,4)$
проведем из ~~(0; 2,4)~~ кас.
к ω_2

$$\frac{11,6}{3} = \frac{R_1}{R_2}$$
$$\frac{11,6}{2,4} = \frac{R_1}{R_2}$$
$$2,4 \cdot 3 = 7,2$$

~~(0; 3)~~ $(0; 2,4)$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$KL = \sqrt{5,76 - 1} = \sqrt{4,76}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KL}{LO} = \sqrt{4,76}$$

$$y = -ax + 8b$$
$$-a = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{4,76}$$

и сим. прямая $a = \sqrt{4,76}$

ответ: $a = \pm \sqrt{4,76}$
 $a = \pm \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Перепишем

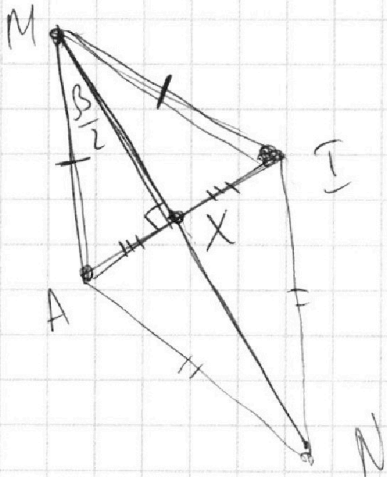


$$\frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} =$$
$$= \frac{215}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \quad \odot$$

Рассмотрим

$\triangle MAI$.



$MN \perp AI$ (MN это
сер. пер. по линиям ос
треугольн)

$\angle AMX$ опирается на $\cup AN$
также как $\angle ABN \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AMX = \frac{\beta}{2}$

Заметим, что

$$AX = \sin \frac{\beta}{2} \cdot MA$$

$$\frac{AI}{2} =$$

$$AI = 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$AI^2 = 100 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \stackrel{\odot}{=} 50$$

$$AI = \sqrt{50}$$

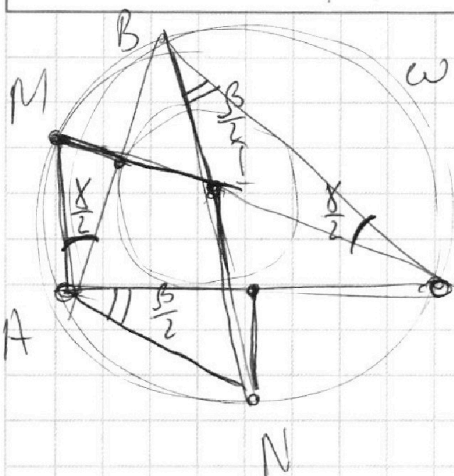
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что E, I, M
лежат на бис. $\angle C$
 B, I, N лежат на бис.
 $\angle B$

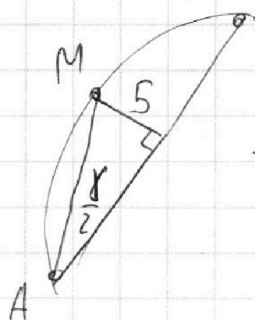
По свойствам о трезубце.
 $MI = MA$
 $NI = NA$.

Заметим, что $MI \cdot IC = BI \cdot IN$ (степени
точки I относ ω)

Тогда $MA \cdot IC = NA \cdot IB$. $\odot$

Заметим, что $MA = \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ (угол треуголь-
ника обозначим за α, β, γ соответственно)

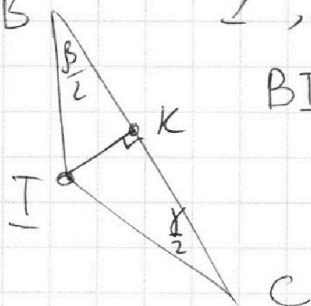
так как



$$\frac{5}{MA} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

Аналогично $NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$

Рассмотрим $\triangle BIC$. Опустим высоту из
 I , обозначим ее длину за r .



$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad CI = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

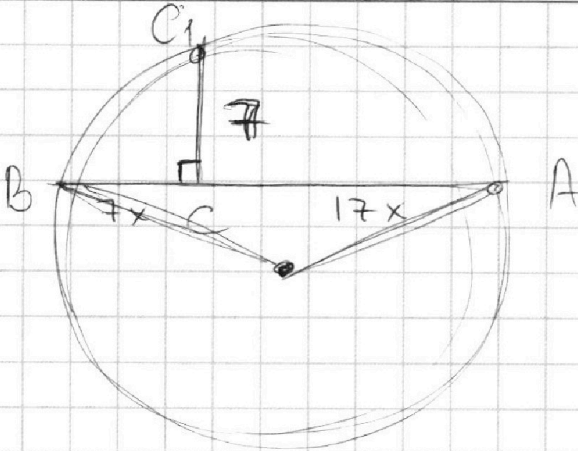
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

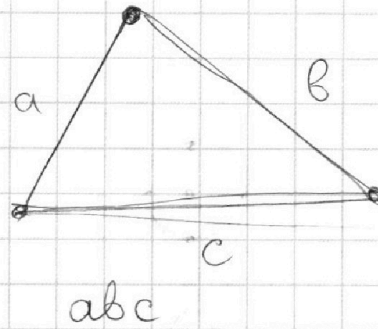
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



S



$ab \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc :$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a \cdot c = 2^{12} \cdot 7^{19}$

$a = 2^{11} \cdot 7^{19}$

$b = 2^8$

$c = 2^{13}$

$a = 2^{12}$

$b = 2^4$

2^{28}

$c =$

$15 + 17 + 23 = 55$

$ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2S$

$abc = 4SR$

$\sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{289x^2 + 49} \cdot 24x = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 13$

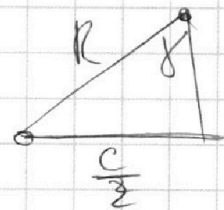
$289 + 49 = 338$

676

$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$

$\frac{1}{2} ab \sin \gamma = S$

$\frac{c}{\sin \gamma} =$



$\sin \gamma = \frac{c}{2R}$

$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

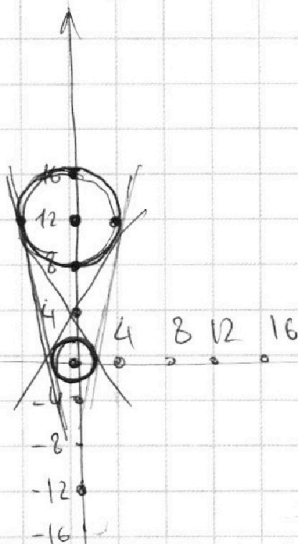
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

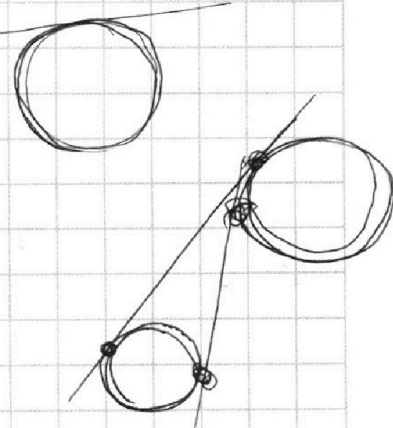


$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$



прямая $ax + y - 8ab = 0$
имеет 2 точки

$$y = -ax + 8b$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b = (b+\sqrt{a})^2$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b(b+2\sqrt{a})$$

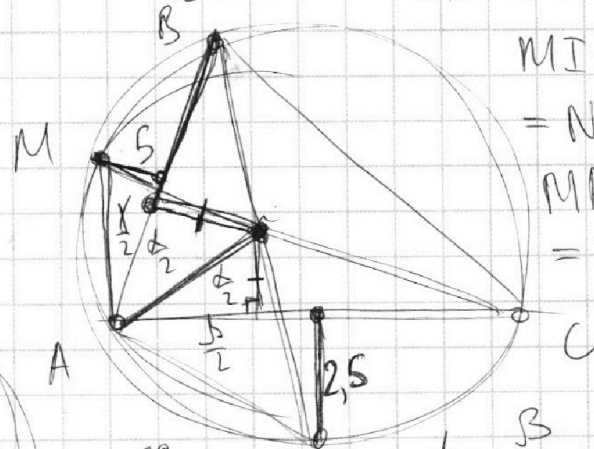
$$b - b^2 = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x - 6x + 2 \geq 0$$

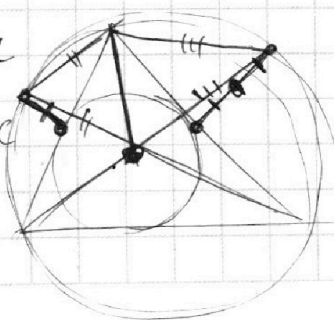


$$\begin{aligned} MI \cdot IC &= \\ &= NI \cdot IB \\ MA \cdot IC &= \\ &= NA \cdot IB \end{aligned}$$

$$2b(p-c) = (p-b)c$$

$$2b(a+b) = (a+c)c$$

$$2ab + 2b^2 = ac + c^2$$



$$\frac{p-2b}{(p-b)c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot AC}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot AB} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

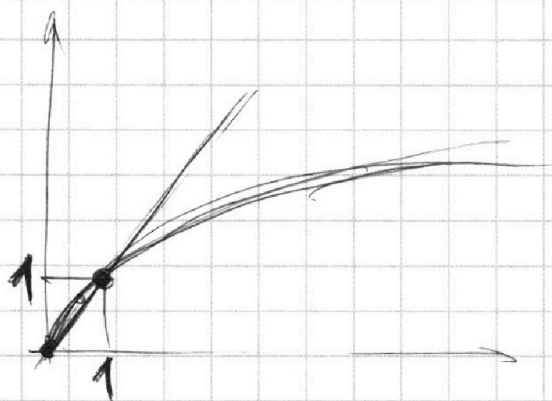
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{A+B}$~~

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$A+B - 2\sqrt{AB} = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 + B^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

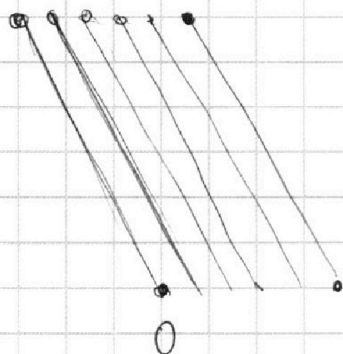
5
☐

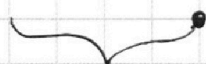
6
☐

7
☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




-13



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

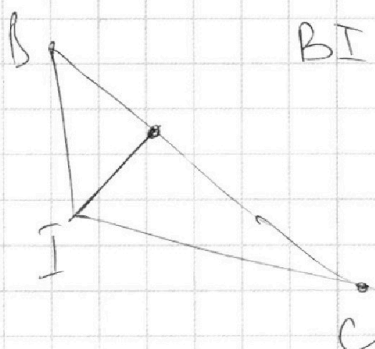
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$MA = \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot IC = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot IB$$



$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

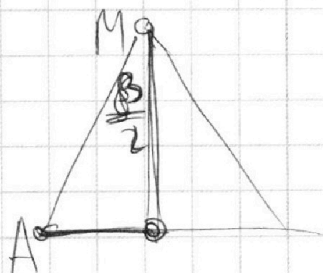
$$IC = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

или хотим

AI



$$\frac{AI}{2MA} = \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{AI}{2 \cdot \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 = 81x^2 - 18x + 1 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a+b^2 + 2\sqrt{a}b$$

$$b = b^2 + 2\sqrt{a}b$$



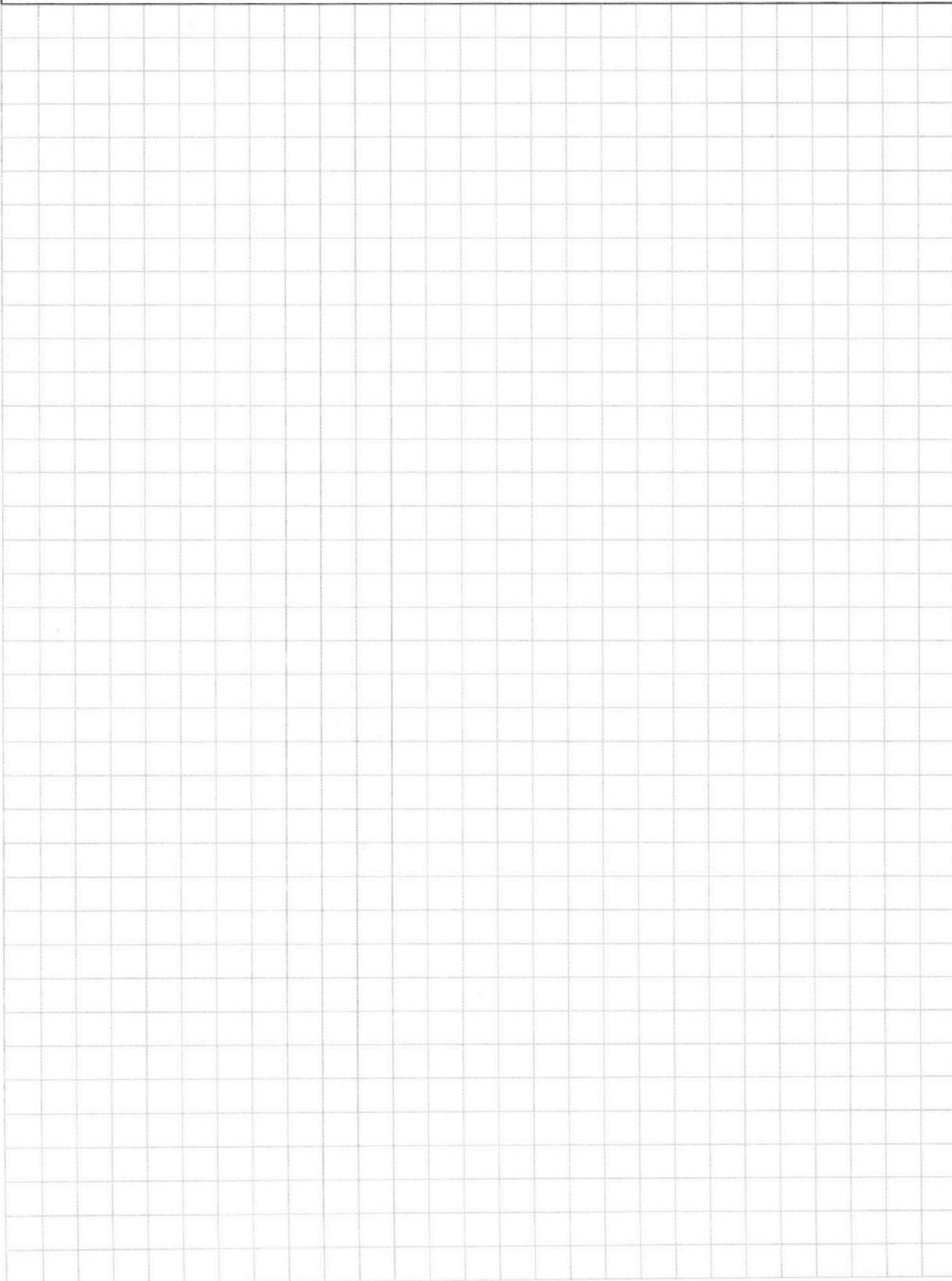
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



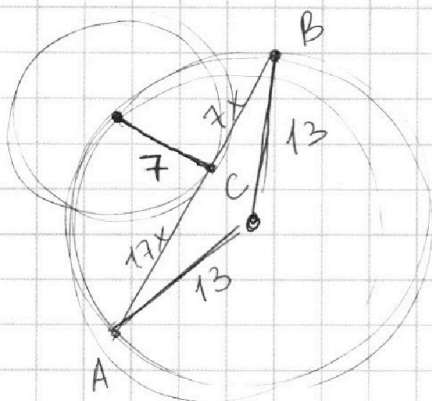
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

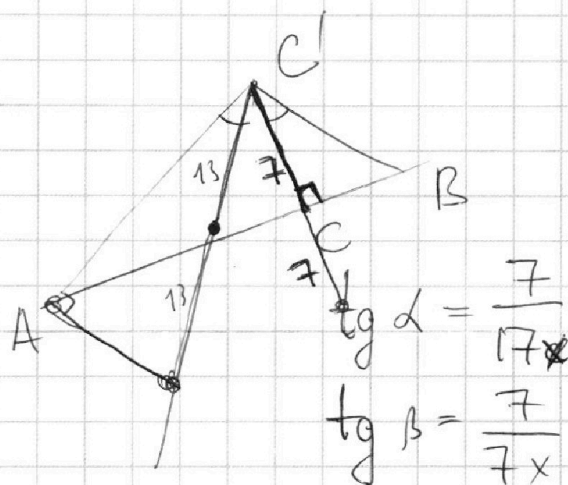
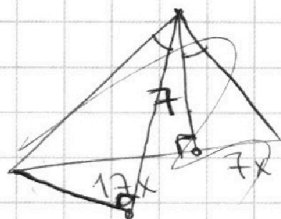
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$24x = ?$$



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \tan \beta &= \frac{7}{7x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 14 &= AC' \cdot C'B \\ (AC' \cdot C'B)^2 &= (13 \cdot 14)^2 \tan \beta \\ &= \frac{7}{17} \end{aligned}$$

$$(49 + (17x)^2)(49 + (7x)^2)$$

$$t = x^2$$

$$(49 + 289t)(49 + 49t) = 13^2 \cdot 4 \cdot 7^2$$

$$(49 + 289t)(1 + t) = 13^2 \cdot 4$$

$$289t^2 + (289 + 49)t + 49 - 13^2 \cdot 4 = 0$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = 839056$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$(13 \times 14)^2$$

$$13^2 = 169$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$338^2 =$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ 1014 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ 578 \\ \hline 1734 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1734 \\ \hline 181203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181203 \\ \times 4 \\ \hline 724812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 29 \\ \hline 261 \\ 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$261$$

$$58$$

$$841$$

$$2898$$

$$2898$$

$$84$$

$$\begin{array}{r} 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{13}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a_1, a_2$$

$$b_1, b_2$$

$$c_1, c_2$$

$$(a, b) = 1$$

$$(a+b; a^2 - 7ab + b^2) =$$

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$abc : 2^{28} 7^{34}$$

$$abc = 2^{22} 7^{34}$$

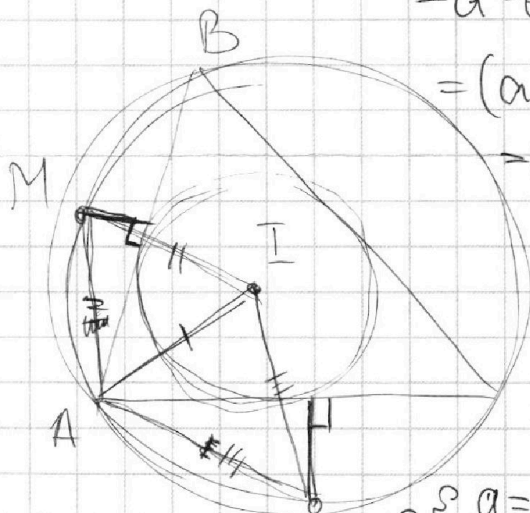
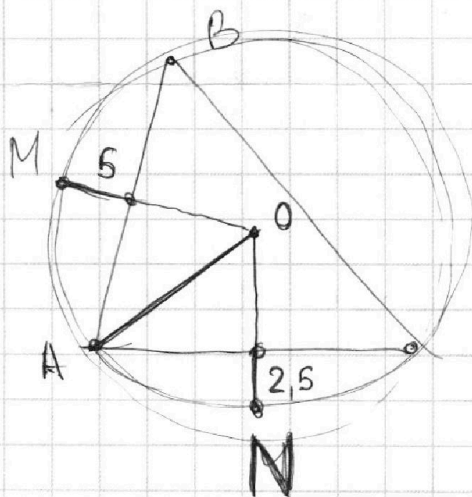
$$c = 2^{13} 7 = (a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) =$$

$$= (a+b; -9ab) =$$

$$= (a+b; 9ab)$$

$$a : p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b/p$$



$$a_1 + b_1 = 15$$

$$b_1 + c_1 = 17$$

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{13}$$

$$P(-13; 26) \quad Q(3; 26)$$

$$A(0; 0) \quad R(16; 0)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2,5 = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$5 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$10 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$\text{найдем: } \frac{(b-a)^2}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$a_1 + b_1 = 15$$

$$b_1 + c_1 = 17$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 32$$

$$b_1 + c_1 = 17$$

$$a_1 = 15$$

$$b_1 = 2$$

$$c_1 = 15$$

$$a_2 = 15$$

$$b_2 = 2$$

$$c_2 = 15$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_1, y_1 + 14)$$