



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:  $a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть  $a_2$  - степень вхождения 2 в число  $a, a_2 \in \mathbb{N}_0$

$a_3$  - степень вхождения 3 в число  $a, a_3 \in \mathbb{N}_0$

$a_5$  - степень вхождения 5 в число  $a, a_5 \in \mathbb{N}_0$

( $\in \mathbb{N}$  - принадлежит натуральным,  $\mathbb{N}_0$  - натуральным с 0)

$b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$  - определены аналогично

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow ab: 2^6 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 6$$

$$ab: 3^{13} \Rightarrow a_3 + b_3 \geq 13$$

$$ab: 5^{11} \Rightarrow a_5 + b_5 \geq 11$$

Аналогично  $b_2 + c_2 \geq 14$

$$a_2 + c_2 \geq 16$$

$$b_3 + c_3 \geq 21$$

$$a_3 + c_3 \geq 25$$

$$b_5 + c_5 \geq 13$$

$$a_5 + c_5 \geq 28$$

Тогда  $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 6 + 14 + 16 = 36$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

Аналогично:  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 24,5 \quad 29,5$

$$a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 25 \quad 30$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26$$

Тогда  $\min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{26}$

$$\text{но } \left. \begin{array}{l} a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$$

Нам удовлетворяет число  $a = 2^4 3^9 5^{12}$

$$b = 2^2 3^4$$

$$c = 2^{10} 3^{17} 5^{16}$$

Докажем, что  $a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что это не так  $\Rightarrow$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 17$$

$$a_2 \leq 17 - b_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 14$$

$$-b_2 - c_2 \leq -14$$

$$17 - b_2 - c_2 \leq 3 \Rightarrow a_2 \leq 3$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 12$$

$$b_2 \leq 12 - a_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 16$$

$$-a_2 - c_2 \leq -16$$

$$12 - a_2 - c_2 \leq 1 \Rightarrow b_2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 4 \geq a_2 + b_2 \geq 6 \quad \text{Противоречие.}$$

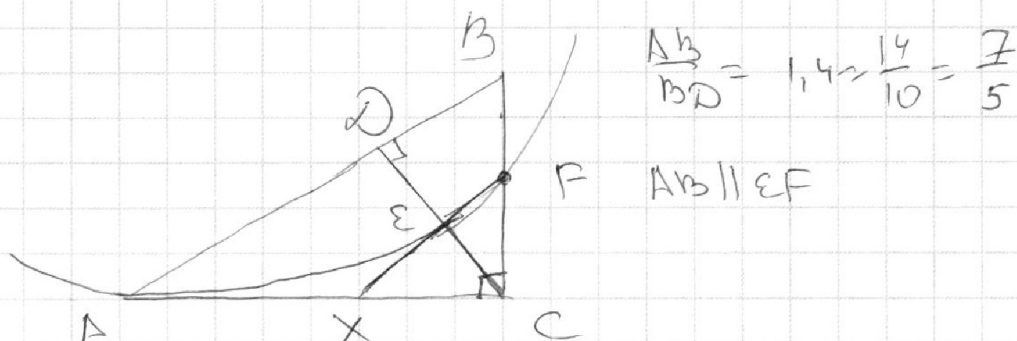
$$\text{Аналогично } a_3 + b_3 + c_3 \geq 25$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$$

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $EF \cap AC = X$   $XA$  - кас.,  $EF$  - секущая  
По  $\Delta$   $AX^2 = XE \cdot EF$

$XF \parallel AB \Rightarrow \Delta CEX \sim \Delta CDA$  (1)

$\Delta CEF \sim \Delta CDB$  (2)

$\Delta CFX \sim \Delta CAB$  (3)

(2):  $\frac{CE}{CD} = \frac{XF}{CB} = \frac{EF}{BD}$

$\Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow$

(3):  $\frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB} = \frac{CF}{CB}$

$\Rightarrow \frac{XF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow EF = \frac{5}{2} XF$

$AX^2 = \frac{5}{2} XF^2 \Rightarrow AX = \sqrt{\frac{5}{2}} XF$

2)  $\frac{AD}{AB} = \frac{AB - DB}{AB} = 1 - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{5}{2} = \frac{2}{7} \Rightarrow AD = \frac{2}{7} AB$

$\Delta CAB \sim \Delta 90^\circ - CD \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = \frac{2}{7} AB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{2}{7}} AB$

3) (3)  $\frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB}$

$\frac{XF}{AB} = \frac{CA - AX}{CA} = 1 - \frac{AX}{CA} \Rightarrow 1 = \frac{XF}{AB} + \frac{AX}{CA}$

или. по синус. свр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} XF}{\sqrt{2} AB} = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{XF}{AB} \Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{2}{2+\sqrt{10}}$$

4)  $AB \parallel EF$ ,  $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{AD \cdot DC}{EF \cdot CE} = \frac{AD \cdot BD}{EF^2} = \frac{\frac{5}{2} AB \cdot \frac{2}{2} AB}{\frac{25}{49} XF^2} =$$

$$= \frac{2}{5} \left( \frac{AB}{XF} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{(2+\sqrt{10})^2}{2^2} = \frac{4+10+4\sqrt{10}}{10} = \frac{14+4\sqrt{10}}{10} = \frac{7+2\sqrt{10}}{5}$$

Ответ:  $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{7+2\sqrt{10}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = t \Rightarrow x = 5t + 2\pi$$

$$\sin(5t + 2\pi) - \sin t = 0$$

$$\sin 5t - \sin t = 0$$

$$\sin(3t + 2t) - \sin(3t - 2t) = 0$$

$$\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$2 \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9\pi}{2} \geq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \geq -\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$9\pi \geq 5\pi n + 4\pi \geq -\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$5\pi \geq 5\pi n \geq -5\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq n \geq -1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -1; 0; 1$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq k \geq -2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1$$

$$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\text{Order: } x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ii)  $a \neq 0$

$500 : a > 0$  (где  $a < 0$  аналогично)

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

Заметим, что  $b$  не влияет на угол наклона  
прямой, а только  $a$ .

Проведём общую внутреннюю касательную  
к двум окружностям

Пусть она касается (2) в г. B, (3) в г. C  
и Оу в точке A

$$\text{Центр}(2) - O \quad \text{Центр}(3) - OI$$

$$\triangle BOA \sim \triangle CIA \quad \left( \begin{array}{l} \angle OBA = \angle CIA = 90^\circ \\ \angle OAB = \angle IAC \text{ (верт)} \end{array} \right)$$

$$\frac{OA}{AI} = \frac{BO}{OI} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{OA}{OI - OA} = \frac{5}{2}$$

$$OI = 9 \Rightarrow 2OA = 45 - 5OA$$

$$2OA = 45 \Rightarrow AO = \frac{45}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(0; -\frac{45}{7})$$

$$y_{кас} = kx + c$$

$$k < 0$$

$$A \in y_{кас} \Rightarrow$$

$$c = -\frac{45}{7}$$

$$y_{кас} = kx - \frac{45}{7}$$

$$(2): x^2 + (kx - \frac{45}{7})^2 = 25$$

$$x^2 + k^2x^2 - \frac{90}{7}kx + \frac{45^2}{7^2} = 25$$

$$(1+k^2)x^2 - \frac{90}{7}kx + \frac{45^2 - 35^2}{7^2} = 0$$

см. то след. сзр



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

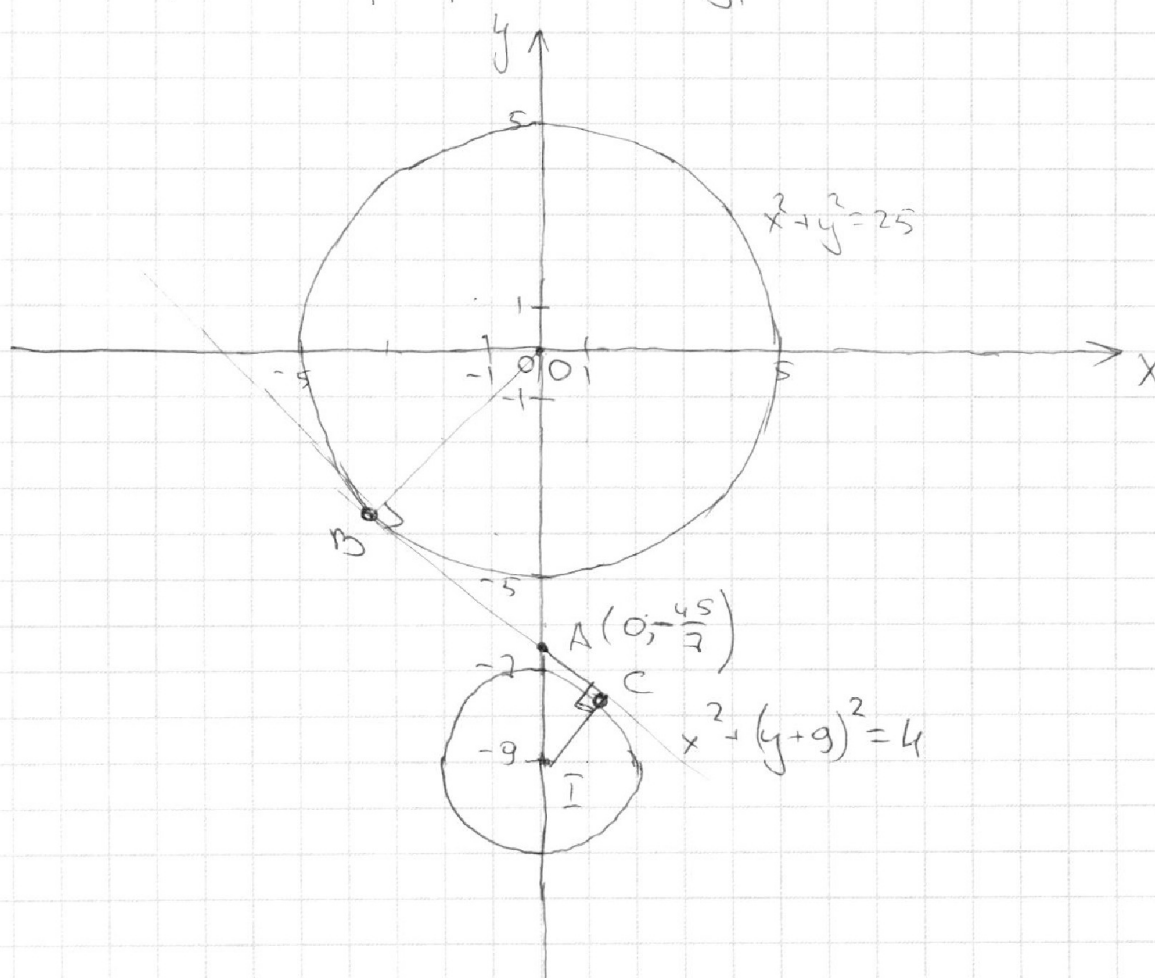
☐☐☐☒☐☐☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Построим графики этих уравнений



I)  $a=0$  (1)  $5x - b = 0$   
При  $b=0$   $x=0$  пересекает окружности  
в 4 точках  $\Rightarrow$  4 решения

см. на след. сгр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная  $\Rightarrow$  одно решение должно иметь  
уравнение  $\Rightarrow D=0 \Rightarrow D_1=0$

$$D_1 = \frac{45^2}{7^2} k^2 - \frac{45^2 - 35^2}{7^2} (1 + k^2) = 0$$

$$45^2 k^2 - (45^2 - 35^2)(1 + k^2) = 0$$

$$9^2 k^2 - (9^2 - 7^2)(1 + k^2) = 0$$

$$81 k^2 - 32(1 + k^2) = 0$$

$$81 k^2 - 32 k^2 = 32$$

$$49 k^2 = 32$$

$$k^2 = \frac{32}{49} \Rightarrow k = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad (\text{т.к. } k < 0)$$

При  $k = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad c \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow$   
прямая будет пересекать всего график (2) и (3)  
не более чем два раза

При  $k \in (-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}) \quad c \in (-\infty; +\infty)$  прямая  
будет пересекать график (2) и (3) в разных  
различных точках

При  $k \in (-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0) \quad c \in (-\infty; +\infty)$  прямая  
будет пересекать график (2) и (3) не более, чем  
в двух точках.

$$k \in (-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0) \quad (-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7})$$

$$k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \Rightarrow 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$a \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}) \Leftrightarrow a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$$

(аналогично для  $a < 0$ )

$$\text{Ответ: } a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

1) Пусть  $\log_{11} x = a$   
 $\log_{11} (0,5y) = b$

$$a+b = \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,5xy) \Rightarrow$$

$$0,5xy = 11^{a+b} \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^3 \cdot \frac{1}{12} = -5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} = -5$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = -5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,125y^3) = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} + \frac{13}{3 \log_{11} (0,5y)} = -5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} = -5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} = -5$$

$$2) \quad a^4 - \frac{16}{3a} = -5 \quad \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0$$

$$f(a) = \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{3} \left( \frac{(15a^4 + 15) \cdot a - (3a^5 + 15a - 16)}{a^2} \right) =$$
$$= \frac{15a^5 + 15a - 3a^5 - 15a + 16}{3a^2} = \frac{12a^5 + 16}{3a^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f'(a) = 0 \quad a = -\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$

$f'(a)$

$$\begin{aligned} \text{При } a < 0 \quad a^4 > 0 \quad \left\{ \begin{aligned} a^4 - \frac{16}{3a} > 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 > 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{При } a > 0 \quad f'(a) > 0 \Rightarrow f(a) \text{ не более одного корня}$$

$$f(0,1) < 0 \quad f(1) > 0 \Rightarrow \text{корень есть}$$

$$g(b) = b^4 + \frac{16}{3b} + 5 \quad b = -a$$

$$g(-a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5 \quad \text{т.е. те рассуждения}$$

$$\text{Если } x_1 - \text{корень } f(a), \text{ то } -x_1 \text{ корень } g(b)$$

$$\text{Действительно } f(x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0$$

$$g(-x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = x_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$xy = 2 \cdot 11^0 = 2$$

$$\text{Ответ: } xy = 2$$

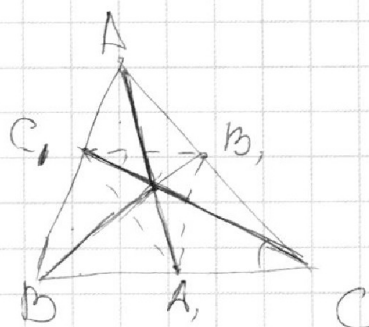
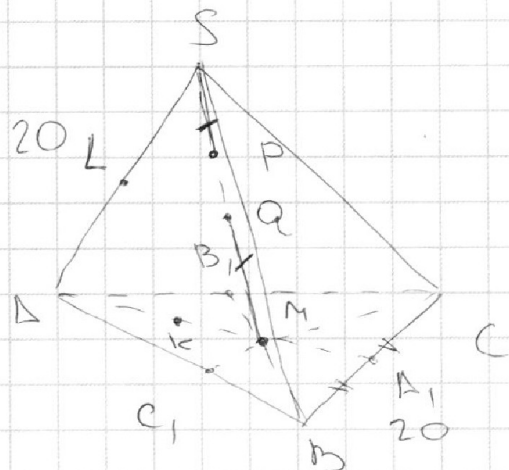
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                                     |                                     |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







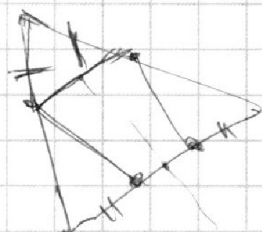
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc &: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac &: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -b \\ 2(a+b+c) &= 36 \\ a+b+c &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 12 \\ b &= 2 \\ c &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &\leq 3 \\ b_2 &\leq 1 \\ (5b^4 + 15) \cdot 3b &- 3(b^5 + 15b + 16) \end{aligned}$$

$$9b^2$$

$$\begin{aligned} a+b+c &= \min \\ a+b+c &\geq 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4b^5 - 2b(b^5 + 1) \\ 4b^5 - 2b^2 + 8b \\ 2b^6 + 8b \end{aligned}$$

$$c < 10$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq 6 \\ b+c &\geq 14 \\ a+c &\geq 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15b^5 + 45b - 3b^5 - 45b - 48 \\ 12b^5 = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25b^5 + 15b + 16 \\ x^2 - y^2 &= 2b^6 + 8b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_4 x - 6 \log_4 11 &= \frac{1}{3} \log_4 11^2 - 5 \\ \log_4 x - 6 \log_4 11 + \frac{2}{3} \log_4 11 + 5 &= 0 \\ \log_4 x - \log_4 11 + \frac{2}{3} \log_4 11 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\log_4 x - \frac{16}{3 \log_4 x} - 5 = 0$$

$$b^5 = 4$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq 13 \\ b+c &\geq 21 \\ a+c &\geq 25 \end{aligned}$$

$$3b^5 - 16 + 15b = 0$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 15b - 16 &= 0 \\ &\leq 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b+c &\geq 30 \\ y &= -15x + 17 \end{aligned}$$

$$D = \left(\frac{45}{2k}\right)^2 - \frac{45^2 - 35^2}{2^2} (1+k^2) = 0$$

$$b \leq 4$$

$$a \geq 9$$

$$\begin{aligned} y &= -15x \\ y &= -15(x-17) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$\begin{aligned} 45^2 - (45^2 - 35^2)(1+k^2) &= 0 \\ 45^2 - 45^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45k^2 - 45^2 + 35^2 - 45k^2 \\ + 35k^2 \end{aligned}$$

$$35k^2 + 35^2 = 45^2$$

$$79k^2 + 49 = 81$$

$$\begin{aligned} 49k^2 &= 81 - 49 \\ k^2 &= \frac{81-49}{49} \\ x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2}{2^2} &= 25 \end{aligned}$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle CEF}$$

$$\begin{aligned} \frac{45^2}{2^2} - 5^2 \\ \frac{45^2 - 16}{3b^2} \end{aligned}$$

$$b = 5\sqrt{4}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{32}{49} \\ &\sim 25k = -\frac{4}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} \left( \frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{10\pi}{3}$   
 $\frac{10\pi}{3}$   
 $\frac{24}{28}$   
 $\frac{28}{52}$   
 $\frac{9\pi-4\pi+5\pi}{15\pi+5\pi}$   
 $\frac{5\pi}{3}$   
 $\frac{15\pi-5\pi}{5}$   
 $\frac{10\pi}{3}$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi-2x}{10}$   
 $\sin x = \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right)$   
 $\sin x - \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = 0$   
 $0 \leq \frac{9\pi-2x}{10} \leq \pi$   
 $0 \leq 9\pi-2x \leq 10\pi$   
 $-9\pi \leq -2x \leq \pi$   
 $\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$

$\frac{x-2\pi}{5} = t$   
 $x = 2\pi = 5t$   
 $x = 5t + 2\pi$   
 $x = 2\pi + \frac{5\pi}{2}$   
 $x = 2\pi + \frac{5\pi}{2}$   
 $x = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$   
 $x = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$

$360 - \alpha - \beta$   
 $-\alpha - \beta$   
 $20$

$\frac{9\pi-4\pi+5\pi}{15\pi+5\pi}$   
 $\frac{5\pi}{3}$   
 $\frac{15\pi-5\pi}{5}$   
 $\frac{10\pi}{3}$

$\cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi-2x}{10}\right) =$   
 $\sin\left(\frac{5\pi-9\pi+2x}{10}\right) = \left(\frac{2x-4\pi}{10}\right) = \left(\frac{x-2\pi}{5}\right)$   
 $\sin x - \sin\left(\frac{x-2\pi}{5}\right)$   
 $\sin 5t - \sin t = 0$   
 $\sin(3t+2t) - \sin(3t-2t) = 0$   
 $\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \cos 3t \sin 2t$   
 $2 \sin 2t \cos 3t = 0$   
 $\sin 2t \cos 3t = 0$   
 $\sin 2t = 0$   
 $2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 $t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$   
 $\frac{x-2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$   
 $x - 2\pi = \frac{5\pi n}{2}$   
 $x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi$   
 $x = -\frac{\pi}{2}$   
 $x = 2\pi$   
 $x = \frac{9\pi}{2}$

$3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$   
 $t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$   
 $\cos 3t = 0$   
 $\frac{x-2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$   
 $x - 2\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$   
 $x = 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$   
 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$   
 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \leq \frac{9\pi}{2}$   
 $-\pi \leq 5\pi n + 4\pi \leq 9\pi$   
 $-\frac{5\pi}{4} \leq 5\pi n \leq \frac{5\pi}{4}$   
 $-1 \leq n \leq 1$   
 $\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \geq -\frac{\pi}{2}$   
 $27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi$   
 $10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi$   
 $1 \geq k \geq -2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot 11^{-2} - 5$$

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t} + 5 = 0 \quad | \times 3t$$

$$3t^5 - 18 + 2 + 15t = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$\log_4 x + \log_{11} 0.5y = t+2$$

$$\log_4 0.5xy = t+2$$

$$0.5xy = 11^{t+2}$$

$$xy = \frac{11^{t+2}}{0.5} = 2 \cdot 11^{t+2}$$

$$\log_{11} (0.5y) - \log_{0.5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0.5y} 11 - 5$$

$$y^4 z^4 + \frac{1}{2} + \frac{13}{3z} = t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t}$$

$$z^4 + \frac{16}{3z} = t^4 - \frac{16}{3t}$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$z+t=0$$

$$xy=2$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$(z^2+t^2)(z-t)(z+t) + \frac{16}{3} \left( \frac{t+z}{zt} \right) = 0$$

$$z > t$$

$$(z+t) \left( (z^2+t^2)(z-t) + \frac{16}{3zt} \right) = 0$$

$$3zt(z^2+t^2)(z-t) + 16 = 0$$

$$zt(z-t) < 0$$

$$3ab(a^2+2b)+16=0$$

$$z-t=a$$

$$3a^3b+6b^2a+16=0$$

$$zt=b$$

$$6b^2a+3a^3b+16=0$$

$$a^2 = z^2 - 2zt + t^2$$

$$D = 9a^2 - 6 \cdot 16 \cdot 4a$$

$$a^2 + 2b = (z^2 + t^2)$$

$$5b = 5 \cdot \frac{16}{9}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$$

$$b = \frac{16}{9}$$

$$a^2 + 4b = (z+t)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 4 \\ x^2 + (y+9)^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$a=0$$

$$5x - b = 0$$

$$5x = b$$

$$b \neq 0$$

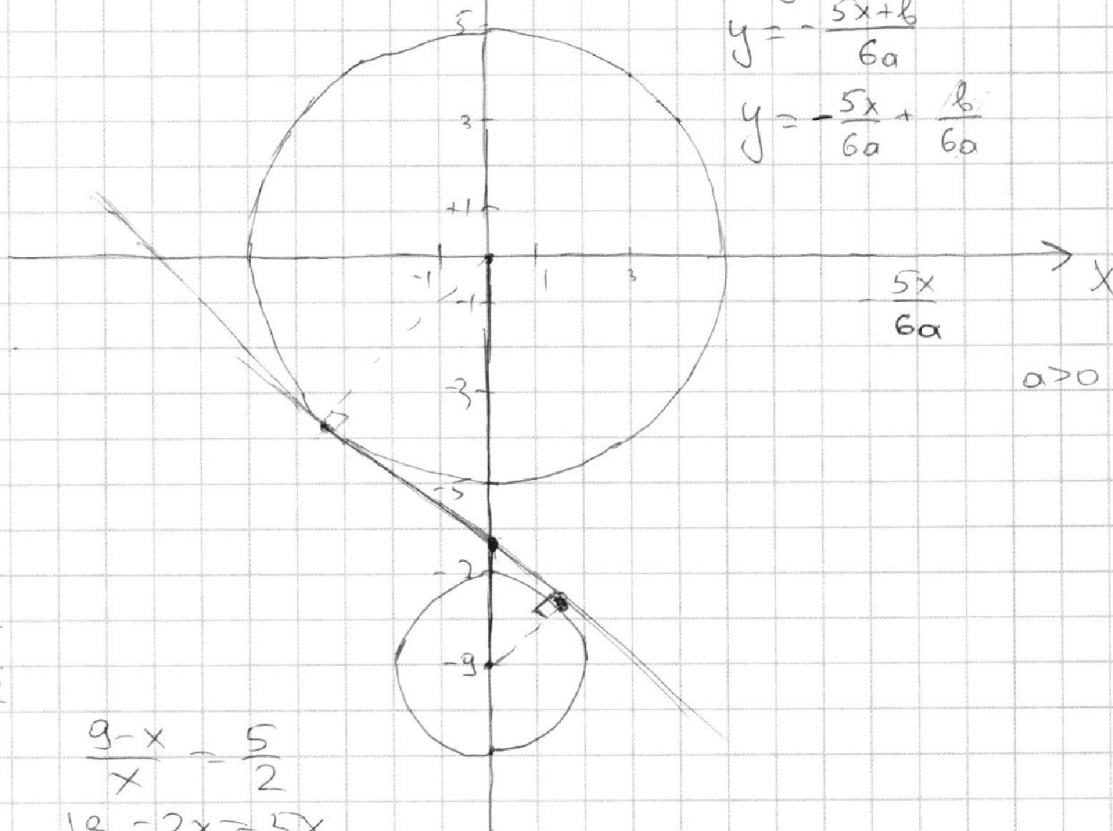
$$x = \frac{b}{5}$$

$$a \neq 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = -\frac{5x+b}{6a}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$



$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{9-x}{x} = \frac{5}{2}$$

$$18 - 2x = 5x$$

$$x = \frac{18}{7}$$

$$y = -\frac{18}{7}$$

$$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{2}$$

$$2x = 45 - 5x$$

$$7x = 45$$

$$x = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$$

$$\left(\frac{45}{7}\right)^2 -$$

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= kx - \frac{45}{7} \end{aligned}$$