МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам
$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$
Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

   б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

№1
$$\begin{cases} ab = n\cdot 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10} \\ bc = m\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} \\ ac = k\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} \\ m, n, k \in N \end{cases}$$

$abc = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{n\cdot m\cdot k\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}}$ мы уже видим, что т.к. $a, b, c \in N$ $n\cdot m\cdot k$ должно делится на $3^{2k+1}\cdot 5^{2g+1}$ (т.к. степень под корнем должна быть чётной ($abc \in N$)) где $k, g \in \{0\} \cup N$

для наименьшего зн. $abc$ должно быть $\min$ $n\cdot m\cdot k$

пусть $a_i$ – ~~мах~~ степень $i$ в числе $a$ такая, что $(a : i^{a_i}) \in Z$ и ∄ $i$ („макс" степень)

тогда:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 + n_1 \\ b_2 + c_2 = 14 + m_2 \\ a_2 + c_2 = 19 + k_2 \end{cases}$$
т.к. мы хотим min $m n k$ до $n_1 = m_2 = k_2 = 0$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases} - \begin{cases} c_2 - b_2 = 10 \\ c_2 + b_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases} + \begin{cases} 2c_2 = 24 \\ b_2 = c_2 - 10 \\ a_2 = 19 - c_2 \end{cases} \begin{cases} c_2 = 12 \\ b_2 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases}$$
сист. имеет реш. => предп. верное

аналогично пробуем с 3

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases} \begin{cases} c_3 - b_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 13 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases} \begin{cases} 2c_3 = 21 \\ b_3 = c_3 - 8 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases}$$

видим противоречие, т.к. $c_3 \in N \cup \{0\}$ => $2c_3$ ≠ нечет.
для исправ. нам нужно добав. к ∀ зн. справа 1 (не важно к какому), т.к. зн. $n\cdot m\cdot k$ от этого не изм., пусть это будет $n_3$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases} \begin{cases} c_3 = 10 \\ b_3 = 3 \\ a_3 = 8 \\ n_3 = 1 \end{cases}$$ т.е. $\min n = 3$

теперь 5:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases} + \begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 23 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ 2b_5 = -7 \end{cases}$$
мин. возм. зн. $2b_5 = 0$

противор. => нам нужно добавить к $m_5$ или $n_5$ (без разницы) в сумме 7, чтобы
$a_5 + c_5 + 2b_5 = 23 + n_5 + m_5 = 30$
(добав. к $n_5$ беспл. мы меньше увел. разряд)

пусть это опять $n$

$n_5 = 7$

И тогда:
$$\begin{cases} a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 = 0 \\ a_5 = \cancel{10} 17 - 0 \\ c_5 = 13 - 0 \end{cases}$$
$n = 3\cdot 5^7$
$m = 1$
$k = 1$

т.е. $abc = \sqrt{3\cdot 5^7\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}} = \sqrt{2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{60}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

это зн. $abc$ минимально, т.к. если мы не умножим хотя на 1 простое число по одной из вышеупомянутых систем не решится.

**Ответ** мин. $abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

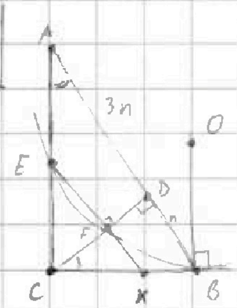
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2




ДП: продлим $EF$ до перес. с $BC$ в т. $X$

Т.к. $CD$ - высота к гипотен. в прямоуг. $\Delta$ то $\Delta CAD \sim \Delta CDB \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD}$ $\quad DC^2 = 3n^2 \quad DC = n\sqrt{3}$

$tg\,\angle A = DC/AD = \frac{\sqrt{3}n}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow$ $BC = \frac{1}{2}AB = 2n$; $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}\cdot 2n$

$AD = 3n \quad DB = n$

$AB \parallel EF$

$EF \parallel AB \Rightarrow \left.\begin{matrix}\angle CEF = \angle CAD = 30^\circ \\ \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ\end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CDA \sim \Delta ABC$

в.ок. $\Delta$ т. $X$: $\quad XB^2 = XE \cdot XF$ $\qquad \Delta CEF \sim \Delta FX \sim \Delta CEX$ (т.к. $\Delta CEX$ - прямоуг., а $CF \perp EX$)

$\Delta CEX \sim \Delta CEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{EF}{FX} \Rightarrow EF = 3FX \quad EX = 4XF$

$XB^2 = 4XF^2$; $\quad \angle DCB = \angle A = 30^\circ \Rightarrow FX = \frac{1}{2}CX \Rightarrow CX^2 = 4FX^2$

$XB^2 = CX^2$ т.к. $XB$ и $CX > 0$ то $XB = CX = \frac{1}{2}BC$

$\left.\begin{matrix}X\text{ - серед. } BC \\ EX \parallel AB\end{matrix}\right| \Rightarrow EX$ - средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}n$; $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}n$

$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2 \qquad S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$

Ответ: $16/3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$

$\arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\sin\alpha = \cos x \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-2{,}5\pi, 2{,}5\pi]$ при этом $5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$ $\alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$x \in [-3\pi, 2\pi]$ те $\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$2x + \pi = 5\pi \pm 10x + 20\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

1) $8x = -4\pi - 20\pi n$ $n = 1$ $x = -3\pi$, если увел $n$ то $x\downarrow \Rightarrow$ уменьш $n$

$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} - 2{,}5\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{cases}$ $n = 0$: $x = -\frac{\pi}{2} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если умен $n$ то $x\uparrow$ все, мы достигли второго крайнего зн. в этом случае. $x_1 \in \{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\}$

2) $12x = 4\pi + 20\pi n$ $n = 1$ $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если увел $n$ то $x\uparrow \Rightarrow$ уменьш $n$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}n\pi \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{cases}$ $n = 0$ $x = \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -1$ $x = -\frac{4}{3}\pi \in [-3\pi, 2\pi]$

$n = -2$ $x = -3\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ вторая крайняя точка

в этом случае $x_2 \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

$\left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$

Ответ. $\{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

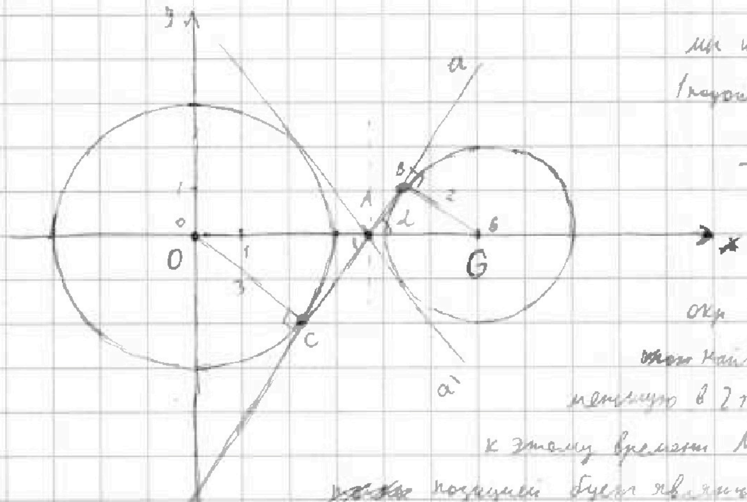
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 9 \\ x^2-12x+36+y^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2+y^2 = 2^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

постр. график $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2+y^2 = 4 \end{array}\right.$

для 4 реш нужно, чтобы прямая, заданная $y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b$ пересекла их 4 раза




мы имеем право брать $\forall$ $b$ и если хоть 1 подойдёт то $a$ подходит $\Rightarrow 1{,}5b = \forall = C$ $\in R$

$-\frac{a}{2}$ задаёт угол наклона прямой

Доп. прямая $a$ $\cap$ большую окр в 2 точках, тогда меняя в ... ~~...~~ найдём положение когда она первый раз $\cap$ меньшую в 2 тчк, данное решение не подойдёт если к этому времени N перес с большей $\neq$ 1 или 0 крайней ~~...~~ позицией будет являться касательная к 2 окр, пересек. отрезок OG ($a$ и $a'$ на рис). Если мы увел. $\alpha$, очевидно пересечений вообще не будет (предельн. вр. вокруг A прямой $a$), и их будет 4 пока

$-\frac{a}{2} \in (tg\alpha; -tg\alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} \angle OAC = \angle BAG \text{ (т.к. верт)} \\ \angle OCA = \angle GBA = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OAC \sim \triangle ABG \qquad \frac{AG}{6-AG} = \frac{2}{3} \qquad \begin{array}{l} 3AG = 12 - 2AG \\ AG = 2{,}4 \end{array}$$

$\sin\alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{2}{2{,}4} = \frac{5}{6}$ $\quad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11}$ $\quad -\frac{a}{2} \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$

$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

**Ответ**: $a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5

Ограничения

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

$$\log_3^4 x + \log_x 3(6 - 2{,}5) + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{3{,}5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$\log_3^5 x + 8\log_3 x + 3{,}5 = 0 \qquad a = \log_3 x \neq 0$$

$f = a^5 + 8a + 3{,}5 \qquad f' = 5a^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ функц. возр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ есть лишь 1 $a$ уд. $a^5 + 8a + 3{,}5 = 0$ и ему соотв. лишь 1 $x$

аналог. $\log_3^4(5y) - \cancel{3{,}5\ldots} \; 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0 \qquad b = \log_3 5y \neq 0$ т.к. $y \neq \frac{1}{5}$

$f = b^5 + 8b - 3{,}5 = 0 \qquad f' = 5b^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ лишь 1 возм. зн. $y$

1 зн. $x$ и 1 зн. $y$ $\Rightarrow$ есть единств. зн. $xy$, если мы его найдем то оно будет ответом

$$\begin{cases} a^4 + \frac{3{,}5}{a} + 8 = 0 \\ b^4 - \frac{3{,}5}{b} + 8 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что сист. верна если верно одно из равенств и $a = -b$

т.е. $\log_3 x = -\log_3 5y \qquad \log_3 5xy = 0 \qquad 5xy = 1$

$xy = 0{,}2$

мы знаем что у равенств есть решения, причём единств. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ рассмотренный нами случай подходит и единственен

Ответ: $xy = 0{,}2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6) Территория внутри параллелограмма огр. прямыми:

$y = 42$

$y = 0$

$y = -3x$

$y = -3x + 60$

Мы можем „расчертить" параллелогр. на паралл. наклон. прямые вида $y = -3x + n$, где $n \in Z$, $n \in [0; 60]$

т.е. $A(x_1, y_1)$ экв. $A(x_1; -3x_1 + a)$ $a \in Z$, $a \in [0, 60]$

и $B(x_2; y_2)$ экв. $B(x_2; -3x_2 + b)$ $b \in Z$, $b \in [0; 60]$

Нате усл.: $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$

$3x_2 - 3x_2 + b - (3x_1 - 3x_1 + a) = 33$

$b - a = 33$ $a, b \in Z$ $a, b \in [0; 60]$

$b = 60$. $a = 60 - 33 = 27$

$b = 59$. $a = 59 - 33 = 26$

...

$b = 33$ $a = 33 - 33 = \underline{\underline{0}}$ меньше быть не может => всего пар $a$-$b$ 28 (от $0$ до $27$ для $a$)

но мы видим, что разность $b - a$ не зав. от $x$ и $y$ => подходит для всех пар точек с целочисленными координатами.

$\measuredangle$ OP: его проекция на $Ox = 14$ и $\in [-14; 0]$ т.е. содерж. 15 целых зн. Т.К. обе коорд. целочисленные то больше 15 точек нужных нам там быть не может (иначе $x \notin Z$). Из этих 15 с целыми $x$ у 15 целый $y$ т.к. $y = \text{целое} \cdot x$ => при $x \in Z$ $y \in Z$

т.е. на каждой $42 \geq y = -3x + n \geq 0$ $n \in Z$, $n \in [0, 60]$ есть 15 ~~...~~ точек, уд. усл.

т.е. с 2 отрезков $42 \geq y = -3x + a \geq 0$ и $42 \geq y = -3x + b \geq 0$ можно взять $15 \cdot 15$ пар точек (кажд. точк. ~~для~~ у $a$ может обр. пару с кажд. точкой у $b$), а пар $a$-$b$ есть 28

$N_{пар} = 15 \cdot 15 \cdot 28 = 225 \cdot 4 \cdot 7 = 900 \cdot 7 = 6300$ пар.

Ответ: 6300 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\sin(5\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

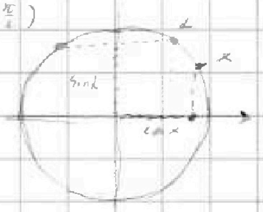
$x + \frac{\pi}{2} \in [-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$

! $x \in [-3\pi; 2\pi]$

$\alpha$ $\sin\alpha = \cos x$

$5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$




$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z} \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n$

1) $2x + \pi = 5\pi + 10x + 20\pi n$

$8x = -4\pi - 20\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2{,}5\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$

$n = -1 \quad x = -3\pi$ ✓

$n = 0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$ ✓

$n = 1 \quad x = 2\pi$ ✓

~~$5(2\frac{\pi}{2})$~~

$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

2) $2x + \pi = 5\pi - 10x + 20\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

$12x = 4\pi + 20\pi n \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n$

$n = 1 \quad x = 2\pi$

$n = 0 \quad x = \frac{\pi}{3}$

$n = -1 \quad x = -\frac{4}{3}\pi$

$n = -2 \quad x = -3\pi$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

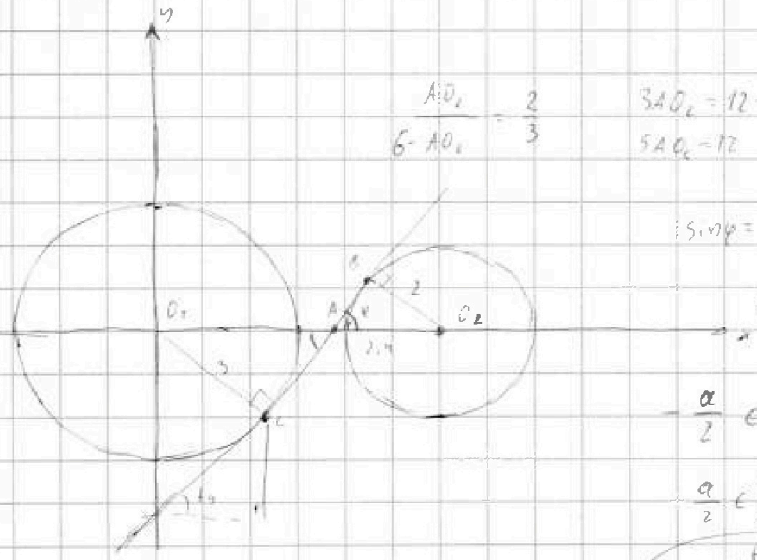
4) 4 реш. Все зн. $a$

$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(\underbrace{x^2 + y^2 - 12x + 32}) = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = (x-6)^2 + y^2 - 4$

$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$

$y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b$




$\frac{AO_2}{6 - AO_2} = \frac{2}{3}$

$3AO_2 = 12 - 2AO_2$

$5AO_2 = 12 \quad AO_2 = 2{,}4$

$\sin\varphi = \frac{2}{2{,}4} = \frac{5}{6}$ $\quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$-\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$a \in \left[-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1)

$ab = n \cdot 2^{9} 3^{10} 5^{13}$

$bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = k \cdot 2^{19} 3^{14} 5^{30}$

min $abc = ?$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \end{cases}$$

$abc$ ...

т.е. $2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3}$

т.е. $n_1 \geq$ ~~...~~ $19$ $n_2 \geq 13$ $n_3 \geq 30$

$$\begin{cases} a_1 = 9 - b_1 \\ b_1 + c_1 = 14 \\ (9 - b_1) + c_1 = 19 \end{cases}$$

$c_1 = 14 - b_1$

$c_1 = 10 + b_1$

$2c_1 = 24$ $c_1 = 12$ $b_1 = 2$ $a_1 = 7$

$2^{21}$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 14 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_3 - b_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 14 \end{cases}$$

$2c_3 = 22$

$c_3 = 11$ $b_3 = 3$ $a_3 = 7$ $m = 3^{?} 5^{7}$

$abc = \sqrt{mnk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$

$$\sqrt{2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 13 \\ b_5 + c_5 = 16 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$

$c_5 - b_5 = 20$

$c_5 + b_5 = 14$

$c_5 = 17$

$b_5 = -3$ неподх.

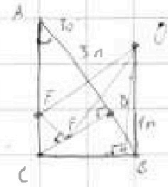
$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 17 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 30 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 17 \\ c_5 = 13 \end{cases}$$

---

2)

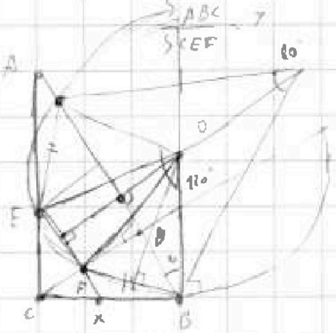


$\frac{CF}{FE} = \frac{CD}{AD}$ $\frac{n}{CD} = \frac{CD}{3n}$ $CD = n\sqrt{3}$

$\frac{EC}{FE} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\text{tg}\angle A = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ $\Rightarrow CB = 2n$

$AC = 2\sqrt{3}n$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$



$XB^2 = XE \cdot XF$

$XE = 4XF$

$XB^2 = 4XF^2$

$CX = 2XF$ $CX^2 = 4XF^2$

$XB^2 = CX^2$

т.к. $XB, CX > 0$ то $XB = CX$ $\Rightarrow XE$ - ср. линия $= 2n$

~~$EF = \frac{3}{4}CM$~~ $EF$ = ср. ли. $\Delta CAM = \frac{3}{2}n$

$CF = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}n$

$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2$

$S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$

$\frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$

$\frac{4\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{16}{3}$

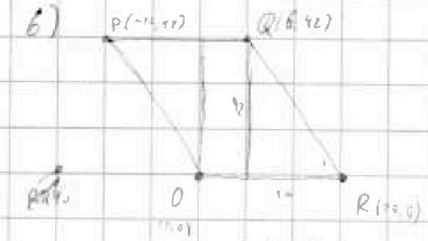
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6)




$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

max $\Delta x = 20$

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

$33 = 3 \cdot 11$

| | |
|---|---|
| $\Delta x = 0$ | $\Delta y = 33$ |
| $\Delta x = 1$ | $\Delta y = 30$ |
| $\Delta x = 2$ | $\Delta y = 27$ |
| $\Delta x = 3$ | $\Delta y = 24$ |
| $\Delta x = 4$ | $\Delta y = 21$ |
| $\Delta x = 5$ | $\Delta y = 18$ |
| $\Delta x = 6$ | $\Delta y = 15$ |
| $\Delta x = 7$ | $\Delta y = 12$ |
| $\Delta x = 8$ | $\Delta y = 9$ |
| $\Delta x = 9$ | $\Delta y = 6$ |
| $\Delta x = 10$ | $\Delta y = 3$ |
| $\Delta x = 11$ | $\Delta y = 0$ |

$\Delta x = 0$ $0 + 33$

$\Delta x = 1$ $3 + 30$

$\Delta x = 2$ $6 + 27$

$\Delta x = 3$ $9 + 24$

$\Delta x = 4$ $12 + 21$

$15 + 18$

$18 + 15$

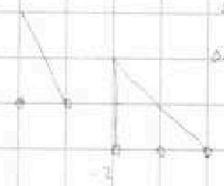
$\Delta x = 7$ $21 + 12$

$\Delta x = 8$ $24 + 9$

$\Delta x = 9$ $27 + 6$

$\Delta x = 10$ $30 + 3$

$\Delta x = 11$ $33 + 0$



7)

$SD = MQ$

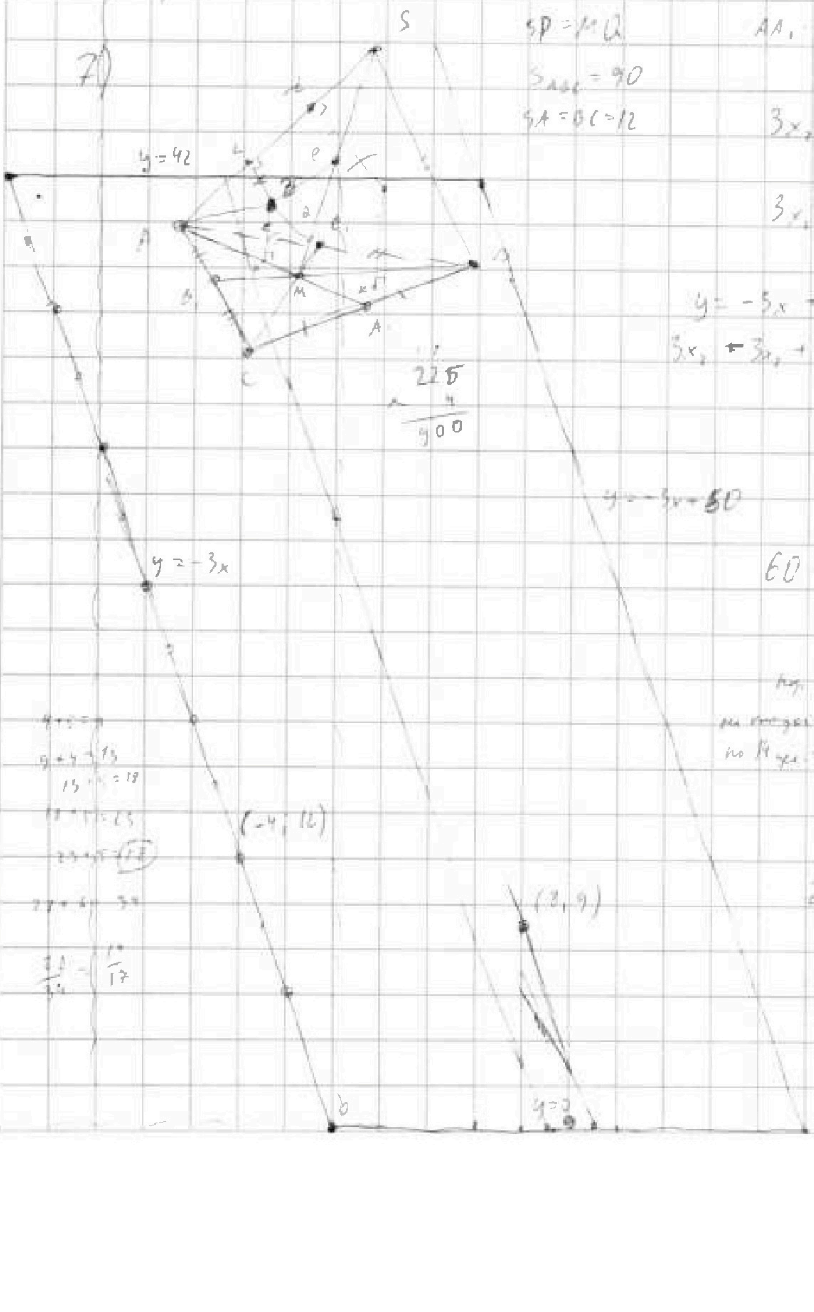
$S_{ABC} = 90$

$SA = BC = 12$

$AA_1, BB_1, CC_1 = 7$

$3x_2 + y_2 - 3x_1 - y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$




$225 \cdot 4 = 900$

$y = -3x + a$ $a \in [0; 60]$

$3x_2 - 3x_2 + b - (3x_1 - 3x_1 + a)$

$b - a = 33$ $b; a \in [0; 60]$

14 $\in \mathbb{Z}$ на пр. $b/a$

$60 - 27 = 33$ $33 - 0 = 33$

27 пр. $a, b$

$y = -3x + 33$

по 14 $x$ на 3-м ... $14 \times 14$

$x_2 - x_1 =$

$14 \cdot 14 = 196$

$14 \cdot 14 \cdot 27 = 7^2 \cdot 4 \cdot 3^3$

$196 \cdot 27 = 5292$

всего 5292 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте **крестиком номер задачи**,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
**страница считается** черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5) $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^{\cdot}} 243 - 8$ $\qquad \log_3^4(5y) - 2\log_{5y} 3 = \log_{25y}(3^{11}) - 8$

$\begin{cases} x>0 \quad y>0 \\ x\neq 1 \quad y\neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$\log_3^4 x + \frac{6\log_3 3}{\log_3 x} = 2{,}5\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{3{,}5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \quad x\neq 1$

$\log_3^5 x + 3{,}5 + 8\log_3 x = 0 \qquad f = 2a^5 + 16a + 7 = 0$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \qquad f' = 10a^4 + 16 > 0$ функ возр.

=> единств корень

$\log_3 x$

$2a^5 + 16a = 7$

$2a(a^4+8)$

$\frac{(8n+1)2}{n^5} = 7$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = 5{,}5\log_{5y} 3 - 8$

$\begin{cases} \log_3^4(5y) - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4(x) + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$ $\qquad \left(\frac{1}{\log_{5y} 3}\right)^4 - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0$

$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0$

$a^5 - 3{,}5 + 8a \qquad 5a^4 + 8 > 0$ функ возр => ед. зн. y

$\log_3 5y = -\log_3 x$

$\log_3 5xy = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0{,}2$