



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть a_2 - макс. степень двойки, входящая в число a . Аналогично: $a_3; a_5; b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5$.

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_5 + b_5 \geq 10 \end{cases} \quad (\text{все натур. или } 0)$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow \begin{cases} b_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases}$$

$$ac: 2^{13} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

Сложив все получим:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53 \end{cases}$$

Вспомним, что все числа натуральные или равны нулю:

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_2 + b_2 + c_2 &\geq 21 \\ a_3 + b_3 + c_3 &\geq 21 \text{ но } a_3 + b_3 + c_3 &\geq 27 \text{ но } a_3 + b_3 + c_3 &\geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 &\geq 27 \text{ но } a_5 + b_5 + c_5 &\geq 30 \end{aligned}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\Rightarrow abc: 2^{21} 3^{21} 5^{30} \quad abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

\Rightarrow меньше этого числа быть не может.

При этом a, b, c удовл. этому существуют:

$$a = 2^7 3^7 5^{15} \quad b = 2^2 3^3 \quad c = 2^{12} 3^{11} 5^{15}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$\triangle ADC \sim \triangle EFC$ по двум равным
углам.

Также

$\triangle ADC \sim \triangle ADB \sim \triangle ACB$ по двум равным углам.

$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ADB \sim \triangle ACB \sim \triangle EFC$

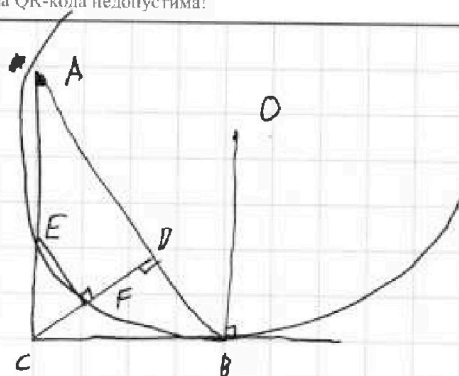
$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3} \cdot a \quad \text{где } BD = a$$

$$\Rightarrow \angle CAB = 30^\circ \quad \angle CPA = 60^\circ \Rightarrow \angle CEF = 30^\circ$$

$$BC = 2a$$

$$AC = 2\sqrt{3}a$$

$$\begin{aligned} S_{FEC} &= \left(\frac{EC}{2\sqrt{3}a} \right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{EC^2}{2\sqrt{3}a} \cdot \frac{3}{4} a = \\ &= EC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

По области определ. $\arcsin \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$ по ОДЗ.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{3}{5}x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}\pi\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{\pi}{5} = \pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi + \frac{5}{2}k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \geq -3\pi \right. \\ \left. \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \leq 2\pi \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[2\pi + \frac{5\pi k}{2} \geq -3\pi \right. \\ \left. 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \leq 2\pi \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[n \geq -2 \right. \\ \left. n \leq 1 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[k \geq -\frac{2}{5} \text{ no } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 0 \right. \\ \left. k \leq 0 \right] \end{cases}$$

$$n \in \{-2; -1; 0; 1\} \quad k \in \{0\}$$

$$x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\} \cup \{2\pi\}$$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

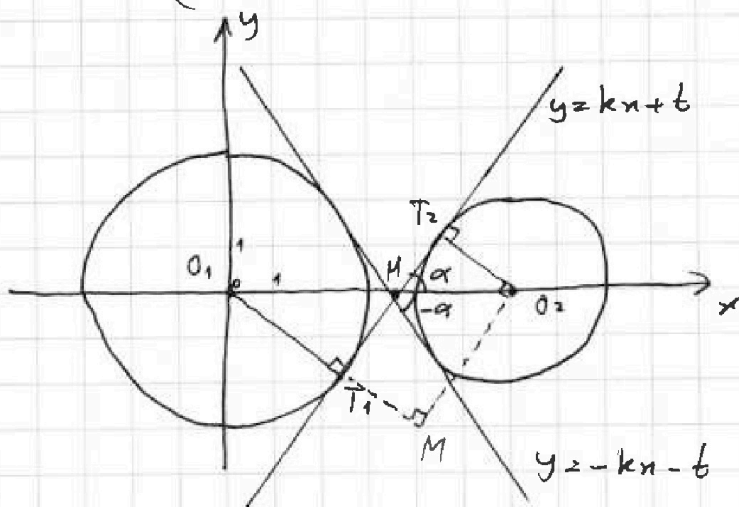
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Торча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b & \text{— линейная ф-я (прямая)} \\ \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases} & \text{уравн. окружн. с рад. 3 и 2} \\ & \text{и центрами в } (0;0) \text{ и } (6;0) \end{cases}$$



Заметим, что любая прямая пересекающая две окружности сразу будет тангенсна иметь угол с O_1M меньше, чем две касательные, показанные на графике.

k -я $y = kx + b$ образует с O_1M угол α
По св-ву кас-и линейной ф-ии $k = \operatorname{tg} \alpha$
~~Также~~ $\operatorname{tg} \angle T_2MO_2 = \alpha \Rightarrow \angle O_1MT_1 = \alpha$ т.к.
эти углы накрест лежащие. из ΔO_2M опустим
перпендикуляр на прямую O_1T_1 в т. N

$$\Rightarrow O_2M \parallel MT_1 \Rightarrow \angle O_1MT_1 = \angle O_1O_2M = \alpha$$

$$T_1M = T_2O_2 = 2 \quad O_1T_1 = 3 \Rightarrow O_1M = 5$$

$$O_1O_2 = 6 \Rightarrow \text{по ПП Пифагора } O_2M = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1M}{O_2M} = \frac{5}{\sqrt{11}} = k$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поиск QR-кода недопустим!

Продолжение задачи 4.

Рассмотрим $y = -\frac{a}{2} + \frac{3}{2}b$

~~Мы выясним~~

угол этой прямой с Ox ~~на~~
меньше чем α , если она пересекает
обе окр-сти.

$$-\operatorname{tg} \alpha \leq -\frac{a}{2} \leq \operatorname{tg} \alpha$$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} \leq a \leq \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Отвизно, что любая прямая проходящая
через точку пересеч. касат. H , пересекает
окружность в двух точках. (см. рисунок),
если $a \in (-\operatorname{tg} \alpha; \operatorname{tg} \alpha)$

Также для каждого такого a найдётся
число b , ~~т.к.~~ т.к. все прямые, проходящие
через H под углами $\in (-\alpha; \alpha)$ с Ox , имеют
свою запись в виде $y = kx + t$.

Ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.
$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^2(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

Решим $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5 \log_3^2 x - 8}{2 \log_3 x}$$

Положим $a = \log_3 x$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5a^2 - 8}{2a} - 8 \quad | \cdot 2a \quad (a \neq 0 \text{ по ОДЗ})$$

$$2a^5 + 12 = 5 - 16a$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$f(a) = 2a^5 + 16a + 7 \quad f'(a) = 10a^4 + 16$$

$$f'(a) > 0 \text{ всегда}$$

\Rightarrow у $f(a)$ не более одного корня.

Заметим, что $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$ и $f(a)$ возрастает.

\Rightarrow у $f(a)$ есть один корень $a \in [-1; 0]$

Рассмотрим $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^2(3^{11}) - 8$

Положим $b = \log_3 5y$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \quad | \cdot 2b \quad (b \neq 0 \text{ по ОДЗ})$$

$$2b^5 + 16b - 11 = 0$$

$$g(b) = 2b^5 + 16b - 11$$

$$g'(b) = 10b^4 + 16 > 0 \text{ всегда}$$

\Rightarrow $g(b)$ возрастает.

\Rightarrow у $g(b)$ не более одного корня.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $g(0) < 0$, $g(1) > 0$ и $g(b)$ возрастает.
 \Rightarrow у $g(b)$ есть ^{только} один корень и $b \in [0; 1]$

Рассмотрим сумму двух уравн.

$$2a^5 + 16a + 7 + 2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^5 + b^5 + 8(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ (a^4 - a^3b + 8) + (a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0 \end{array} \right.$$

Заметим, что $a^4 - a^3b + 8 > 0$, т.к. $a \in [0; 1]$
и $b \in [0; 1]$

Также заметим, что у второй скобки:

$$D = b^4 - 4b^4 = -3b^4$$

$D < 0 \Rightarrow D \neq 0$ при $b \neq 0$; при $b = 0$ $a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 0$

При этом ^{отрицательный} коэф. $b^2 > 0 \Rightarrow a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3b + 8 + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \neq 0$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3(5y) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3(5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: 0,2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

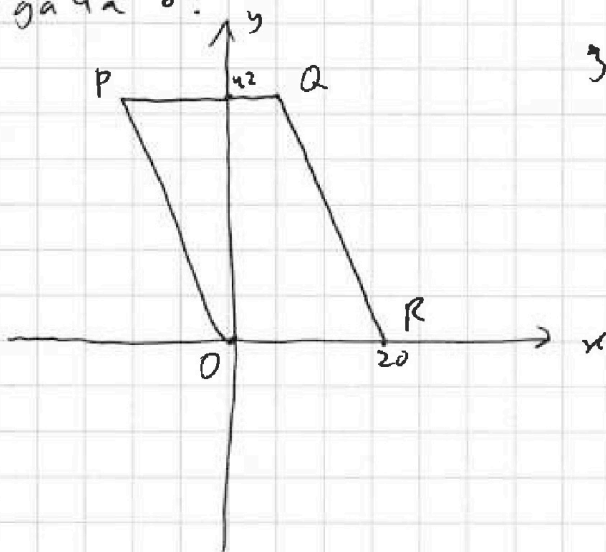
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$\text{П-ть } \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Тогда

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_1 + \Delta x; y_1 + \Delta y)$$

Тогда

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y = -3\Delta x + 33$$

Тогда

от

точки A

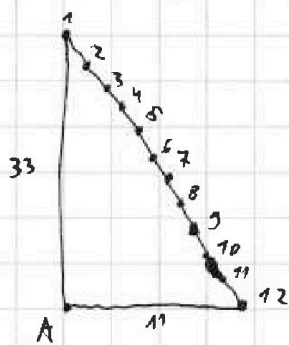
точки B

можно располо-

жить

след.

образом:



12 возможных расположений т. B на гипотенузе треуг. с катетами 33 и 11

Заметим, что эта гипотенуза будет параллельна долевой стороне пар-ма

Тогда остаётся лишь посчитать кол-во точек B для каждой области расположения т. A.

Заметим, что на $y_1: 3$ мы можем расположить т. A. внутри параллелограмма так, чтоб для т. B было место 10 способами.

$$(20 - 11 + 1 = 10)$$

A при $y_1: 3$ всего 9

Также начинаем с $y_1 = 10$ уменьшаются...

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи номер 6.

... уменьшаются не все 12 точек, а
их кол-во уменьшается на 1 каждые 3
значения y_i

Тогда в итоге кол-во точек:

$$10 \cdot 12 + (10 + 9 + 9)(12 + 12 + 12 + 11 + 10 + \dots + 1) =$$
$$= 120 + 28 \cdot 102 = 120 + 2856 = 1976$$

Ответ: 1976

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

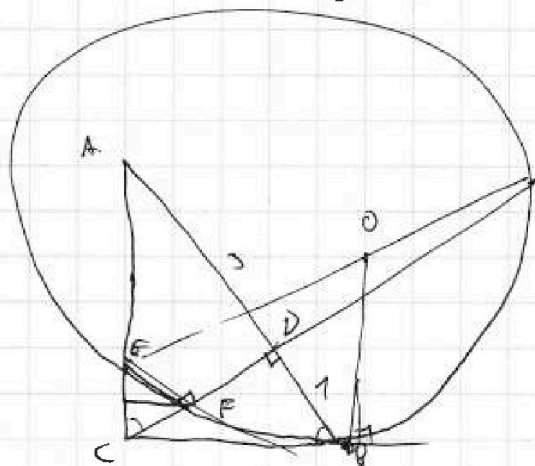
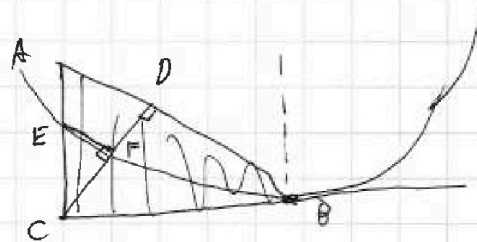
1

$$\begin{aligned}
 ab &: 2^9 3^{10} 5^{10} \\
 bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\
 ac &: 2^{19} 3^{13} 5^{30} \\
 abc &: 2^{15} 3^{17} 5^{30}
 \end{aligned}$$

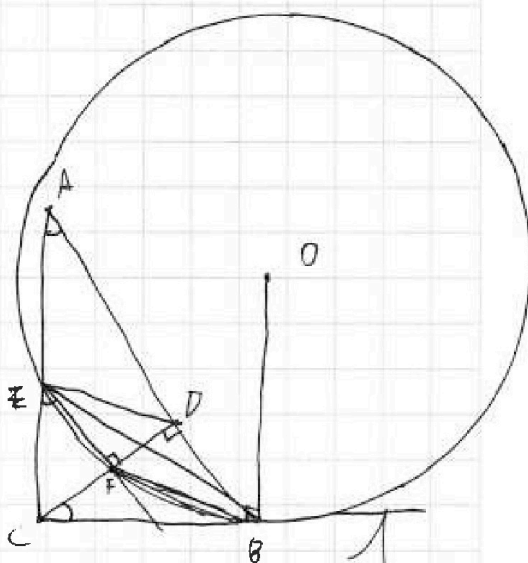
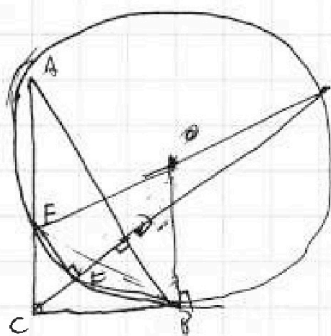
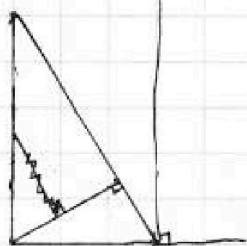
$$\begin{cases}
 a_2 + b_2 \geq 9 \\
 b_2 + c_2 \geq 14 \\
 c_2 + a_2 \geq 19
 \end{cases}
 \quad
 \begin{aligned}
 a_2 &= 7 \\
 b_2 &= 2 \\
 c_2 &= 12
 \end{aligned}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

2



$$\begin{aligned}
 AC &= 2\sqrt{3} \\
 BC &= \sqrt{3} \\
 AB &= 4
 \end{aligned}$$



$$\frac{EC \cdot h}{2} = \frac{EC^2 \sqrt{3}}{8} \quad a \quad c$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EC}{a}$$

1.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3

$$5 \arcsin(\cos x) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{OДЗ: } \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{OДЗ: } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \in [-3\pi; 2\pi] \quad \text{A} \rightarrow x$$

~~$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \cos x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$~~

$$(a) \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \quad \text{при } x \in [0; \pi] \quad n \in \mathbb{Z}$$

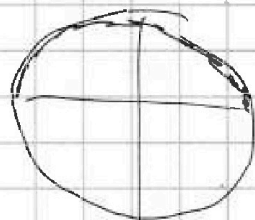
$$(b) \arcsin(\cos x) = \pi - \frac{x}{2} + 2\pi n \quad \text{при } x \in [-\pi; \pi] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a) \quad x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{входит в OДЗ}$$



4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

2 л.

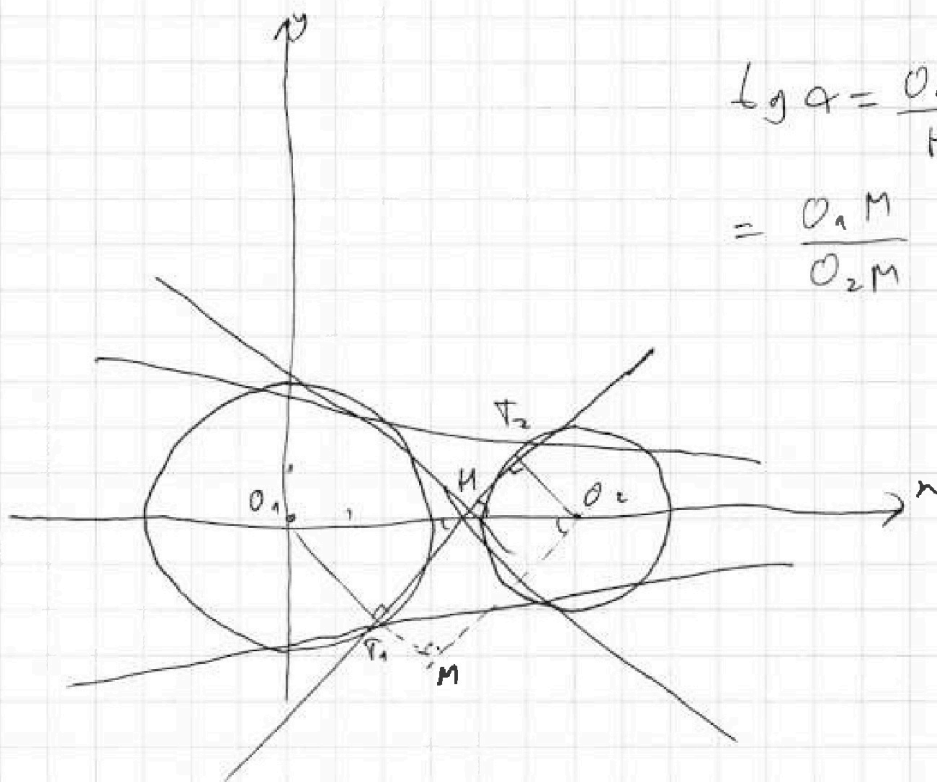
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \lg a &= \frac{O_1 P_1}{M P_1} = \frac{O_2 P_2}{M P_2} \\ &= \frac{O_1 M}{O_2 M} \end{aligned}$$

$$O_1 O_2 = 6$$

$$O_1 M = 3 + 2 = 5$$

$$O_2 M = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

$$\lg a = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

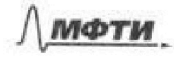
$$\textcircled{5} \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x \cdot 3 = \log_3^2 243 - 8 \\ \log_3^7 (5y) + 2 \log_3 5y \cdot 3 = \log_3 25y^2 (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

}.



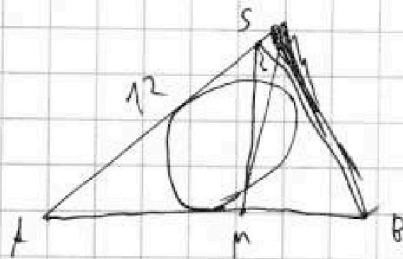
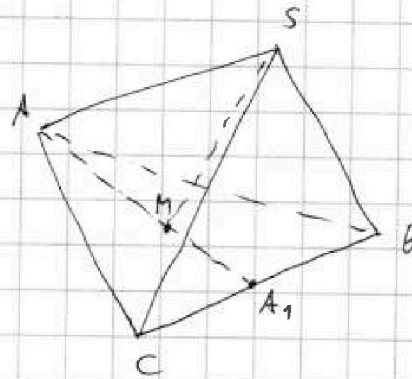
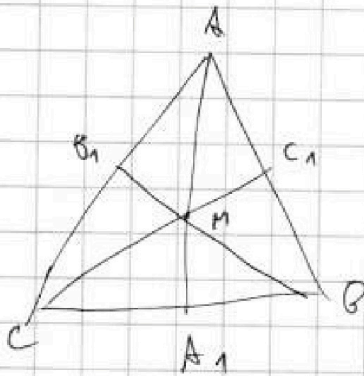
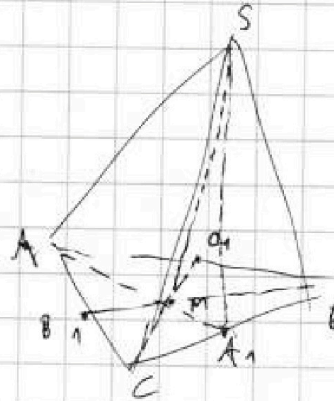
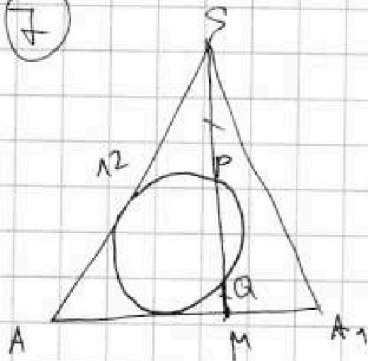
На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

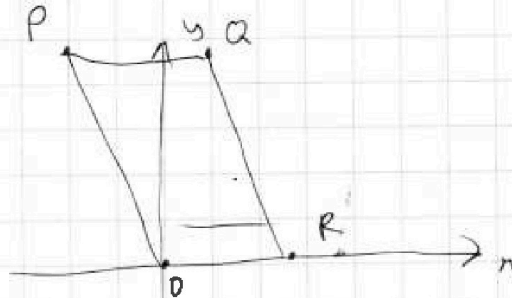
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6



$$y \in [0; 42]$$

$$x \in \left[-\frac{y}{3}; 20 - \frac{y}{3}\right]$$

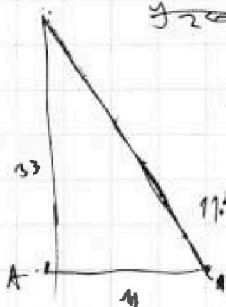
$$x_2 = x_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} + 11$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} + 11 \geq -\frac{y_2}{3} \\ x_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} + 11 \leq 20 - \frac{y_2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{y_1}{3} \geq -11 \\ x_1 + \frac{y_1}{3} \leq 9 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} y_1 \geq 3x_1 + 33 \\ y_1 \leq 3x_1 + 27 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x_1 \geq -\frac{y_1}{3} - 11 \\ x_1 \leq -\frac{y_1}{3} + 9 \end{cases}$$



~~$$\Delta y = y_2 - y_1$$~~
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = -3\Delta x + 33$$

$$110 + (9 + 9 + 10) \left(12 + 12 + 12 + \frac{11+1}{2} \cdot 11 \right) =$$

$$= 110 + (28) (36 + 66) = 110 + 2858 = 2968$$

$$= 2966$$



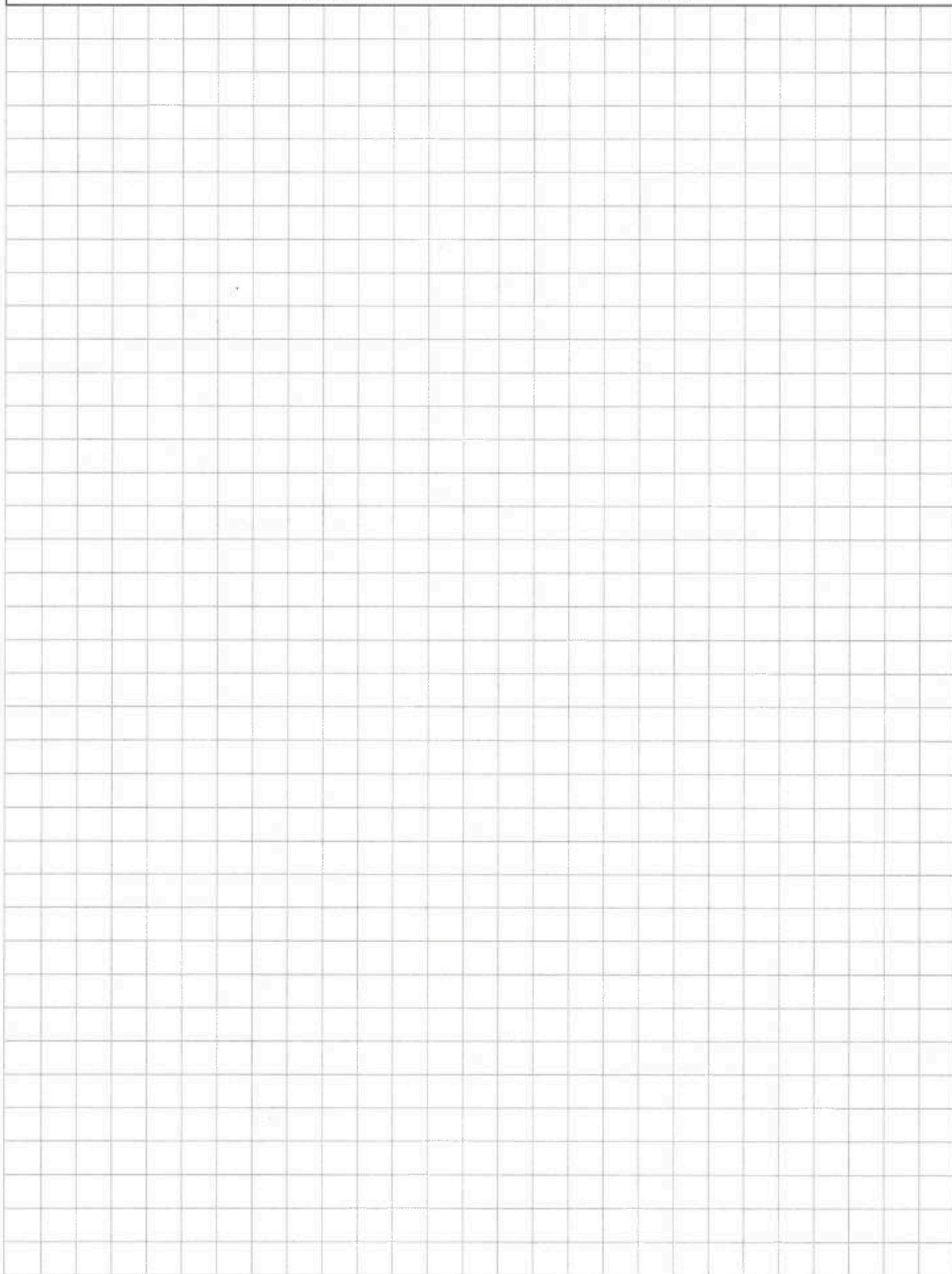
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$a = \log_3 x$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$f'(a) = 10a^4 + 16$

$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$

$\log_3^4 x \neq 6 \log_x 3$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

~~$x = 3$~~

$7a^4 + 16a^4 + 2 = 0$
 $a \in [-1; 0]$

$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$

$b = \log_3 5y$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$

$b^5 + 8b - 3,5 = 0$

$2b^5 + 16b - 7 = 0 \quad b \in [0; 1]$

$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$

$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$(a^4 + a^3b + 8 + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 0$

~~$a = 0$~~

$a + b = 0$

$\log_3 x \neq \log_3 5y = 0$

$a^4 \leq 1$

$a^3 b < 0$

$\Rightarrow a^4 + a^3 b + 8 > 0$

$D < 0$

$\log_3 5xy = 0$

$xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поиск QR-кода недопустим!

Задача 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

П-ть $a_2; b_2; c_2$ — минимальные удовл. условию степени числа 2, явл. множителями числа $a; b$ и c
т.е. $a: 2^{a_2}$ $b: 2^{b_2}$ $c: 2^{c_2}$

Аналогично $a_3; b_3; c_3$ — степени 3.

Аналогично $a_5; b_5; c_5$ — степени 5.

Из утверждения $ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$ следует, что

$$a_2 + b_2 \geq 9 \quad a_3 + b_3 \geq 10 \quad a_5 + b_5 \geq 10$$

Аналогично из $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$$b_2 + c_2 \geq 14 \quad b_3 + c_3 \geq 13 \quad b_5 + c_5 \geq 13$$

Так же из $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$$a_2 + c_2 \geq 19 \quad a_3 + c_3 \geq 18 \quad a_5 + c_5 \geq 30$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases}$$

$$c_2 = b_2 + 10$$

$$b_2 = 2$$

$$c_2 = 12$$

$$a_2 = 7$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$$

$$c_3 = 8 + b_3$$

$$b_3 = 2,5$$

$$c_3 = 10,5$$

$$a_3 = 7,5$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$

$$c_5 = 20 + b_5$$

Пропускали решение степеней, т.к. не ушли влезать это были минимальные



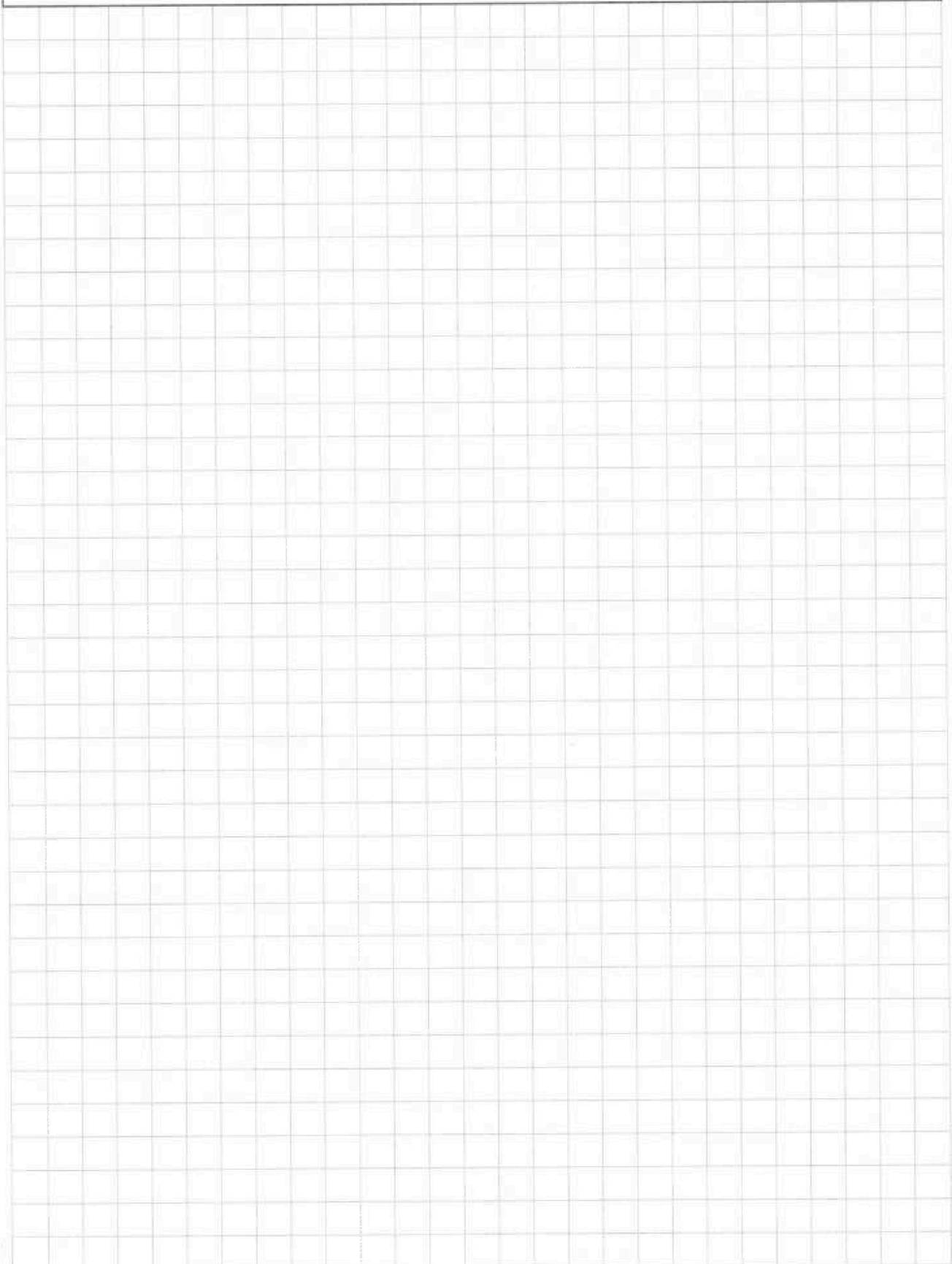
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

