



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! = (n-1)! \cdot n ; \quad (n+1)! = (n-1)! \cdot n(n+1)$$

$$\text{Пусть } t = (n-1)! + n! + (n+1)!$$

$$t = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! (n+1)^2$$

$$289 = 17^2 ; \quad 17 - \text{простое число}$$

если n минимально то
только ^{или} ~~получившееся~~ ~~число~~ ~~получится~~
должно ~~быть~~ ~~равно~~ ~~числу~~

Быть равно ему $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+1)^2 = 17^2 \text{ т.к. } n \in \mathbb{N} ; n+1 = 17$$

$$n = 16$$

Ответ: наименьшее натураль-
ное n равно 16



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 = \\ & = 7a^2 - 6a - 4a - 2a + 6a + 4a + 2a + 1 + 4 + 9 + 1 + 4 + 9 = \\ & = 7a^2 + 28 \end{aligned}$$

По ум. задаче $7a^2 + 28 - 28 = n^5$

$$a^2 = \frac{n^5}{7} : \text{т.к. } a^2 \text{ целое число} \Rightarrow n^5 : 7$$

т.к. n целое число $\Rightarrow n^5 = (7 \cdot k)^5$

$$a^2 = \frac{7^5 k^5}{7} = 7^4 k^5; \quad a = \sqrt{7^4 k^5} = 7^2 \sqrt{k^5}$$

т.к. $n > 8 \Rightarrow k > 1$; т.к. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{k^5} \in \mathbb{N} \Rightarrow k^5 = m^{10} \text{ где } m > 1$$

тогда n было минимальным,
минимальным значением m

т.к. $m \in \mathbb{N}$; $m_{\min} = 2$; $k^5 = 2^{10}$

$$n^5 = 7^5 k^5 = 7^5 \cdot 2^{10}; \quad n = 7 \cdot 2^2 = 28$$

Ответ: наименьшее возможное
 n равно 28



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0; \text{ ~~невозможно~~ }$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$$

ОДЗ:

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

Найдем при каких значениях x выражение $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$ меньше нуля

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0; \sqrt{x^2 - x - 2} < 1 - x$$

если $1 - x$ меньше нуля, то неравенство уже неверно, а если больше то x могу возвести в квадрат и неравенство в квадрат

$$x^2 - x - 2 < (1 - x)^2; x^2 - x - 2 < 1 - 2x + x^2$$

$x < 3$. Теперь рассмотрим комбинации

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3)$$

если $1 - x < 0$; $x > 1$ нер-во неверно

т.к. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$; если $x \leq 1$;

$$\text{~~невозможно~~ } 1 - x \geq 0; \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \Rightarrow \text{~~невозможно~~ }$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < (1 - x)^2; x^2 - x - 2 < 1 - 2x + x^2; x < 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нер-во выполняется при $x \in (-\infty; -1]$

Рассмотрим промежутки

1) $x \in (-\infty; -1]$

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

~~$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq -(\sqrt{x^2-x-2}+x-1) + 6-x$$~~

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq -5-x+1+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x; \quad \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0; \quad \text{но как мы уже}$$

выяснили на данном промежутке

$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 < 0$: значит на данном промежутке нет решений

2) $x \in [2; 6)$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x$$

$$5 \geq x-1+6-x; \quad 5 \geq 5; \quad \text{данный промежуток подходит}$$

3) $x \in [6; +\infty)$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1-(6-x)$$

$$5 \geq x-1-6+x; \quad x \leq 6$$

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

~~Решение задачи представлено на странице~~
~~Решение задачи представлено на странице~~

n_k - общее число квадратов

n_p - общее число ромбов

Найдём n_p

~~Решение задачи представлено на странице~~ Нам требуется

найти ромбы с целыми мануальными
диагоналями: По теореме Пифагора:

$$\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}} = 5 ; \sqrt{x^2 + y^2} = 10 ; x, y \in \mathbb{N}$$

x, y - длины диагоналей $x_1 = x, y_1 = (6, 8); x_2, y_2 = (8, 6)$

~~Решение задачи представлено на странице~~ $n_p = 4(45-8)(45-6)$

$$n_k = (45-5)^2 = 40^2$$

$$n = n_p + n_k = 4 \cdot 37 \cdot 39 + 40^2 = 4 \cdot 38^2 - 4 + 40^2 =$$
$$= 76^2 + 40^2 - 4$$

Ответ: $76^2 + 40^2 - 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \quad \sqrt{5} \quad \text{при } x \geq 0 \quad 2^x \geq 1 \Rightarrow 2^x > 0$$
$$\text{при } x < 0; \quad 2^x = \frac{1}{2^{-x}}; \quad 2^{-x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2^{-x}} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^x > 0$$

$$2^x \text{ всегда положительна при любых } x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2025 + 23 \cdot 2^x > 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2025 + 23 \cdot 2^x}$$

$$\text{Ответ: } x_1, y_1 = (k; \sqrt{2025 + 23 \cdot 2^k})$$
$$x_2, y_2 = (k; -\sqrt{2025 + 23 \cdot 2^k}), \text{ где } k \in \mathbb{R}$$

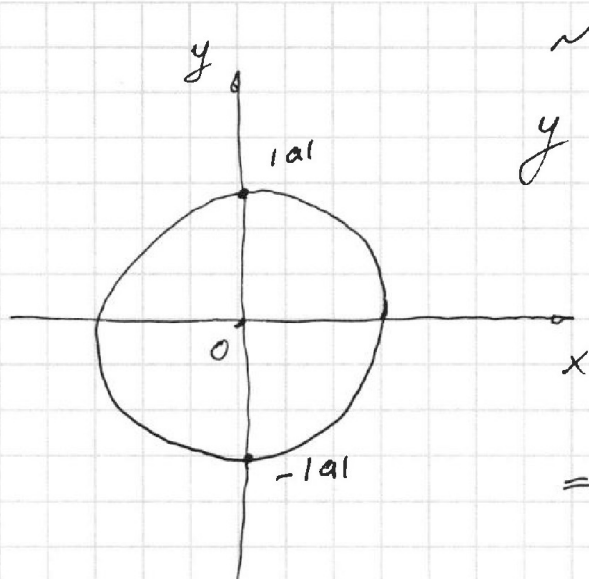


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~6
 $y \in [-1a1; 1a1]$

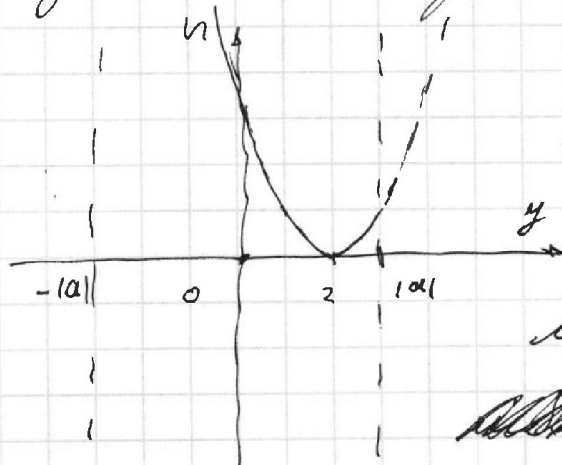
$$y^2 - 4y - a = t$$

$$t = y^2 - 4y - a =$$

$$= y^2 - 4y + 4 - 4 - a =$$

$$= (y-2)^2 - 4 - a$$

t принимает максимальное значение, когда $(y-2)^2$ максимально $(y-2)^2$; Построим график $n(y) = (y-2)^2$



хотим

Очевидно, что $n(y)$

принимает максимальное значение

либо при $y = 1a1$ или $y = -1a1$

сравним $n(1a1)$ и $n(-1a1)$

$$(1a1-2)^2 \vee (-1a1-2)^2; (1a1-2)^2 \vee (1a1+2)^2$$

$$a^2 - 4|a| + 4 \vee a^2 + 4|a| + 4; -4|a| \leq 4|a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(1a1) \leq n(-1a1) \text{ при любых } a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$v_{\max} = v(-|a|); t_{\max} = v_{\max} - 4 - a$$

$$t_{\max} = v(-|a|) - 4 - a = (-|a| - 2)^2 - 4 - a$$

$$t_{\max} = (|a| + 2)^2 - 4 - a$$

По условию задачи $t_{\max} = 6$

$$6 = (|a| + 2)^2 - 4 - a; 6 = |a|^2 + 4|a| + 4 - 4 - a$$

1) Рассмотрим $a \geq 0$

$$6 = a^2 + 4a - a; a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 6}}{2}; \text{подкорнем только}$$

корень больше нуля; $a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$

2) Рассмотрим $a < 0$

$$6 = a^2 - 4a - a; a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}; a_1 = 6; a_2 = -1$$

$a_1 > 0$ - не подходит $a = -1$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}; a_2 = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

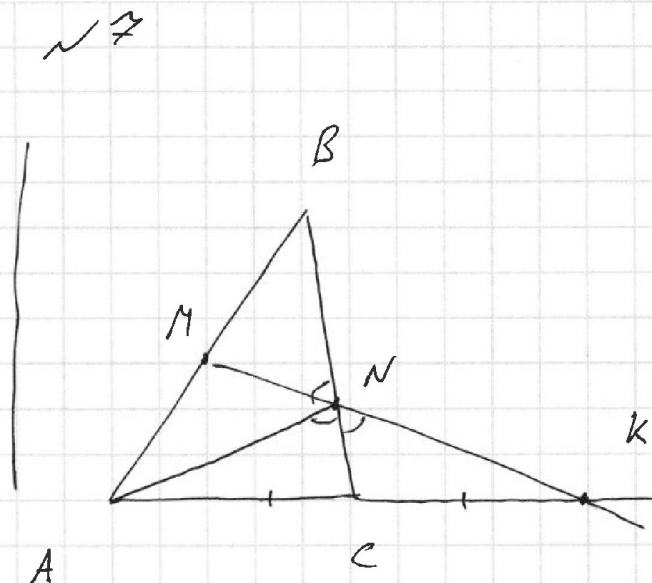
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\angle CAN = ?$$



Продлим ^и отрезки MN и AC до пересечения в точке K

Тогда $\angle BNM = \angle KNC = 70^\circ$ как ^{вертикальные} углы

NC - медиана в $\triangle ANK$

по теореме Менелая для $\triangle ABC$ и ^{прямой} прямой MN: $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{AK} = 1$

$$AM \cdot BN = 2BM \cdot NC ; \frac{2BM \cdot NC}{MB \cdot NC} \cdot \frac{CK}{AK} = 1$$

$$2CK = AK ; AK = CK + AC ; 2CK = CK + AC$$

$$CK = AC \Rightarrow NC - \text{медиана}$$

т.к. NC и медиана и биссектриса $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \triangle ANK$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle NKA = \angle NAK = \angle CAN$$

$$\angle ANK = \angle ANC + \angle CNK = 140^\circ$$

$$\text{для } \triangle ANK: \angle ANK + \angle NKA + \angle NAK = 180^\circ$$

$$140^\circ + 2\angle CAN = 180^\circ; \quad 2\angle CAN = 40^\circ$$

$$\angle CAN = 20^\circ$$

$$\text{Ответ: } \angle CAN = 20^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + (a+1)$$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-3)^2 =$$

$$(a-3)^2 \leq n^5$$

$$4 \quad 16 \quad 80 + 32 = 112$$

$$7a^2 + 2(1^2 + 2^2 + 3^2) = 7a^2 + 28$$

$$7a^2 = n^5$$

$$\frac{n^5}{7}$$

$$a^2 = \frac{n^5}{7}$$

$$a^2 = \frac{14^5}{7^2} = 7 \cdot 14^4$$

$$\frac{n^5}{7}$$

$$49^5$$

$$49 \cdot 49^4$$

$$n = \frac{k}{7}$$

$$n = 7 \cdot k$$

$$a^2 = \frac{7^5 \cdot k^5}{7} = 7^4 k^5$$

$$a^2 \neq k^5$$

$$k > 1$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49$$

$$k^5 = m^2 = 1^{10} \quad 2^{10} \quad 4^{10} \quad 4^5$$

$$7^4 \quad 7^5$$

$$1^{10}$$

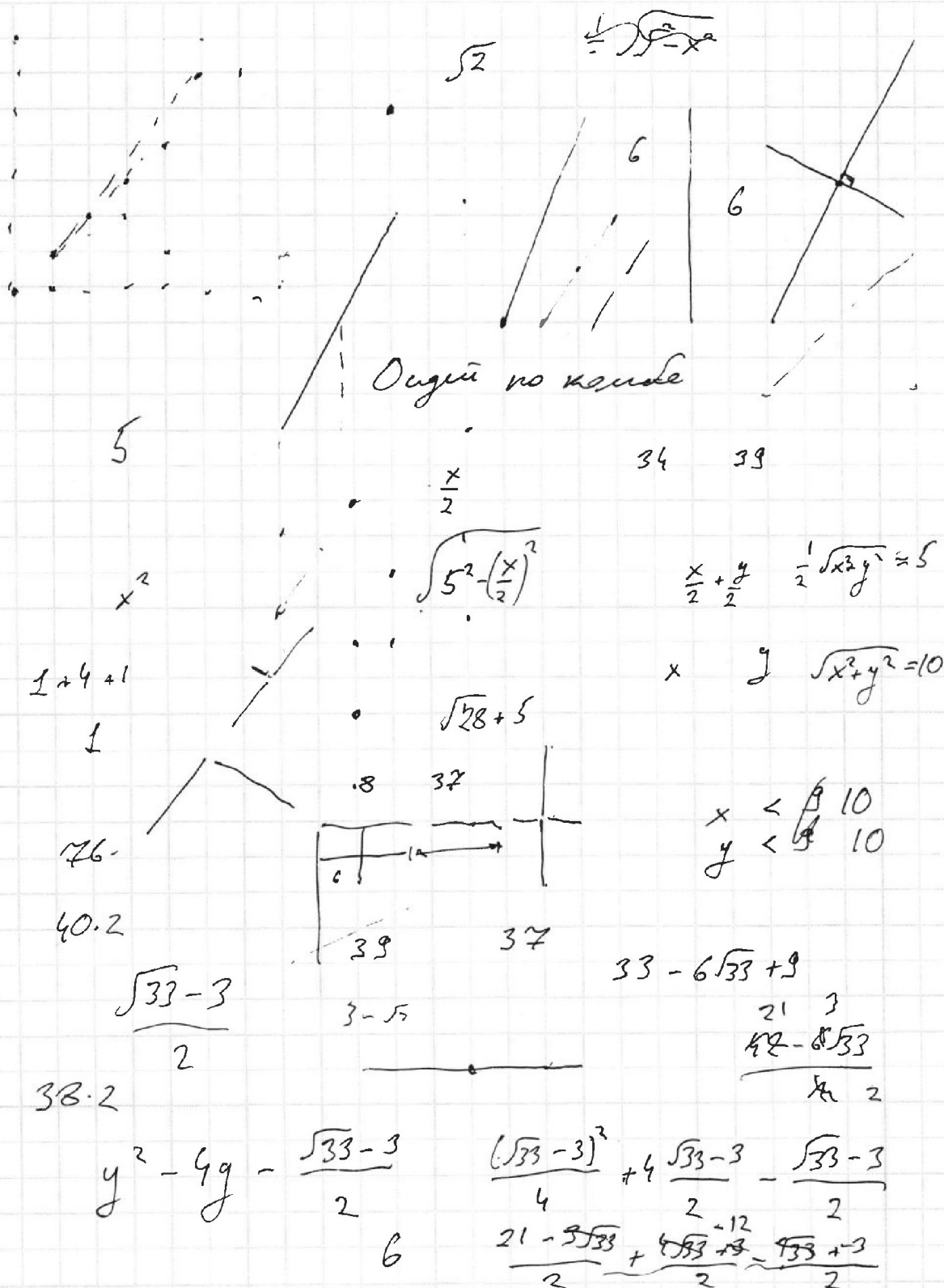
$$n =$$

$$7^4 \cdot 2^{10}$$

$$7^5 \cdot 2^{10}$$

$$7 \cdot 2^2$$

$$\text{ромбов } 6 \quad 10$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

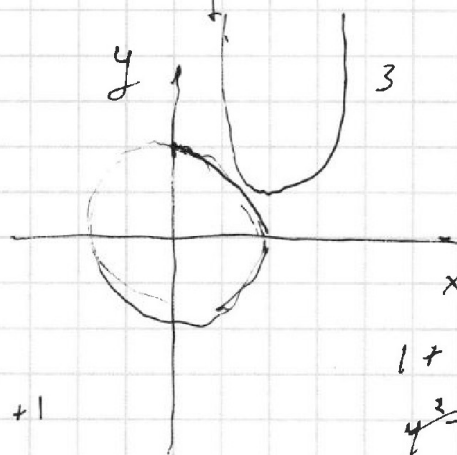
$$x^2 + y^2 = 3 \quad | \sqrt{x} \quad y^2 - 4y + 4 - 4 + a = (y-2)^2 + a - 4$$



$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 28 = n^5 \quad y \geq n \geq 8 \quad |a| \geq 2$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) - 28 \quad a^2 > 4$$

k
k+5



$$a < 0$$

$$2(2n+1)$$

$$a \quad 2n+1$$

$$1$$

$$n + 2n+1 + 2n$$

$$n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 + n$$

$$1 + n + n(n+1)$$

$$y^2 - \sqrt{a} \geq y \geq \sqrt{a} \quad -|a| > y > |a| \quad 2025$$

$$45$$

$$(y-2)^2 + a - 4 = 6$$

$$-1-2$$

$$y < -2$$

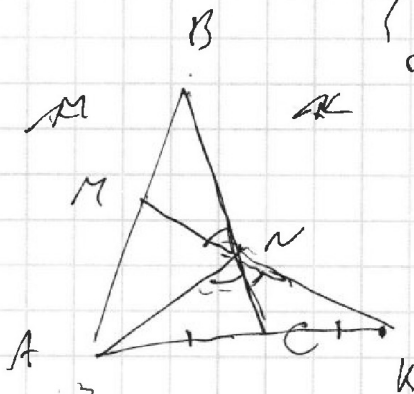
$$y = -\sqrt{2}$$

$$-|a|$$

$$|a|$$

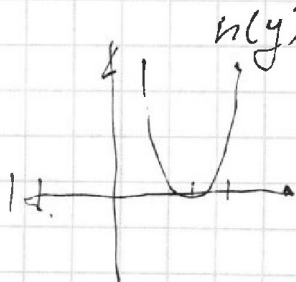
$$y =$$

$$-\sqrt{a}$$



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$$

$$2CK = AK$$



$$t$$

