



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! + (n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot n \cdot (n+1) \\ = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2$$

Заметим, что $289 = 17^2$, а 17 - простое число.

Пусть: $n < 16 \Rightarrow n+1 < 17 \Rightarrow n+1 \nmid 17$ Т.к 17 - простое, то
и $(n+1)^2 \nmid 17$. $n-1 < 15$, а 17 - простое $\Rightarrow (n-1)! \nmid 17$

$$\frac{(n-1)! \cdot (n+1)^2}{(n+1)^2} \nmid 17 \Rightarrow (\text{т.к } 17\text{-простое}) \frac{(n-1)! \cdot (n+1)^2}{(n+1)^2} \nmid 17 \Rightarrow (n-1)! \cdot (n+1)^2 \nmid 289$$

$\Rightarrow n \geq 16$.

$n = 16$ подходит, так как $(n-1)! \cdot (n+1)^2 = 15! \cdot 17^2 = 289 \cdot 15!$
 $\Rightarrow$ подходит

Ответ: $n = 16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Пусть наши 7 чисел это:

$$a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3$$

Тогда:

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 - 28 = N^5$$

Раскроем квадраты:

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 - 28 = N^5$$

Приведем подобные и получим:

$$7a^2 + 28 - 28 = N^5$$

$$7a^2 = N^5$$

Пусть ~~4~~ степень бхождения 7 в а равна 6

$$\Rightarrow 2 \cdot 6 + 1 : 5$$

$$12/5 \neq 3 \Rightarrow 6/5 = 1/5 \Rightarrow 1/5 \neq 1/5, \text{ но } 12/5 \neq 4, \text{ но } 12/5 \neq 4$$

$$\Rightarrow 6 \geq 2 \quad \text{но если а мин просто } 7^2 \text{ то } N = 7, \text{ а } N \geq 8$$

$\text{НОК}(2; 5) = 10 \Rightarrow$ ~~нужно~~ а имеет вид $7^2 \cdot p_1^5 \cdot p_2^5 \dots$, где $p_1, p_2, \dots$ простые числа.

Минимальное а достигается если есть (кроме 7) еще одно минимальное простое число минимальное простое - 2

$$\Rightarrow \min a = 7^2 \cdot 2^5 \Rightarrow 7 \cdot a = 7^5 \cdot 2^{10} \Rightarrow N = 7 \cdot 2^2 = 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Отв.: $N = 28$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ $x \in [6; +\infty)$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + x - 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$\Rightarrow x = 6$$

⇒ Объединение ①, ② и ③ $x \in [2; 6]$, что подходит
по ОДЗ

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$x^2-x-2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \quad 5 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 0 \Rightarrow \text{первый модуль всегда раскрывается}$$

с "+"

Рассмотрим, когда $\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$

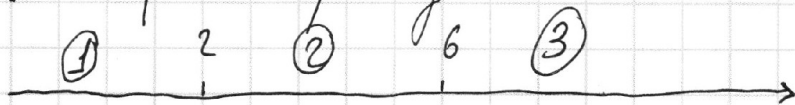
$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$ Промежуток от 2 до $+\infty$ подходит
т.к. корни в левую сторону отрицательного числа

Если $x \in (-\infty; -1]$, то $1-x \geq 0$ и $x^2-x-2 \geq 0$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow \text{н} \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \text{ при } x \in [2; +\infty)$$

Рассмотрим промежутки:



$$① \quad x \in (-\infty; 2] \quad \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 1-x-\sqrt{x^2-x-2}+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [2; +\infty) \Rightarrow x=2$$

$$② \quad x \in [2; 6]$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x$$

$$5 \geq 5 \Rightarrow x \in [2; 6]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

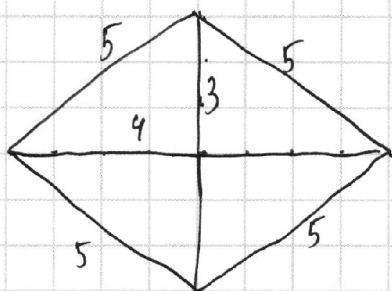
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

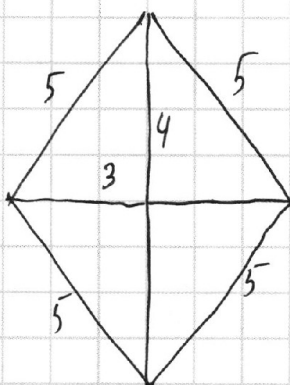
№4

Покажем, что существует всего 3 типа ромба с
длиной стороны 5 и вершинами в целых точках

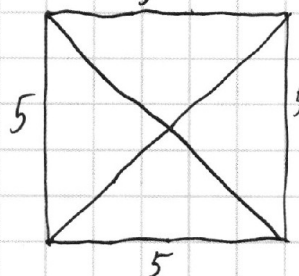
1 тип



2 тип



3 тип



Теперь заметим, что если мы знаем тип и координаты центра, то мы можем однозначно определить ромб.

1. Посчитаем кол-во вариантов где может быть центр ромба 1 типа. По оси x его координата его центра не более 41 и не менее 45 (иначе вершины ромба выходят из промежутка) $\Rightarrow x \in [5; 41] \Rightarrow 37$ возможных значений

По оси y координата его центра не менее 4 и не более 42 (Аналогично) $\Rightarrow y \in [4; 42] \Rightarrow 39$ возможных значений
 $\Rightarrow$ всего $37 \cdot 39$ вар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☒

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Аналогично для 2 типа (они симметричны)
 $\Rightarrow 37 \cdot 39$ вариантов.

3. Чтобы подсчитать "квадратики" зафиксируем её нижнюю левую вершинку (зная её координаты квадрат со сторонами в востановится однозначно)

~~то~~ координата по $x - x_0$, по $y - y_0$

$\Rightarrow x_0 \in [1; 40]$ $y_0 \in [1; 40]$ * (чтобы квадрат не выходил за границы)

$\Rightarrow$ ~~40~~ $40 \cdot 40$ вариантов

Всего $39 \cdot 37 \cdot 2 + 40^2$ вариантов.

Ответ: $39 \cdot 37 \cdot 2 + 40^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н5

$$23 \cdot 2^x + 2025^y = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

Рассмотрим 2 случая:

1. ① $y-45 = 23 \cdot 2^a$

② $y+45 = 2^b$

Тогда $2y = 2^b + 2^a \cdot 23$

$$y = 2^{b-1} + 2^{a-1} \cdot 23$$

Подставим в ② $\Rightarrow 2^{b-1} + 2^{a-1} \cdot 23 + 45 = 2^b$

, если $\begin{cases} 2^{a-1} : 2 \\ 2^{b-1} : 2 \\ 2^6 : 2 \\ 2 : 2 \end{cases}$

но противоречие, так как $нч = 2$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ b=0 \end{cases}$$

1. $a=1 \Rightarrow y=68 \Rightarrow 113 = 2^6 \quad \checkmark$

2. $b=1 \Rightarrow y=-43$, но тогда $(y-45)(y+45) < 0 \Rightarrow \checkmark$

3. $b=0 \Rightarrow y=-44$, но тогда $(y-45)(y+45) < 0 \Rightarrow \checkmark$

2. ① $y-45 = 2^a$

② $y+45 = 23 \cdot 2^b$

Аналогично 1 $\rightarrow$

$$2^{b-1} + 2^{a-1} \cdot 23 - 45 = 2^a$$

Аналогично 1 $\rightarrow$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

1. $a=1 \Rightarrow y=44 \Rightarrow b=2 \Rightarrow x=3$

2. $a=0 \Rightarrow y=46$, так как $91 \cdot 23 \cdot 2$

3. $b=1 \Rightarrow y=22$, $0 - 64 \cdot 2 \cdot 23 \Rightarrow \checkmark$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нам подошла пара $(3; 47)$, но от знака у ничего
не зависит $\Rightarrow$ подходит и пара $(3; -47)$

Ответ: $(3; 47); (3; -47)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

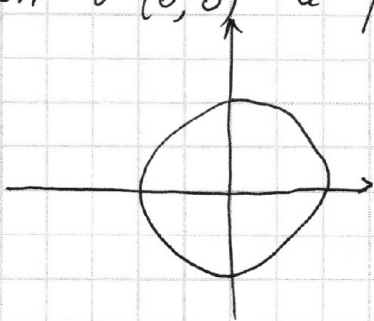


СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Поймем, что $x^2 + y^2 = a^2$ - это уравнение окр-ти с центром в $(0; 0)$ и радиусом $|a|$



⇒ если $a > 0$, то

$$y \in [-a; a]$$

если $a < 0$, то

$$y \in [a; -a]$$

$y^2 - 4y - a$ - парабола ветвями вверх ⇒ наибольшее значение либо в а либо в -а

1. $a > 0$

$$a^2 - 5a = 6 \quad a^2 - 5a - 6 \leq 0 \quad a = 6; -1 \quad (\text{Подставили } a)$$

~~Минус~~

$$a^2 + 3a - 6 \leq 0 \quad a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \quad (\text{Подставили } -a)$$

2. $a < 0$

Аналогично 1 только взяли другие корни

$$\Rightarrow a = -1; \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Ответ: } a = 6; -1; \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Def. bet: 20°

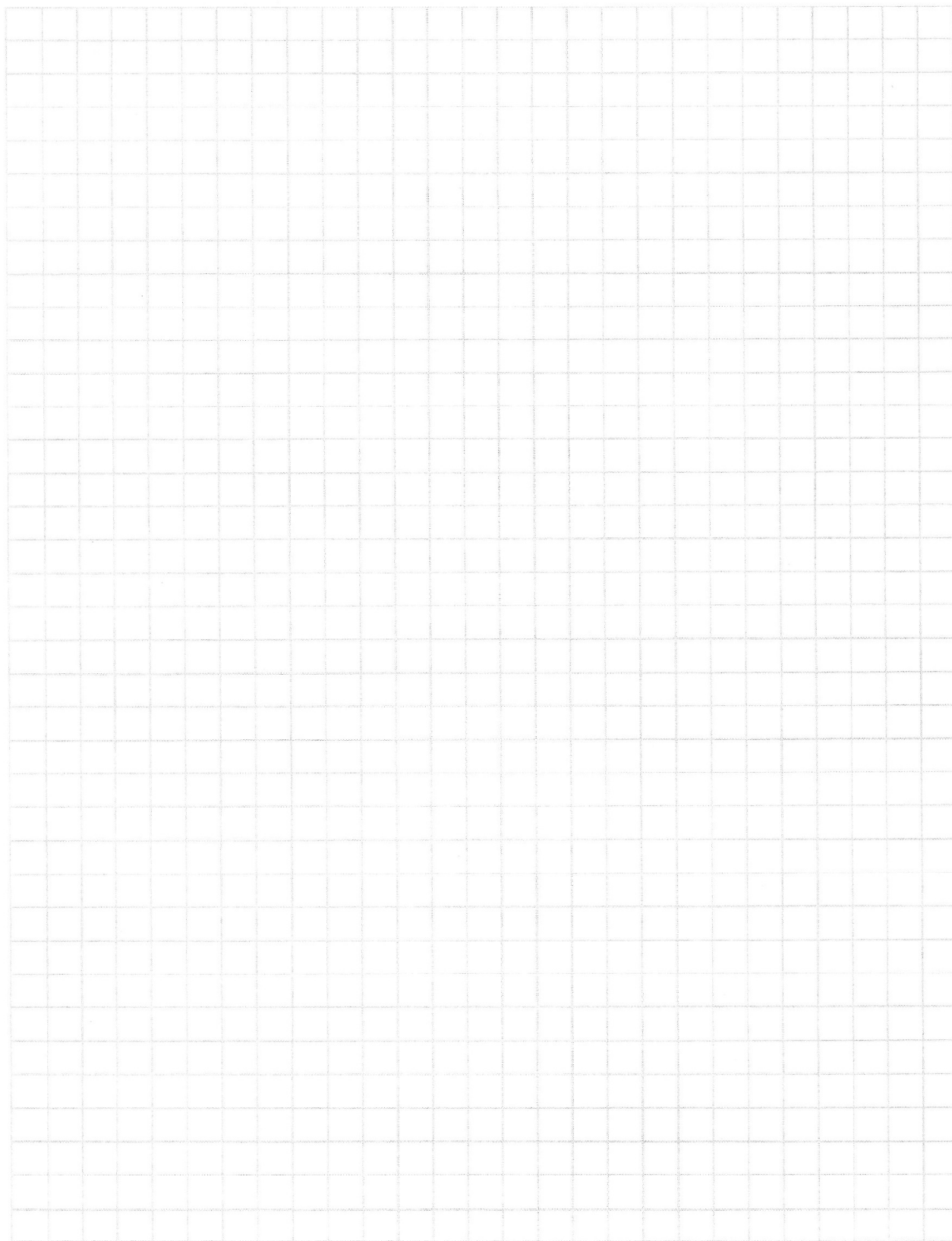


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

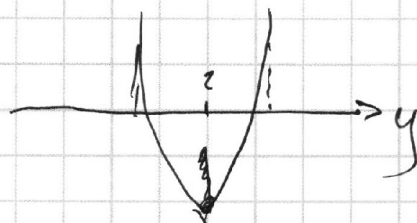
$$n1$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$\begin{array}{r} -289 \overline{) 17} \\ 17 \overline{) 17} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(n-1)! (1 + n + n \cdot (n+1))$$

$$(n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! \cdot (n+1)^2 \quad n=16$$



$$n2$$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + \dots + (a+6)^2 - 28 = N^5$$

~~$$4a^2 + 2a(1+2+3+\dots+6) + 1^2+2^2+3^2+\dots+6^2$$~~

$$y \in [a; -a]$$

$$a = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$$

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 - 28 = N^5$$

$$4a^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 - 28 = N^5$$

$$4a^2 + 2(1+4+9) - 28 = N^5$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$4(a^2 + 4 - 4) = N^5$$

~~$$4a^2 = N^5$$~~

$$a = 4^2 \Rightarrow N = 4 \quad \checkmark$$

$$a = 4^6 \quad N = 4^3$$

$$\begin{array}{r} 26+1 : 5 \\ 6 = 4 \end{array}$$

$$a = 4^2 \cdot 2^5$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 4^5 \cdot 2^{10} \Rightarrow N = 4 \cdot 4$$

$$y^2 - 4y - a$$

$$\Delta = 16 + 4a$$

$$y \in [-a; a]$$

$$a^2 - 5a - 6 \leq 0$$

$$a = 6; \quad \checkmark$$

$$a^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 \leq 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

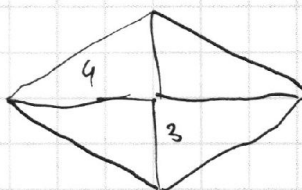
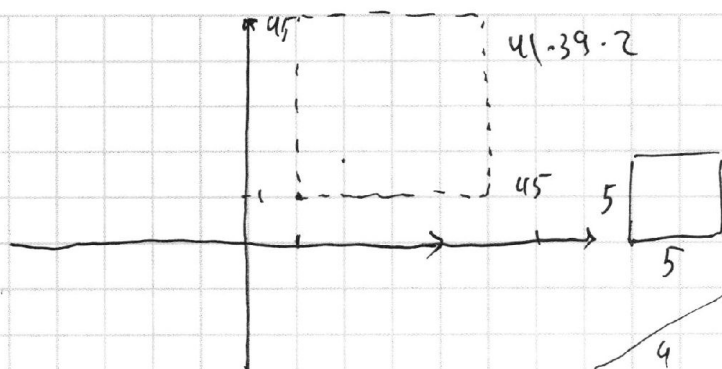


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~3~~ ~~6~~ ~~7~~

40.

N5

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$y - 45 = 23 \cdot 2^a$$

$$y + 45 = 2^b$$

$$\Rightarrow 2y = 23 \cdot 2^a + 2^b$$

$$y = 23 \cdot 2^{a-1} + 2^{b-1}$$

$$2^{b-1} + 23 \cdot 2^{a-1} + 45 = 2^b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

$$1. b=1 \Rightarrow y = -43$$

$$2. -89 = 23 \cdot 2^a \quad a=2$$

$$3. a=1 \Rightarrow y = 89$$

$$3. a=0 \Rightarrow y = -44$$

$$\begin{aligned} y - 45 &= 2^a \\ y + 45 &= 2^b \cdot 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 2^a + 2^b \cdot 23 \\ y &= 2^{a-1} + 2^{b-1} \cdot 23 \end{aligned}$$

$$2^{a-1} + 2^{b-1} \cdot 23 - 45 = 2^a$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

$$1. y = 44 \quad a=1$$

$$2. y = 46 \quad a=0$$

$$3. y = 1 \quad b=1$$