



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1) \cdot (1 + n + n \cdot (n+1)) \\ - (n-2)! = (n-1) (n^2 + 2n + 1) \cdot (n-2)! = \\ (n+1)^2 (n-1)!$$

$\Rightarrow$ при наименьшем

$$289 = 17^2 \Rightarrow$$

должны быть множителями
или же 17 (это простое)

$$n = 16 \quad (n+1 = 17 \text{ тогда})$$

Это наименьшее, т.к. далее для множи-
телей $n-1, n-2 \dots$ будут числа

$n=18, n=19$ (чтобы эти множители
делились на 17)

Ответ: $n=16$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 2

x - какое-то натуральное число,

$$x \geq 4$$

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$$

$$- 28 = n^5 \quad \text{сумма квадратов 7 посл. натуральных чисел}$$

n - натуральное число, $n \geq 8$ (по условию)

$$7x^2 + (3^2 + 2^2 + 1^2) \cdot 2 - 28 = n^5$$

$$7x^2 + 14 \cdot 2 - 28 = n^5$$

$$7x^2 = n^5 \Rightarrow n : 7, \text{ при этом } n \neq 7$$

Предположим, что $n = 74$ (по условию $n \geq 8$)

$$x^2 = 74^4 \cdot 2 = 2^5 \cdot 7^4 \Rightarrow x \text{ - не натуральное}$$

(если $x > 0$, то $x = 2^{2,5} \cdot 7^2$) не подходит

Аналогично предположим, что $n = 27$,
тогда: $x^2 = 27^4 \cdot 3 = 3^5 \cdot 7^4 \Rightarrow x$ - не натуральное $\Rightarrow$ не подходит

Аналогично предположим, что $n = 28$, тогда:

$$x^2 = 28^4 \cdot 4 = 4^5 \cdot 7^4 = 2^{10} \cdot 7^4 \Rightarrow x = 2^5 \cdot 7^2 (x > 0)$$

$$\Rightarrow n = 28 \text{ подходит. Ответ: } n = 28.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3 (начало)

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-7| + |6-x|$$

$$x^2-x-2 \geq 0 \quad (\text{чтобы выражение имело смысл})$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 5 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-7| + |6-x|$$

1) Рассмотрим при $x \geq 2$ и $x \leq 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \underbrace{\sqrt{x^2-x-2}+x-7}_{\geq 1} + \underbrace{6-x}_{\geq 0}$$

$$5 \geq 5$$

Всегда верно $\Rightarrow$ этот крайний промежуток подходит

2) $x > 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-7+x-6$$

$$5 \geq 2x-7$$

$$x \leq 6$$

$\emptyset$, т.к. мы рассм. на промежутке $(6; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3 (продолжение)

3) $x \leq -7$:

Посмотрим, когда $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 7$
 ≥ 0 (на этом промежутке $(-\infty; -7]$)
 $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq -x + 7$
 ≥ 0 ≥ 0

$-x + 7$ больше 0, т.к. x отриц. $\Rightarrow -x$ - полож.

Тогда можно возвести обе части в квадрат

$$x^2 - x - 2 \geq (7 - x)^2$$

$$x^2 - x - 2 \geq x^2 - 2x + 7$$

$x \geq 3 \Rightarrow$ данное выражение меньше 0

всегда на промежутке $x \leq -7$. Тогда:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -\sqrt{x^2 - x - 2} - x + 7 + 6 - x$$

$$\underbrace{2\sqrt{x^2 - x - 2}}_{\geq 0} \geq \underbrace{2 - 2x}_{> 0}$$

$2 - 2x > 0$, т.к. x отриц. (на нашем

промежутке) $\Rightarrow -x$ - полож. $\Rightarrow$ можно возвести в квадрат

$$4 \cdot (x^2 - x - 2) \geq 2 \cdot (7 - x)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3 (урадование)

$$9 \cdot (x^2 - x - 2) \geq 4 \cdot (x - 1)^2$$

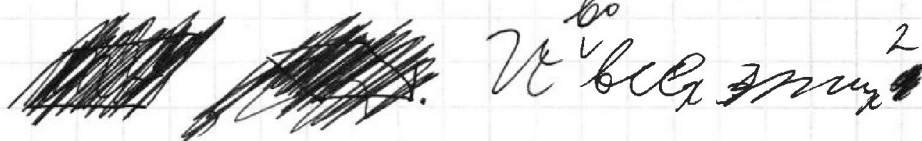
$$x^2 - x - 2 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow \emptyset \text{ (ведь мы на } (-\infty; -1])$$

Объединим все 3 пункта.

$[2; 6]$ (из 1 пункта), в остальных $\emptyset$

Ответ: $[2; 6]$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 (продолжение)

случай ~~беден~~ $37 \cdot 47$ ~~и т.д.~~

Но есть уже $37 \cdot 47 \cdot 2$

3)

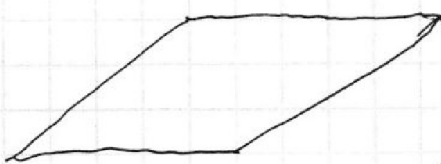


У еще ¹ ~~и т.д.~~, которые
получаются из этой ~~ручки~~
отраженной ~~и т.д.~~

$44 - 4 - 5 + 7 = 36$ по другой
координате

$44 - 3 + 7 = 42$ - по другой координате
Итого: $36 \cdot 42 \cdot 2$

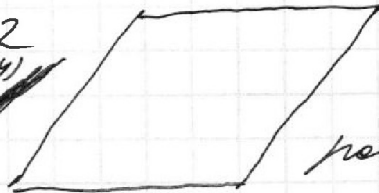
4)



- как номер, только
повёрнутая. Знач
расположение по осям
не важно $\Rightarrow 36 \cdot 42$

И так же можно отразить и будет тоже
одинак $\Rightarrow 36 \cdot 42 \cdot 2$

5) Аналогично ^(пункт 4)



Это
повёрнутый
пункт 2

$\Rightarrow 37 \cdot 47 \cdot 2$

~~Итого~~
 $1600 + 37 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 2 + 36 \cdot 42 \cdot 2 \cdot 2 =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4 (предметные)

$$7600 + 4 \cdot (37 \cdot 47 + 36 \cdot 42) = 7600 +$$

$$4 \cdot (36 \cdot 47 + 47 + 36 \cdot 47 + 36) = 4 \cdot$$

$$(36 \cdot 47 \cdot 2 + 77) = 4 \cdot (2952 + 77) =$$

$$3029 \cdot 4 = 12116$$

Ответ: 12116.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 36 \\ \hline 282 \\ 1416 \\ \hline 1702 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 5 (Начало)

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$(y-45)/(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

Во-первых, из этого следует, что $x \geq 0$ (Если $x < 0$, то будет дробь справа, а слева перемножение целых чисел $\Rightarrow$ такого быть не может).

~~$(y-45)/(y+45) = 23 \cdot 2^x$~~

$y-45$ и $y+45$ одинаковой чётности.

Если они оба нечётные, это возможно только при $x = 0$:

$$(y-45)/(y+45) = 23$$

$$y-45=1 \Rightarrow y=46 \quad 46+45 \neq 23$$

$$23 \quad 1 \quad y-45=23 \Rightarrow y=68 \quad 68+45 \neq 1$$

$$-1 \quad -23 \quad y-45=-1 \Rightarrow y=44 \quad 44+45 \neq -23$$

$$-23 \quad -1 \quad y-45=-23 \Rightarrow y=22 \quad 22+45 \neq -1$$

Из этого ничего не следует.

$\Rightarrow$ Они оба чётные и $x \geq 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 5 (продолжение)

=> Одно из них это $23 \cdot 2^a$, другое 2^b , где $a+b=x$ и a, b тоже положительные иначе так же

например ~~$y-45$~~ $y-45$ будет равен $y+45$

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^a \\ y+45 = 2^b \end{cases}$$

$$y = 23 \cdot 2^a + 45$$

$$23 \cdot 2^a + 90 = 2^b$$

$$23 \cdot 2^a + 23 \cdot 4 - 2 = 2^b$$

$$23 \cdot$$

Аналогично:

$$y+45 = 23 \cdot 2^a$$

$$y-45 = 2^b$$

$$23 \cdot 2^a - 90 = 2^b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (начало)

$x^2 + y^2 = a^2$ - это окружность $\Rightarrow$

y принимает значения от $[-a; a]$

$y^2 - 4y - a \leq 6$, где $y \in [-a; a]$

$y^2 - 4y + 4 - 4 - a \leq 6$

$(y-2)^2 - a - 7 \leq 6$

Левая часть принимает своё наименьшее значение при $y = -a$.

И если при наименьшем неравенство выполняется то и для всех ост. знач. y выполняется (тогда правая $(y-2)^2 - a - 7$ будет ещё меньше).

И если для наиб. y это не выполняется, то уже хотя бы для одного не выполняется $\Rightarrow a$ не подходит. $\Rightarrow$ Необходимо и

достаточно выражение этого неравенства: $(-a-2)^2 - a - 7 \leq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 3x - 6 \leq 0$ $\checkmark$ 6 (улучшение)

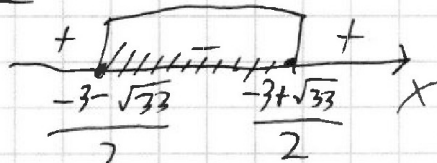
$$x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$D = 9 + 6 \cdot 4 = 33 - \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\left(x + \frac{3 + \sqrt{33}}{2}\right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{33}}{2}\right) \leq 0$$



Ответ: $x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \right]$.

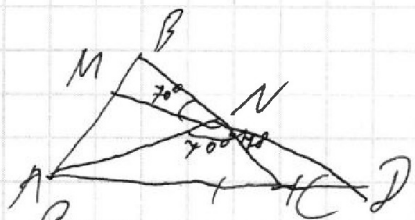


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
7 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

~7

① По т. Менелая

для $\triangle ABC$ и сек.

MD ($MN \cap AC \rightarrow P$):

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

По условию: $BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} \cdot \frac{AM}{BM} = 2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{CP}{AP} = 1$$

$$AP = AC + CP$$

$$2 \cdot \frac{CP}{AC + CP} = 1$$

$$2CP = AC + CP$$

$$AC = CP \Rightarrow NC - \text{медiana}$$

② $\angle MNB = \angle CND$ (т.к. вертикаль-
ные)

$\Rightarrow \angle ANC = \angle CND = 70^\circ \Rightarrow NC - \text{биссек-}$
триса тоже.

$NC - \text{медiana и биссектриса} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ANP$ - п.и., осн. - $AP \Rightarrow$

$$\angle NAC = \angle NPA$$

$$\textcircled{3} \angle NAC + \angle NPA + \angle ANP = 180^\circ$$

(м.к. $\triangle ANP$ - равнобедренный)

$$\angle ANP = \angle NPA + \angle NAC = 140^\circ$$

$$2\angle NAC + \angle ANP = 180^\circ$$

$$2\angle NAC + 140^\circ = 180^\circ$$

$$\angle NAC = 20^\circ$$

Ответ: $\angle NAC = 20^\circ$.

[illegible]



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$289 = 17^2$
 $17 \cdot 15 = 170 + 85 = 255$
 $x = \alpha + \beta$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)$
 $(n-1)(n + n \cdot (n+1)) \cdot (n-2)!$
 $(n-1) \cdot (1 + n + n \cdot (n+1)) \cdot (n-2)!$
 $(n-1)(1 + n \cdot (2+n)) \cdot (n-2)!$
 $(n-1)(n^2 + 2n + 1)(n-2)!$
 $(n-1)(n+1)^2(n-2)!$
 $h = 16$
 $2 \leq x \leq 6$
 $5 \geq x - 7 + 1 - x$
 $5 \geq 5$
 $6 < x < +\infty$
 $5 \geq x - 7 + x - 1$
 $12 \geq 2x$
 $x \leq 6$
 $23 \cdot (2^{x+8}) = 2^{x+12} \cdot (x+7)$
 $x \geq -\sqrt{x^2 - x - 2}$
 $\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq$
 $25 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $23 \cdot 2^a + 90 = 2^b$
 $x^2 - x - 2 \geq 0$
 $(x+7)/(x-2) \geq 0$
 $\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq$
 $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 7 + 11 - x$
 $\alpha \quad \alpha + 1 \quad \alpha + 2 \dots$
 $\alpha^2 + (\alpha + 1)^2 + (\alpha + 2)^2 + \dots + (\alpha + 6)^2$
 $-28 = h^5$
 $h > 8$
 $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 7 \geq 0$
 $x^2 - x - 2 \geq (x-7)^2$
 $23 \cdot 2^x + 2024 = x^2 - 7$
 $23 \cdot (2^x + 88) = x^2 - 7$
 $(7+4+9) \cdot 2 = 28$
 $x^2 - x - 2 \geq$
 $x^2 - 2x + 1$
 $x \geq 3$
 $7 \cdot 2^x$
 $x \leq 3$
 $2\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -2x + 5$
 $-x \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$