



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $n! + (n+1)! + (n+2)!$  делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа  $N$ , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 50]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $x^2 - 6x + a$  равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $n = 36$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(1 + n + n+2) = 2n!(n+2), \text{ тогда } 2n!(n+2) : 361, \\ 361 = 19^2 \Rightarrow 2n!(n+2) : 19^2, \Rightarrow n!(n+2) : 19^2 \text{ (т.к. 2 взаимно-просто с 19).}$$

При  $n < 36$ ,  $V_{19}(n!) = 1$  т.к.  $n! : 19$ , ~~или  $n! : 19^2$ , т.к.~~  
числа делющиеся на 19 встречаются раз через 19, а  $19 : 19$ .  
если  $n < 19$ , то  $n! \not\equiv 0 \pmod{19}$ , т.к. ~~или~~ 19 простое и нет кратных ему  
меньше его.

$V_{19}(n+2) \leq 1$ , если  $V_{19}(n+2) \geq 2 \Rightarrow n+2 \geq 361$ , ~~или~~  $n \geq 359$ , но  $359 > 36 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  можно не рассматривать.

$V_{19}(n!) \leq 1$ , если  $V_{19}(n!) \geq 2 \Rightarrow n \geq 38$ , а  $38 > 36 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  можно не рассматривать, тогда!

$$V_{19}(n!(n+2)) = \underbrace{V_{19}(n!)}_1 + \underbrace{V_{19}(n+2)}_1 \geq 2$$

$$V_{19}(n+2) = 1, \text{ если } n+2 : 19, \Rightarrow n = 17 \\ n = 36.$$

при  $n = 17 \Rightarrow n! : 19 \Rightarrow$  противоречие.

при  $n = 36 \Rightarrow n! : 19 \Rightarrow$  Верно

Тогда доказано, что при ~~меньше~~  $n \leq 36$  нельзя  $\Rightarrow$  Ответ: 36.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем последовательные числа из задачи так:  
 $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ .

Тогда:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10.$$

Вычтем 10:  $5n^2 + 10 - 10 = 5n^2$ ,

Тогда:  $5n^2 = N^3$ , где  $N > 6$ .

$$V_5(N^3) \geq 1 \quad V_5(N) : 3$$

$$V_5(5n^2) \geq 1, \Rightarrow V_5(5n^2) = V_5(5) + V_5(n^2) = 1 + V_5(n^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + V_5(n^2) : 3.$$

1). Если  $V_5(n^2) = 2 \Rightarrow 5^3 \left(\frac{n^2}{5^2}\right) \quad V_p(x^2) : 3 \Rightarrow \text{так как } p \neq 1 \text{ т.к.}$   
 иначе  $x^2 = 1 \Rightarrow N^3 = 5^3 \Rightarrow N < 6 \Rightarrow \min(p) = 2 \Rightarrow V_p(x^2) = V_p(x) + V_p(x) =$   
 $= 2(V_p(x) : 3) \Rightarrow V_p(x) : 3 \Rightarrow \min(x) = 2^3 = 8 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \min(N^3) = 2^6 \cdot 5^3$

2). Если  $V_5(n^2) \geq 2 \Rightarrow \min(V_5(n^2)) = 8$  т.к.  
 $1 + V_5(n^2) : 3 \Rightarrow V_5(n^2) = 2V_5(n) = 8 \Rightarrow V_5(n) = 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \min(N^3) = 5^9$ , но  $5^9 > 2^6 \cdot 5^3$ , заметим, что при увеличении  
 $V_5(n^2)$   $N^3$  будет увеличиваться т.к. увеличивается  $V_5(N^3) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  дальнейшие нас не интересуют.

$$\text{Ответ: } N = 2^2 \cdot 5 = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2-2x-3}, \text{ где } \Rightarrow x^2-2x-3 \geq 0 \Rightarrow x^2-2x-3=0, \text{ при } x=-1 \mid \Rightarrow x=3 \mid \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ } \neq \emptyset \Delta 3: x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty). \quad \uparrow \text{ т.к. у параболы ветви вверх.}$$

1).  $x \leq 0, x \leq -1$

$$\sqrt{x^2-2x-3} = n, \Rightarrow |n+6| \geq |n+2x-1| + |7-2x|$$

$$n+6 \geq 0 \text{ т.к. } n \geq 0, 6 > 0$$

$$n \neq 7-2x \geq 0, \text{ т.к. } 7 > 0, -2x > 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+6 \geq |n+2x-1| + |7-2x|;$$

$$\text{Пусть } n+2x-1 \leq 0. \Rightarrow 1$$

$$\Rightarrow n \geq -n-2x+1+1-2x \Rightarrow 2n \geq 2-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 1-x \Rightarrow n \geq 0, 1-x \geq 0 \text{ т.к. } x < 0. \text{ } 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 \geq (1-x)^2 \Rightarrow x^2-2x-3 \geq 1-2x+x^2 \Rightarrow -3 \geq 1 - \text{Противоречие.}$$

$$\text{Пусть } n+2x-1 \geq 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq n+2x-1+x-2x \Rightarrow \text{при условии } x - \text{верно.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+2x-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1-2x, 1-2x \geq 0 \text{ т.к. } 1 > 0, -2x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 \geq (1-2x)^2 \Rightarrow x^2-2x-3 \geq 1-4x+4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-2x+4 \leq 0; D=4-4 \cdot 12 \Rightarrow D < 0. \text{ и ветви вверх } \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  нет решений.

2).  $x \geq 3$ .

$$n+2x-1 > 0 \text{ т.к. } n > 0, 2x-1 > 0. \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } \Rightarrow n+6 \geq n+2x-1+|7-2x| \Rightarrow 7-2x \geq |7-2x|$$

$$\text{Пусть } 7-2x \geq 0 \Rightarrow \text{Пусть } 7-2x < 0 \Rightarrow |7-2x| = -7+2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7-2x \geq 2x-7 \Rightarrow 14 \geq 4x \Rightarrow x \leq 3,5, \text{ но } 7-2x < 0 \Rightarrow x > 3,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Противоречие, } \Rightarrow 7-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7-2x \geq 7-2x \Rightarrow x \in [3; 3,5].$$

Ответ:  $x \in [3; 3,5]$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

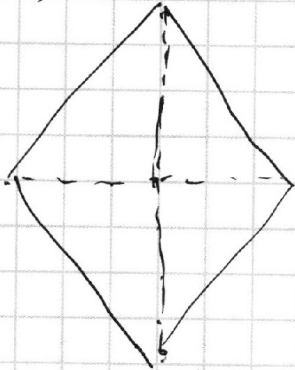
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3).  $(y, x) = (4, 3)$



н) Симметрично.  $(y, x) = (4, 3)$  или  $(3, 4)$ , здесь получились квадрат. Т.к.  $\alpha + \beta = 90^\circ$  других таких очев. нет т.к. у нас единственная по построению и симметричная.



и симметричный элемент:

Будем считать каково каждого типа раздельно.

Будем считать кол-во верхних точек на которых можно построить фигуру.

2). Снизу должно оставаться 6 кп, и влево и вправо по 4  $\Rightarrow$  точка самая левая имеет координату  $(5; 4)$ , ~~самая~~ <sup>левая</sup> верхняя  $(5; 50)$ , самая правая нижняя  $(45; 4)$  <sup>7</sup> ~~самая~~ <sup>правая</sup> верхняя  $(45; 50)$ , заметим, что все точки в этом прямоугольнике овер этими точками допустимы, а никакие другие точки не допустимы  $\Rightarrow$  таких точек. сторона по x  $\Rightarrow$  там  $46 - 5 + 1 = 42$  точек

по y  $\Rightarrow 50 - 4 + 1 = 47$  точек  $\Rightarrow 42 \cdot 47 = 1974$  точек.

левая Верхняя = ЛВ

Правая Верхняя = ПВ

левая Нижняя = ЛН

Правая Нижняя = ПН

3). Аналогично разделим допустимые ГЛТ точки:

~~ЛВ~~  $(4; 50)$ , ~~ЛН~~  $(4; 5)$ , ~~ПВ~~  $(46; 50)$ , ~~ПН~~  $(46; 4)$ . Тогда по x там:  $47 - 4 + 1 = 44$  точек, по y там:  $50 - 5 + 1 = 46$  точек.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

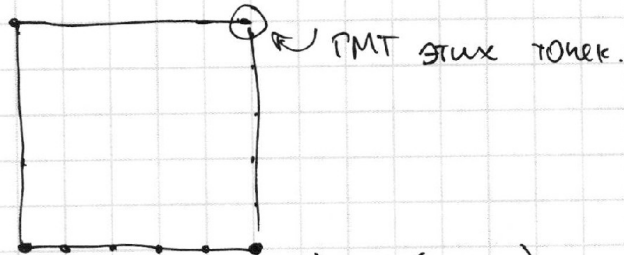
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3). Заметим, что если мы повернем наш изогнутый нашу плоскость, то вид  $2) \rightarrow 3) \Rightarrow$  комбо  $2) = 3) \Rightarrow \Rightarrow 42 \cdot 44$

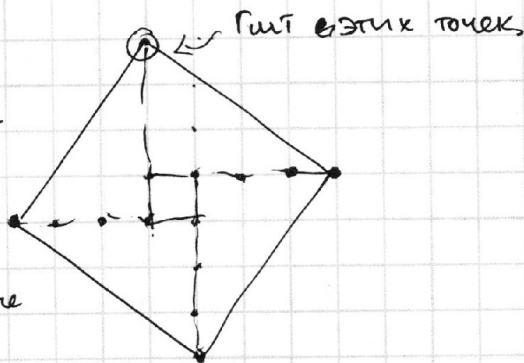
1). Будем считать



$ЛН(6;6), ЛВ(6;50), ПН(42;50;6), ПВ(50;50)$ . тогда их ГМТ.  
то  $x: 50-6+1=55$ , то  $y: 50-6+1=55$  точек  $\Rightarrow$  их ГМТ = кв.  $55 \times 55$  точек.

4). Будем считать  
Заметим, что при перево-  
роте плоскости

$\Rightarrow$  у нас такие  
перейдут в симметричные  
или  $\Rightarrow$  просто удвоили.



$ЛН(4;8); ЛВ(4;50), ПН(46;8), ПВ(46;50)$ , тогда их  
ГМТ примут со стороны по  $x: 46-4+1=43$ , то  $y: 50-8+1=43 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  их ГМТ =  $43 \times 43 \cdot 2$  тк. есть симметричные. Там площадь  
переведем и они совпадут.  $\Rightarrow$

Какая будет наша сумма всех ГМТ:  $43 \times 43 \cdot 2 + 55 \cdot 55 +$   
 $+ 42 \cdot 44 \cdot 2 = 10419$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

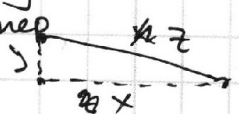
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

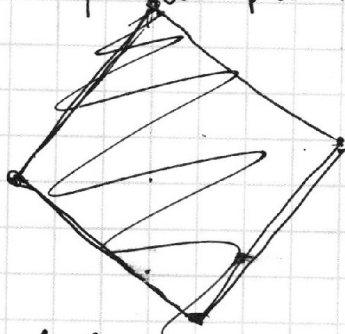
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Измерим длину произвольного отрезка с целочисленными координатами по теореме Пифагора. Если отрезок совпадает с осью, то его длина равна разности координат. Если отрезок не совпадает с осью, то его можно разбить на катеты, тогда для любого отрезка (если он совпадает с линией сетки, то катеты равны 0 и  $\sqrt{a^2+b^2}$ ) можно допустить, что его можно представить в виде гипотенузы, где наш отрезок будет гипотенузой.

Пример:  тогда  $z = \sqrt{y^2 + x^2}$ , но  $y$  и  $z = 5 \Rightarrow$

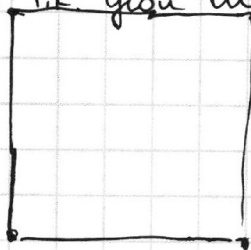
$\Rightarrow y^2 + x^2 = 25$ , заметим,  $y$  и  $z$  - целые числа т.к. координаты все целочисленные, тогда всевозможные пары  $y, z$  - это  $(0, 5), (3, 4)$  т.к.  $2^2 + 3^2 \neq 25, 1^2 + 4^2 \neq 25$ .

Тогда пусть нарисуем ромб со стороной 5,

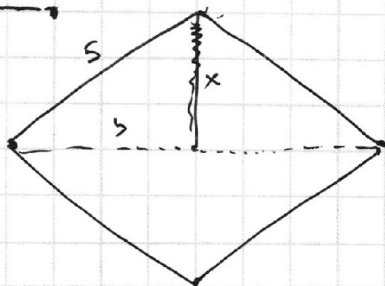


Рассмотрим всевозможные ромбы, если

1).  $(y, z) = (0, 5)$  (относительно до перестановки естественно), тогда  $y$  и  $z$  - 1 способ т.к. угол между двумя такими отрезками равен  $90^\circ$ , и квадрат может быть только 1.



2).  $(y, z) = (3, 4)$  тогда





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow 19 \cdot 2^x + 45^2 = y^2 \Rightarrow 19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$ , заметим, что 19 может входить в разложение на простые только у одной скобочки  $\Rightarrow$  одна из скобочек — это степень 19.

1).  $y+45 = 2^l$ ,  $y-45 = 2^{l-90} \Rightarrow$

$\Rightarrow 19 \cdot 2^x = 2^l(2^{l-90}) \Rightarrow 19 \cdot 2^{x-l} = 2^{l-90}$ , пусть  $x-l = n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n \cdot 19 = 2^{l-90} \Rightarrow 90 = 2^l(2^{l-n} - 19)$ , тогда  $2^{l-n} \equiv 19 \pmod{2}$  по  $n=1$

т.к.  $V_2(90)=1$ , а  $2^{l-n}-19 \not\equiv 2$  т.к. 2-й ст. 19-й нек. ( $l-n$  — очевидно  $>1$ ).

т.к. иначе  $2^{l-n}-19 < 0$  (т.к.  $90 > 0$ )  $\Rightarrow$  Противоречие т.к.  $90 > 0$ .

$\Rightarrow 45 = 2^{l-n} - 19 \Rightarrow 64 = 2^{l-1} \Rightarrow l=7 \Rightarrow y+45 = 2^7 = 128 \Rightarrow y=83$

$\Rightarrow y-45=38 \Rightarrow 19 \cdot 2^x = 38 \cdot 128 = 19 \cdot 2^8 \Rightarrow x=6$

Тогда получается  $(8, 83)$ . (Если  $n > l \Rightarrow 2^n \cdot 19 > 2^{l-90}$  т.к.  $2^n > 2^{l-90}$  поэтому не рассматриваем)

2)  $y-45 = 2^l \Rightarrow y+45 = 2^l + 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow 19 \cdot 2^x = 2^l(2^l + 90) \Rightarrow 19 \cdot 2^{x-l} = 2^l + 90$ , пусть  $x-l = n \Rightarrow$

$\Rightarrow 19 \cdot 2^n = 2^l + 90 \Rightarrow$

a).  $l \geq n \Rightarrow 2^n(2^{l-n} - 19) = 90 \Rightarrow$  т.к.  $n \leq 1$  т.к.

$V_2(90)=1 \Rightarrow A$

•  $n \leq 1 \Rightarrow 19 - 2^{l-n} = 45$ , но  $19 - 2^{l-n} < 45$  т.к.  $2^{l-n} > 0$ ,  $19 < 45$ .

•  $n < 1 \Rightarrow 19 - 2^{l-n} = 90$ , что неверно по аналогии.

б).  $l < n \Rightarrow 2^l(2^{n-l} - 19) = 90$

тут получаются те же случаи, что и в а)  $\Rightarrow$  не работает (кроме  $n=l$  не имеют значения)

Тогда Ответ:  $(8, 83)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Задание~~ Пусть  $x_1^2 - 6x_1 + a = 8$ , тогда  $x^2 + y^2 = a^2$ , пусть  $y = 8$ , тогда  $x = x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + 64 = a^2 \\ x_1^2 - 6x_1 + a = 8 \end{cases} \Rightarrow$  теперь найдем  $a$ .

$$x_1^2 = 8 + 6x_1 - a \Rightarrow 8 + 6x_1 - a = a^2 \Rightarrow 6(12 + x_1) = a^2 - a \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = \frac{a^2 - a - 72}{6}$$

$$\frac{(a^2 - a - 72)^2}{36} + 64 = a^2 \Rightarrow 36(a^2 - a - 72)^2 + 64 \times 36 = 36a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 \times 36 = 36(a^2 - a - 72)(a^2 - a - 72) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 \times 36 = 36a^2 - (a^2 - a - 72)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6a - a^2 + a + 72)(6a + a^2 - a - 72) = 64 \times 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-a^2 + 7a + 72)(5a + a^2 - 72) = 64 \times 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$



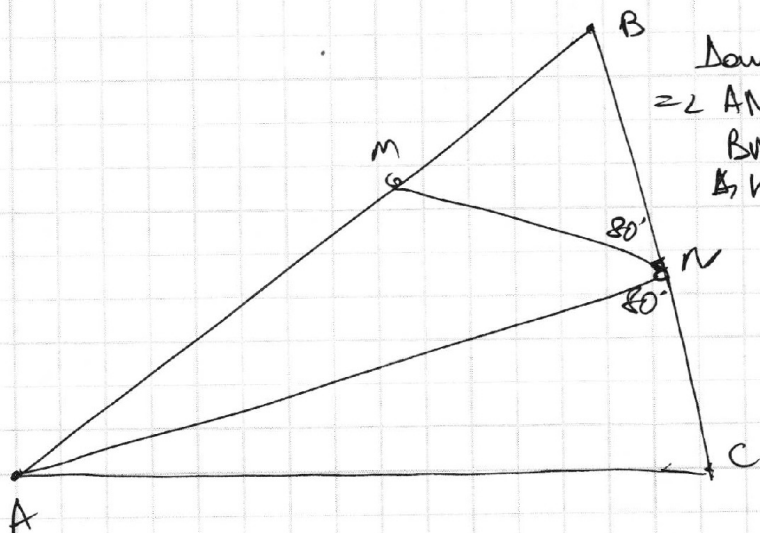
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

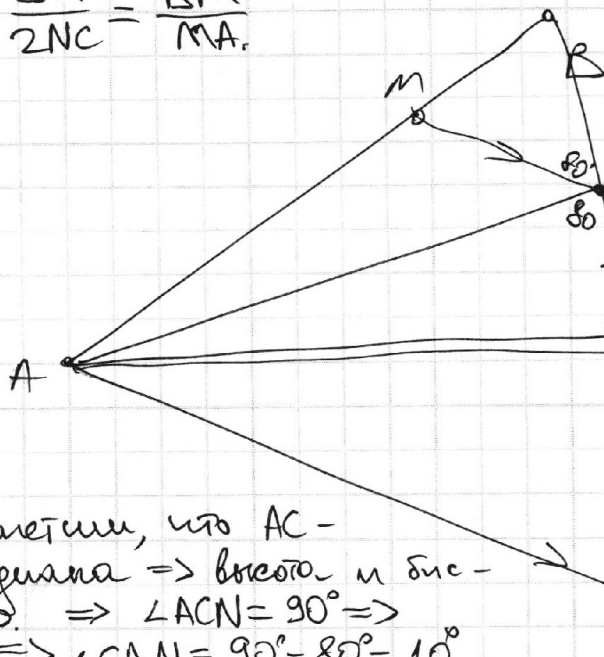
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\angle ABC, \angle BNM = 80^\circ$ ,  
 $\angle ANM = 80^\circ$ ,  
 $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ ,  
Вспомогательный:  $\angle CAN = ?$

Решение:  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$



Отложим  $CN = CN'$ , тогда  $MN \parallel AN'$  т.к.

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NN'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AN'B = 80^\circ$$

т.к.  $\angle ANM = 80^\circ$  и  $MN \parallel AN'$

$$\Rightarrow \angle AN'N = 80^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ANN'$  - равнобедренный

по признаку

$$\angle AN'N = \angle ANN' = 80^\circ$$

Саметим, что AC -  
медiana  $\Rightarrow$  высота и бис-  
сектр.  $\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle CAN = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$

Ответ:  $\angle CAN = 10^\circ$



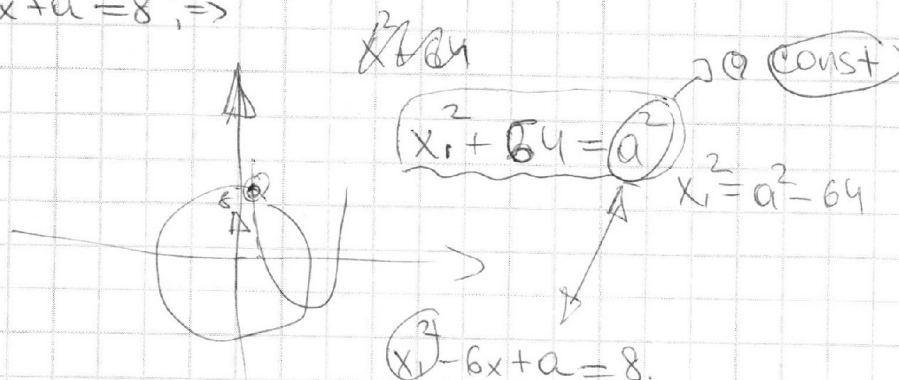
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

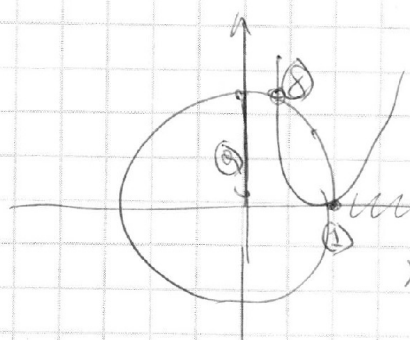
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow x^2 - 6x + a = 8.$$
$$x^2 - 6x + a = 8; \Rightarrow$$



$$x^2 + y^2 = a^2; \quad x^2 - 6x + a = 8$$



$$x^2 - 6x + a = 8$$
$$a^2 - 64 - 6x + a = 8$$

$$x^2 + 64 = a^2$$
$$(x^2 - 6x + a) = 8$$

$$x^2 + 64 = a^2$$
$$x^2 - 6x^2 + a = 8$$

$$x^2 + 36x^2 + a^2 - 12x^3 - 12xa + 2x^2a + x^2$$

$$a^2 - 64 = 8 - a + 6x$$

$$a(a+1) = 6(x+12)$$

$$a^2 + a - 72 = 6x$$

$$\frac{a(a+1)}{6} = x+12$$

$$a(a+1) = 6(x+12)$$

$$\frac{a(a+1) - 72}{6} = x$$

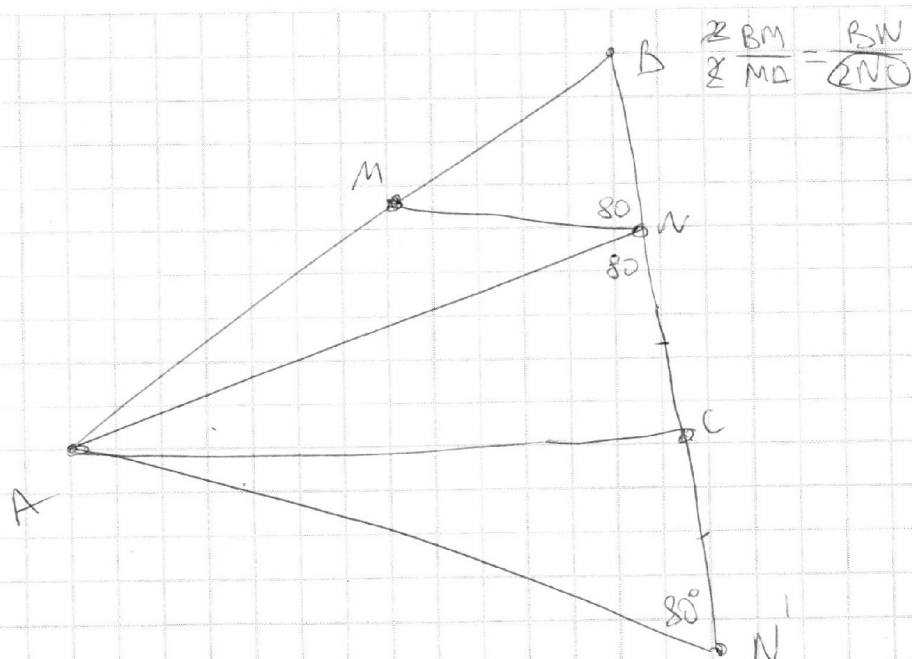
$$\frac{a^2 + a - 72}{6} = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving triangles and points A, B, C, M, N, D, X.

Top diagram: Triangle ABC with point M on BC. Line AM is drawn. Point N is on AC. Angles at N are marked as 80° and 80°. Handwritten notes:  $\frac{MB+MX}{MA-MX} = \frac{2BM}{MA}$ ,  $\frac{BM}{MA} = \frac{2}{1}$ ,  $\frac{MB}{MA} = \frac{2}{1}$ .

Middle diagram: Triangle ABC with point M on BC. Line AM is drawn. Point N is on AC. Handwritten notes:  $\frac{MB+MX}{MA-MX} = \frac{2BM}{MA}$ ,  $\frac{MB}{MA} = \frac{2}{1}$ ,  $\frac{2MB}{MA} = \frac{AC}{MA}$ .

Bottom diagram: Triangle ABC with point M on BC. Line AM is drawn. Point N is on AC. Handwritten notes:  $MX \cdot MA = BM \cdot MA - 2BM \cdot MX$ ,  $\frac{MB+MX}{MA-MX} = \frac{2BM}{MA}$ ,  $\frac{BM}{MA} = \frac{2}{1}$ .

Final equations:

$$\Rightarrow (MB+MX)MA = (2BM-MX)2BM$$
$$MB \cdot MA + MX \cdot MA = 2BM \cdot MA - 2BM \cdot MX$$

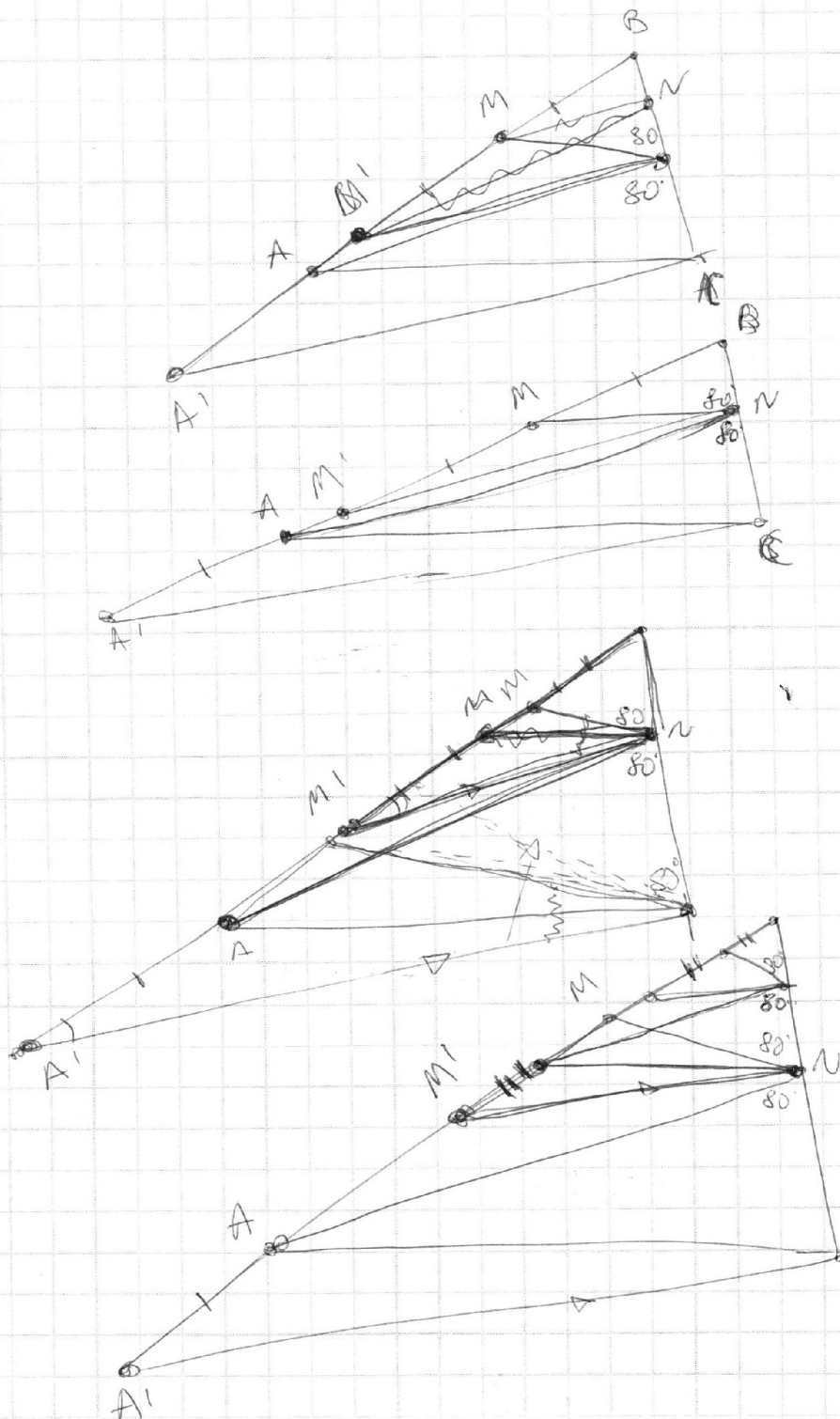


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



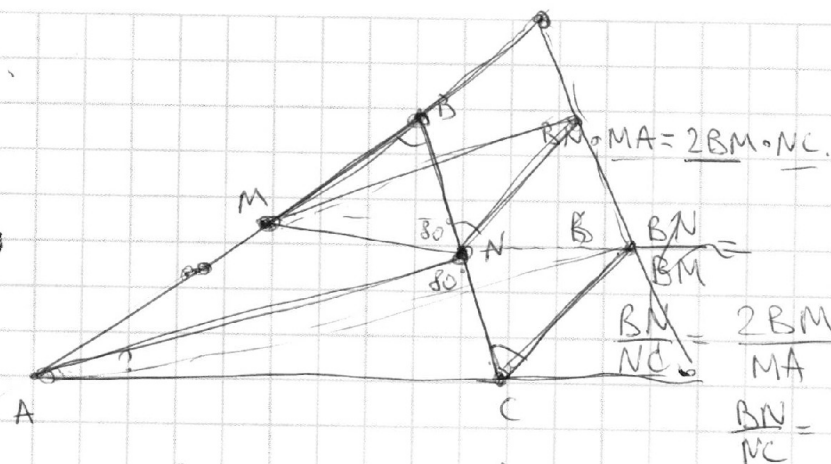


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

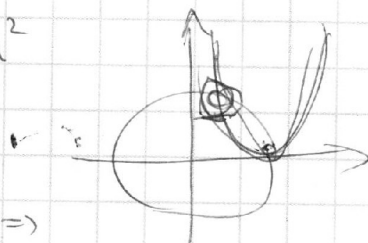
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = a^2$$



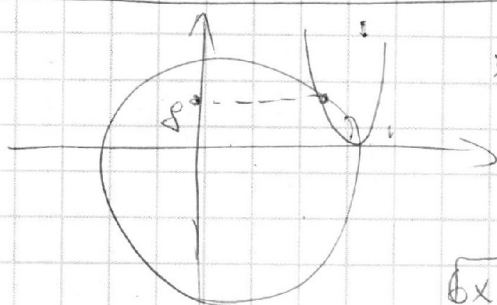
$$x^2 - 6x + a = 8 \Rightarrow$$

$$a = (8 - x^2 + 6x)^2 = 64 + x^4 + 36x^2 - 16x^2 + 96x - 12x^3 = x^4 + 24x^2 + 96x - 12x^3$$

$$x^4 + 24x^2 + 96x - 12x^3 = 0$$

$$19x^2$$

$$x^4 + 19x^2 + 96x - 12x^3 = 0$$



$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + 6x + a = 8 - a + 6x$$

$$8 + 6x - a + 64 = a^2$$

$$6x - a + 72 = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 72 - a = a^2$$

$$6(x + 12) = a^2$$

$$a^2 + a - 6(x + 12) = 0$$

$$x^2 - 6x + \sqrt{x^2 + y^2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 8 = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D: 1 + 24(x + 12)$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 24(x + 12)}}{2} = a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

①  $n! + (n+1)! + (n+2)! : (361) \Rightarrow$

$$n!(1 + n + 1 + n + 2) = n!(2n + 4) \Rightarrow \boxed{2n!(n+2)}$$

$\boxed{361} \Rightarrow 6$

$3 \ 3 \ 6 \ 1 \ \cancel{8 \ 8} \ \cancel{11 \ 11} \ \cancel{12}$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 7} \\ 28 \phantom{00} \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 13} \\ 26 \phantom{00} \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 17} \\ 39 \phantom{00} \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 19} \\ 141 \phantom{00} \\ \hline 141 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \cdot 19 \\ 19 \phantom{00} \\ \hline 1781 \\ 99 \phantom{00} \\ \hline 361 \end{array}$$

$361 = 19^2$

②  $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 =$

$$= n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4$$

$$5n^2 + 10 = \boxed{5n^2 = N^3} \Rightarrow \boxed{5n} = N^3$$

$2 \rightarrow 3$

⑧

$5 \times 5 \times 5$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

③  $|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$

$4 + 8 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|, x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow$

$n + 6 \geq n + 6 \geq$

$(3n - 1) \cdot (3n - 1) \cdot 4 + 12$

$n + 6 \geq -n - 2x + 1 + |7 - 2x| \quad 2x^2 - 4x - 6 \geq 16x^2$

$2n + 8 \geq -2x + 7 - 2x$

$2n \geq -4x \quad 14x^2 + 7x - 2x - 3 \geq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 30 = 19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19 \cdot 2^x + 145 = y^2 \Rightarrow$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

4 ①

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y+45=2^y \Rightarrow 2^9 - 90 = 19 \cdot 2^8$$

$$2^9 - 90 = 19 \cdot 2^8$$

$$2^8 \cdot 8$$

$$2^8 \cdot 8$$

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

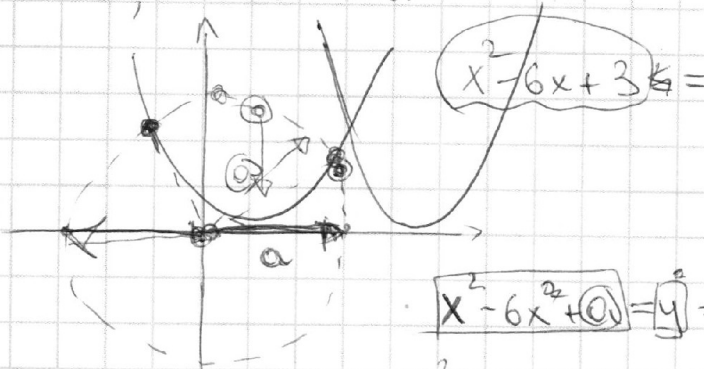
$$2^+(1+2^k) = 1$$

$$2^+(19+2^k) = 90$$

$$2^k - 19 = 45$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2, x^2 - 6x + a \leq 8.$$

$$x^2 - 6x + a$$



$$\Rightarrow x^2 + 64 = a^2$$

$$x^2 - 6x + a = y^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + a = 8 \\ x^2 + 64 = a^2 \end{cases}$$

$$a^2 - 64 - 6\sqrt{a^2 - 64} + a = 8 \Rightarrow$$

$$(a^2 + a - 72) = (6\sqrt{a^2 - 64})^2 \quad a^4 + a^2 + 72^2 + 2a^3 - 72 \cdot 2a^2 - 72 \cdot 2a = 36(a^2 - 64) = 36a^2 - 36 \cdot 64$$

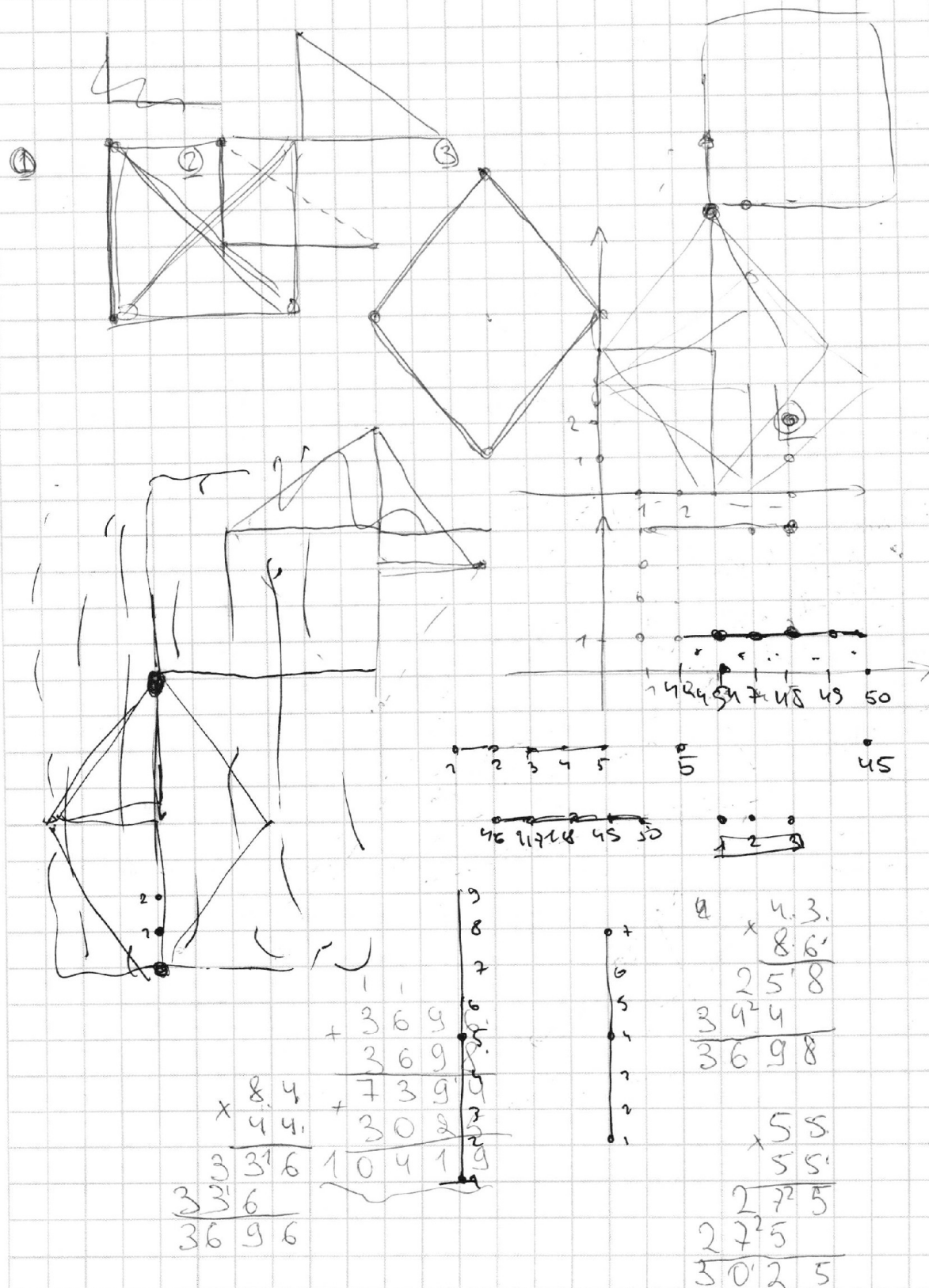


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



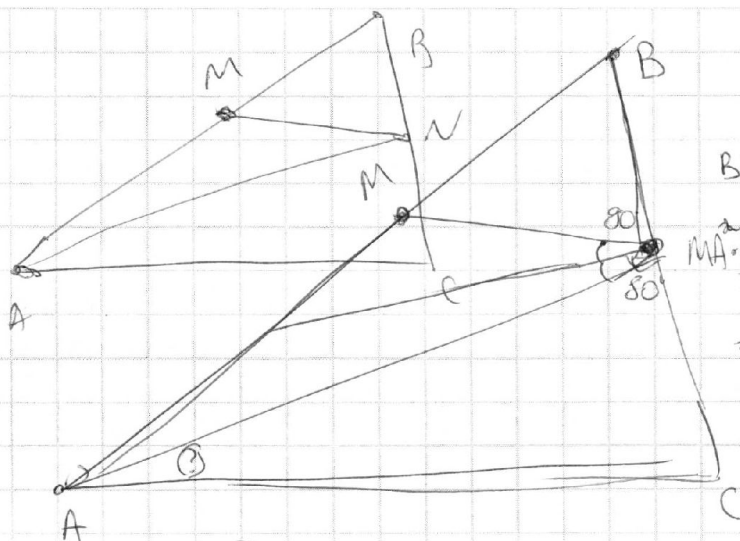


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC.$$

$$\frac{MA \cdot BN}{2BM} = \frac{NC}{MA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{NC} = \frac{2BM}{BN}$$

