



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (n+1 + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$. Заметим что для $n=16$.
 $(n-1)! \cdot (n+1)^2 = (15! \cdot 289) : 289$. Если $n < 16$ $(n-1)! \nmid 17$ и $(n+1)^2 \nmid 17$, значит: $n \geq 16$.
Ответ: $n = 16$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первое число равно a , второе - $(a+1)$ и т.д.

$$a^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+6)^2 = 7a^2 + 2a(1+\dots+6) + 1+4+9+16+25+36 = 7a^2 + 42a + 91$$

Затем вычли 28: $7a^2 + 42a + 91 - 28 = 7a^2 + 42a + 63 = 7(a+3)^2$

$$7(a+3)^2 = N^5$$

Пусть число 7 входит в степени a в число

$(a+3)$ b в степени b в число N . Тогда степень вхождения 7 в

левой части равна $(2a+1)$, а в правой 5 b .

$2a+1=5b$. Тогда $N^5 : 7$ и $N : 7$.

Можно проверить, что не существует a и т.д. $7(a+3)^2 = N^5$ для

~~$N=14$~~ , $N=21$. Также заметим, что $N=28$ подходит и

$a = 49 \cdot 32 - 3$. При $N=7$: $(a+3)^2 = 7^4$, при $N=14$: $(a+3)^2 =$

При $N=14$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 2^5$ - невозможно.

При $N=21$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 3^5$ - невозможно.

При $N=28$: $(a+3)^2 = 7^4 \cdot 2^{10}$, и $a = 7^2 \cdot 2^5 - 3 = 49 \cdot 32 - 3$.

Ответ: $N=28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$a = \sqrt{x^2-x-2}+5$$

$$b = \sqrt{x^2-x-2}+x-1$$

Тогда имеем след. три неравенства:

$$|a| \geq |b| + |a-b|$$

$$|a|-|b| \geq |a-b|$$

$$\Leftrightarrow ab \geq 0$$

~~1) $x \leq -1$
2) $x \geq 2$~~

$$(\sqrt{x^2-x-2}+5)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1) \geq 0$$

$\sqrt{x^2-x-2}+5 > 0$ - верно для любых допустимых x .

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$\begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x^2-x-2 \geq 1-2x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x-2 \geq 1-2x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

Значит любое допустимое x является решением неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

$$OD3: x^2-x-2 \geq 0$$

$$x_1 = -1 - \text{корни}$$

$$x_2 = 2$$

Старший коэффициент - положительный

Знаки: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получить отрезок длины 5 с концами в точках с целочисленными координатами можно 2-мя способами. Можно получить как отрезок параллельный линиям сетки или как гипотенузу Египетского треугольника.

I случай: ромб является квадратом. Он однозначно задаётся своей левой нижней вершиной. Для неё верно: $x_0 \in [1; 40]$, $y_0 \in [1; 40]$, значит кол-во вариантов её расположения $40 \cdot 40 = 1600$.

II случай: Этот случай подразделяется ещё на 2, но они симметричны. Рассмотрим один из них (горизонтальная диагональ - 4, а вертикальная - 3): этот ромб задаётся точкой пересечения диагоналей, для неё: $x_0 \in [5; 41]$, а $y_0 \in [4; 42]$ кол-во вариантов - $37 \cdot 39 = 1493$. Вторым подслучаем симметричным этому и в нём тоже 1493 вариантов. Всего таких ромбов: $1600 + 1493 + 1493 = 4586$.

Ответ: ~~4336~~. 4586.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x=0$: $y^2 = 2048$ - невозможно при $y \in \mathbb{Z}$

Если $x \geq 1$: $(23 \cdot 2^x + 2025) \div 2$, значит $y^2 \div 2$ и $y \div 2$.

При $x=1$: $y^2 = 2068$ - невозможно при $y \in \mathbb{Z}$

При $x=2$: $y^2 = 2107 \Rightarrow y = \pm 47 \cdot 2117$ - невозможно при $y \in \mathbb{Z}$.

При $x=3$: $y^2 = 2209 \Rightarrow y = \pm 47$.

При $x < 0$ левая часть не целая, а правая целая, т.е. $x \geq 0$.

Ответ: $(3; 47); (3; -47)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

График $x^2 + y^2 = a$ представляет из себя окружность для которой $y \in [-|a|; |a|]$. Докажем, что $y^2 - 4y - a$ принимает наибольшее значение при $y = -|a|$. Предположим противное, что $\exists y_0$ т.е.

$$y_0^2 - 4y_0 - a > |a|^2 + 4|a| - a$$

$$(y_0 - |a|)(y_0 + |a|) > 4(y_0 + |a|)$$

$$(y_0 + |a|)(y_0 - 4 - |a|) > 0.$$

$|y_0| < |a|$, значит $|a| + y_0 > 0$ и $y_0 - |a| < 0$ т.е.

$$(y_0 + |a|)(y_0 - 4 - |a|) < 0. \text{ - противоречие.}$$

Тогда: $|a|^2 + 4|a| - a = 6$

I ~~Диа~~ $a > 0$:

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{33} + 3}{2}$$

II $a < 0$:

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a = -1$$

$$a = 6$$

$$a = -1.$$

Ответ: $-1; \frac{\sqrt{33} + 3}{2}$.

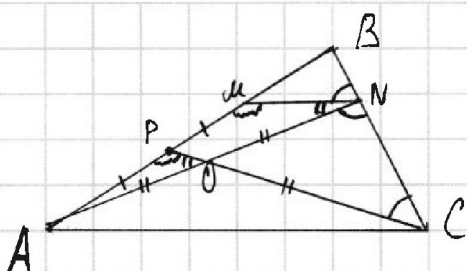


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Отметим Р-серединку АМ и проведем РС. По условию:

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{\frac{1}{2}MA}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{PM}$$

Значит по теореме обратной теореме Талеса $MN \parallel PC$.

Из параллельности следует, что: $\angle AMN = \angle APC$, $\angle ANM = \angle ACP$
где $O = AN \cap PC$. Тогда $\triangle MAN \sim$

$$O = AN \cap PC.$$

По теореме Талеса, т.к. $MN \parallel PO$: $\frac{AP}{PM} = \frac{AO}{ON}$; $\frac{AO}{ON} = 1$.
 $AO = ON$.

Также из того, что $\angle MNB = \angle PCN$ следует, что $\angle MNB = \angle PCN$
 $\angle PCN = \angle MNB = 70^\circ = \angle CNO$, значит: $\triangle CON$ - равнобедренный и
 $CO = ON$.

В $\triangle ACN$ медиана CO равна $\frac{1}{2}AN$, значит: $\angle C = 90^\circ$ и
 $\angle CAN = 180^\circ - \angle C - \angle ANC = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a| \geq |b| + |a-b|$$

$$|a|-|b| \geq |a-b|$$

$$(n-1)!(n+1+n(n+1)) = (n-1)!(n+1)^2$$

$$16! \cdot (16+17) = 16! \cdot 17 \cdot 19$$

$$15! \cdot (16+17) =$$

$$289 = 17^2$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$A(x_0; y_0), B(x_0; y_0), C(x_0; y_0), D(x_0; y_0)$$

$$\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$(x_0 - x_a)^2 + (y_0 - y_a)^2 = 25$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$2048$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$151 - 121 \geq 15 - 21$$

$$1 - 51 - 121 \geq 1 - 5 - 21$$

$$1 - 51 - 1 - 21 \geq 1 - 5 + 21$$

$$151 - 1 - 21 \geq 15 + 21$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \\ x \in [2; +\infty) \end{cases}$$

$$7a^2 + 2a(1 + \dots + 6) + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$$

$$7a^2 + 42a + 91$$

$$7a^2 + 42a + 63 = N^5$$

$$7(a^2 + 6a + 9)$$

$$7(a+3)^2 = N^5$$

$$p \in N$$

$$p^5 \in 7(a+3)^2$$

$$(a+3)^2 = p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \dots$$

$$N = 4$$

$$a = 229$$

$$N = 7$$

$$y^2 - 1 \equiv 0 \pmod{23}$$

$$(y-1)(y+1) \equiv 0 \pmod{23}$$

$$y \equiv 1 \pmod{23}$$

$$y \equiv -1 \pmod{23}$$

$$2736$$

$$+1600$$

$$= 4336$$

$$[4; 41]$$

$$38 \cdot 39 \cdot 2 + 40^2$$

$$ab \geq 0$$

$$OD3:$$

$$(\sqrt{x^2 - x - 2} + 5)(\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1) \geq 0$$

$$7, 14, 21$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 36 \\ \hline 288 \\ + 108 \\ \hline 1368 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 1 - x$$

$$x^2 - x - 2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x = 3$$

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ 23 \\ \hline 192 \\ + 128 \\ \hline 1472 \\ + 2025 \\ \hline 3497 \end{array}$$

