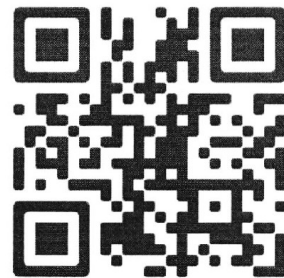




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$289 = 17^2$$

$$(n-1)! + n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot (n-1)! : 17^2$$

$$(n-1)! \cdot (1 + n + n + (n+1)) : 17^2$$

$$(n-1)! \cdot (1 + n + n^2 + n) : 17^2$$

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17^2 \quad 17 - \text{простое}$$

Если $(n-1)! : 17^2$, то $n \geq 35$ (и.к. если n будет меньше 35, то

$$(n-1)! < 34! \Rightarrow (n-1)! \not: 17^2)$$

Если $(n-1)! : 17$, но $\not: 17^2$, то тогда $n+1 : 17 \Rightarrow n \geq 33$ (если $n < 33$, то $n+1 = 16 \Rightarrow (n-1)! = 15! \not: 17$)

Если $(n+1)^2 : 17$, то $n \geq 16$

$$\rightarrow \min(n) = 16$$

Ответ: ~~16~~ $\min(n) = 16$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+6)^2 - 28 = N^5, \text{ где } N > 8$$

$$7a^2 + (2a+4a+\dots+12a) + (1+4+9+\dots+36) - 28 = N^5$$

$$7a^2 + ((2a+12a) + (4a+10a)) + (6a+8a) + (1+4+9+16) + (25+36) - 28 = N^5$$

$$7a^2 + 14a \cdot 3 + (5+25+61) - 28 = N^5$$

$$7a^2 + 42a + 81 - 28 = N^5$$

$$7a^2 + 42a + 63 = N^5$$

$$7 \cdot (a^2 + 6a + 9) = 7 \cdot (a+3)^2 = N^5 \Rightarrow \text{м.к. } 7 - \text{ простое, то } N : 7$$

Если $N < 49$:

$$7 \cdot (a+3)^2 = N^5 = 7^5 \cdot k^5$$

$$(a+3)^2 = 7^4 \cdot k^5 \Rightarrow k - \text{ полный квадрат и } k > 1 \text{ (если } k=1, \text{ то}$$

$$N=7 \Rightarrow N < 8 \text{ противор.)} \Rightarrow \text{м.к. } N < 49, \text{ то } k < 7 \Rightarrow k=4 \Rightarrow N=28$$

Если $N \geq 49$, то пример уже не мин.

$$\min(N) = 28$$

Пример а:

$$(a+3)^2 = 7^4 \cdot 2^{10} \Rightarrow a+3 = 7^2 \cdot 2^5 \Rightarrow a = 7^2 \cdot 2^5 - 3$$

$$\text{Ответ: } \min(N) = 28.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$y = \sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$|y+5| \geq |y+x-1| + |6-x|$$

$$y+5 \geq |y+x-1| + |6-x|$$

Если $x \geq 6$:

$$y+5 \geq (y+x-1) + (x-6)$$

$$y+5 \geq y+x-1+x-6$$

$$5 \geq 2x-7$$

$$12 \geq 2x$$

$$x \leq 6 \Rightarrow \text{и.к. } x \geq 6 \text{ и } x \leq 6, \text{ то } x_1 = 6$$

Если $x < 6$:

$$\begin{cases} y+5 \geq y+x-1+6-x, \text{ если } y+x-1 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x-1+6-x \Rightarrow 5 \geq 5 \quad \textcircled{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+5 \geq 1-x-y+6-x, \text{ если } y+x-1 < 0 \Rightarrow 2y+5 \geq 7-2x \Rightarrow 2x+2y \geq 2 \Rightarrow x+y \geq 1 \quad \textcircled{X}, \\ \rightarrow \text{и.к. } y+x < 0 \end{cases}$$

Найдём все ~~возможные~~ x , такие что $x < 6$, но $y+x \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(x+1)} + x \geq 1$$

Если $x \geq 2$, то $\sqrt{(x-1)(x+1)} + x \geq 1 \Rightarrow$ то для всех таких x верно $\Rightarrow x \in [2; 6)$

Если $x \leq -1$, то:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(x-2)(x+1)} \geq 1-x$$

П.к. x меньше 0, то $z = -x > 0$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 + z$$

$$\Downarrow$$
$$\cancel{x^2 - x - 2}^2 + z - 2 \geq (z + 1)^2$$

$$\Downarrow$$
$$\cancel{x^2} + \cancel{x} - 2 \geq \cancel{x^2} + 2z + 1$$

$$\Downarrow$$
$$z \leq -3$$

противор.

Ответ: $x \in [2; 6) \cup [6] \Leftrightarrow x \in [2; 6]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

уровненную высоту). Получаем при таком подсчете:

$$2 \cdot 29 \cdot 33 + 35^2 + 2 \cdot 35 \cdot 37 + 2 \cdot 27 \cdot 39 + 2 \cdot 29 \cdot 37 + 2 \cdot 27 \cdot 39 + 3 \cdot 31^2 =$$

$$= 2 \cdot 29 \cdot 70 + 1225 + 70 \cdot 37 + 2 \cdot 78 \cdot 39 + 961 \cdot 3 = 95 \cdot 70 + 78^2 + 1225 + 2883 =$$

$$= 6084 + 6650 + 1225 + 2883 = 12734 + 4008 = 16742$$

Ответ: 16742 способа.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

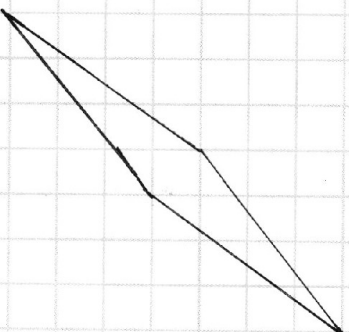
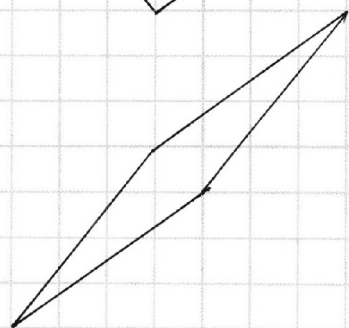
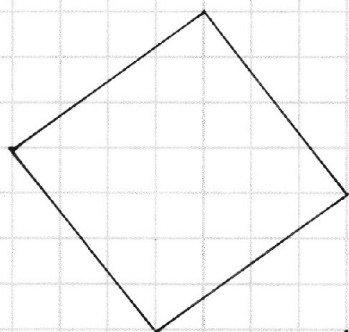
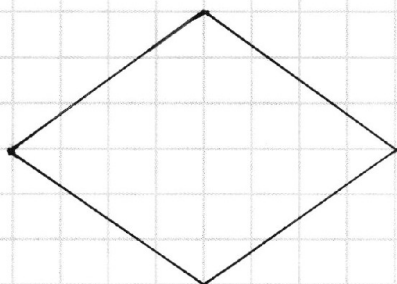
6
☐

7
☐

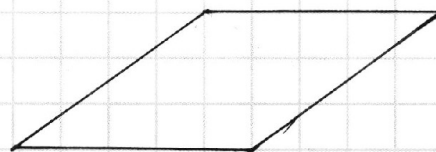
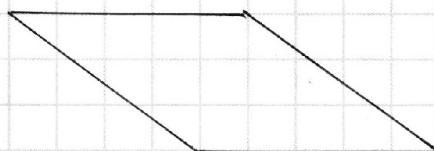
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

со всеми
сторонами I-го
и II-го



с двумя сторонами I-го и
II-го и III-го



Теперь считали число способов
расставить каждый ромб в квадрате
из координат. Т.к. в промежутке
 $[1; 45]$ 45 чисел, то мы считали
длину, а затем высоту, а
далее считали удвоенную ширину от 45,
а затем ^{удвоенную} высоту от 45 и умножали,
получая кол-во способов (т.к. каждую
расстановку мы можем двигать как
вверх, так и вниз, но по горизонтали
мы из 45 будем вычитать двойную
ширину, а по вертикали ^{из 45} вычитали



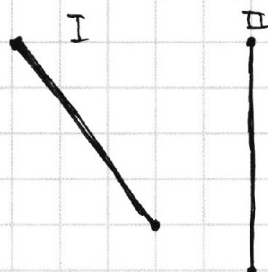
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

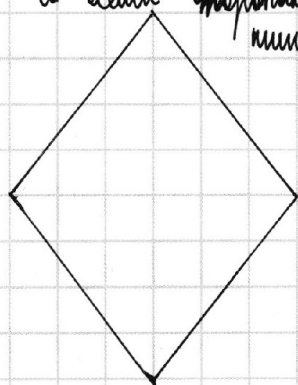
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. к. отрезок длины 5 ~~единиц~~ с вершинами в целых координатах имеет вид:

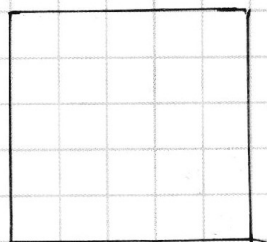


III. ромбы имеют вид:

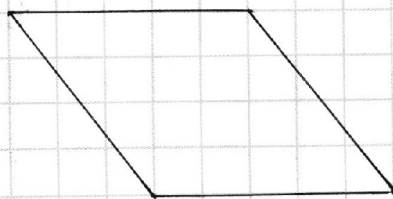
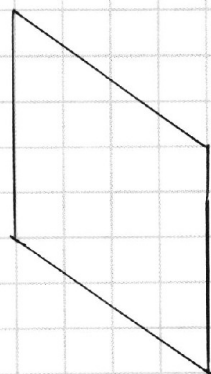
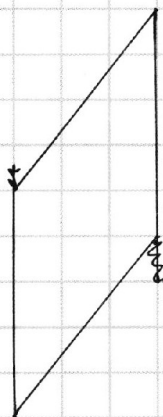
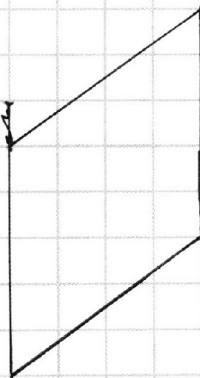
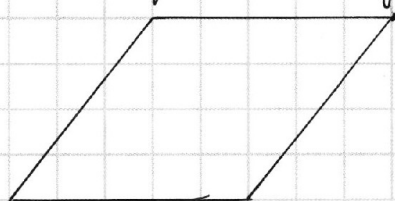
со всеми сторонами I-го типа



со всеми сторонами II-го типа



с двумя II-го и с двумя I-го типа





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 = (y+45)(y-45)$$

Одно из $y+45$; $y-45$ является степенью двойки:

Если $y-45=2^n$ и $y+45=2^k \cdot 23$. Тогда:

$$2^n + 90 = 2^k \cdot 23$$

$$k+n=x$$

$$\frac{2^n + 90}{2^k} = 23 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2^{n-1} + 45)}{2^k} = 23 \quad \left(\begin{array}{l} \text{если } k=0, \text{ то} \\ \text{тогда } y+45=23 \Rightarrow y=-22 \Rightarrow -67=2^x \end{array} \right)$$

И.к. $90=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow 90:2$, но $\nmid 2^2$ и т.к. 23 - целое, то

$$k=1 \Rightarrow 2^n + 90 = 46 \text{ Тривиальн.}$$

Тогда:

$$y+45=2^n \text{ и } y-45=2^k \cdot 23 \Rightarrow 2^k \cdot 23 + 90 = 2^n \Rightarrow \frac{2^k \cdot 23 + 90}{2^{n-k}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^k \cdot 23 + 90}{2^n} = 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot (2^{k-1} \cdot 23 + 45)}{2^n} = 1 \Rightarrow 2^{k-1} \cdot 23 + 45 = 2^{n-1}$$

И.к. $k \leq 2$ (и.к. если $k > 2$, то $2+n=n \Rightarrow n-1=0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow$)

$$\Rightarrow y+45=2 \Rightarrow y=-43 \Rightarrow -88=2^k \cdot 23 \quad \text{но } k=1 \text{ или } k=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } k=1, \text{ то } y-45=46 \Rightarrow y=91 \Rightarrow 91+45=136=2^4 \quad \text{но } k=0, \text{ то}$$

$$y-45=23 \Rightarrow y=68 \Rightarrow y+45=113=2^n \quad \text{но}$$

Ответ: $\emptyset$.

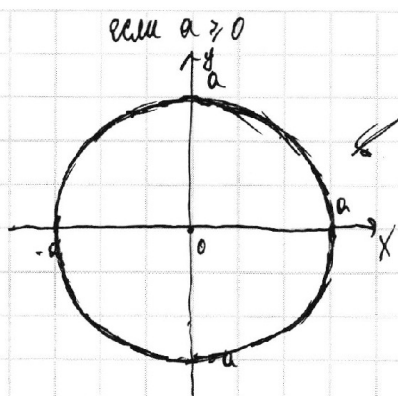


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $\max(y) = a$
и $\min(y) = -a$, то т.к.

$$a^2 + (-4a) \cdot a \leq a^2 - (-a) \cdot a, \text{ то}$$

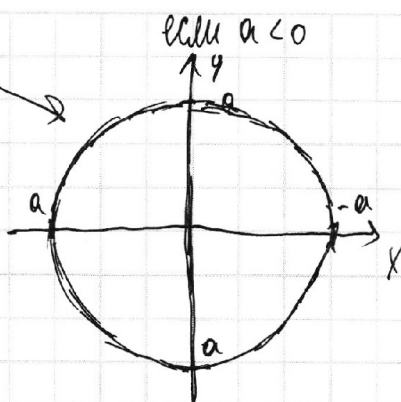
$$a^2 + 3a = 6 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \Rightarrow \text{т.к. } a \geq 0,$$

$$\text{то } a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}; -1.$$



т.к. $\max(y) = -a$ и т.к.

$\min(y) = a$, то т.к.

$$a^2 - 4a - a > a^2 + 4a - a, \text{ то}$$

$$a^2 - 4a - a = a^2 - 5a = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \text{т.к. } a < 0, \text{ то}$$

$$a_2 = -1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$(n-1)! + n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! : 289$$

$$(n-1)! \cdot (1 + n + n^2 + n) : 289$$

$$289 = 17^2$$

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17^2$$

$$17 - \text{простое} \Rightarrow (n-1)! : 17^2, \text{ но } n \geq 35$$

$$\text{если } (n-1)! : 17, \text{ но } \not: 17^2, \text{ то также не подходит,}$$

$$\text{или тогда } n+1 : 17 \Rightarrow n \geq 33 \text{ (если меньше, то } n=16,$$

$$\text{но тогда } (n-1)! = 15! \not: 17)$$

$$\text{если } (n+1)^2 : 17^2, \text{ то } n \geq 16$$

$$2 \cdot 29 \cdot 33 + 35^2 + 2 \cdot 35 \cdot 37 +$$

$$+ 2 \cdot 27 \cdot 39 + 2 \cdot 29 \cdot 37 + 2 \cdot$$

$$27 \cdot 39 + 33^2$$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+6)^2 - 28 = N^5, \text{ где } N \geq 8$$

$$\min(N) = ?$$

$$7a^2 + 42a + \left(\overset{5}{1+4+9} + \overset{34}{16+25+36} \right) - 28 = N^5$$

$$7a^2 + 42a + 91 - 28 = 7a^2 + 42a + 63 = N^5$$

$$7(a^2 + 6a + 9) = N^5 \Rightarrow N : 7 \Rightarrow N \geq 14$$

$$7 \cdot (a+3)^2 = 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$$

$$y = \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$|y + 5| \geq |y + x - 1| + |6 - x|$$

$$y + 5 \geq |y + x - 1| + |6 - x|$$

если $x \geq 6$:

$$y + 5 \geq y + x - 1 + x - 6$$

$$y + 5 \geq y + 2x - 7$$

$$5 \geq 2x - 7$$

$$x \leq 6 \Rightarrow x \geq 6 \text{ и } x \leq 6 \Rightarrow x = 6$$

если $x \leq 6$:

если $x \geq 2$:

$$y + 5 \geq y + x - 1 + 6 - x$$

$$5 \geq 5$$

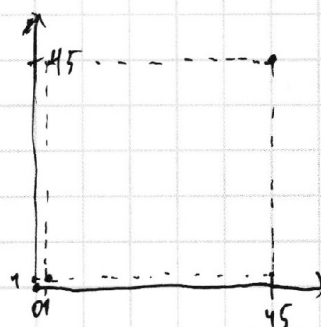
$$x \in [2; 6)$$

$$a = 3$$

если $x \leq -1$:

$$a^2 = 6 - 3a$$

$$a^2 = 3(2 - a)$$

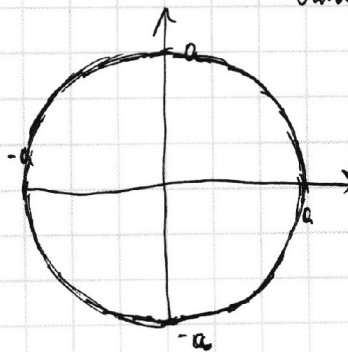


$$a^2 + 3a - 6 = 0 \quad a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{31}}{2}$$

$$D = 9 + 24 = 31$$

$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{31}}{2}$$

если $a \geq 0$:



$$y^2 - 4y - a = 6$$

$$a^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a = 6$$

$$a(a + 3) = 6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 58 \\ + 37 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 95 \\ \hline 150 \\ 855 \\ \hline 6850 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 6 \\ \times 78 \\ \hline 48 \\ 420 \\ \hline 546 \\ + 624 \\ \hline 6084 \end{array}$$

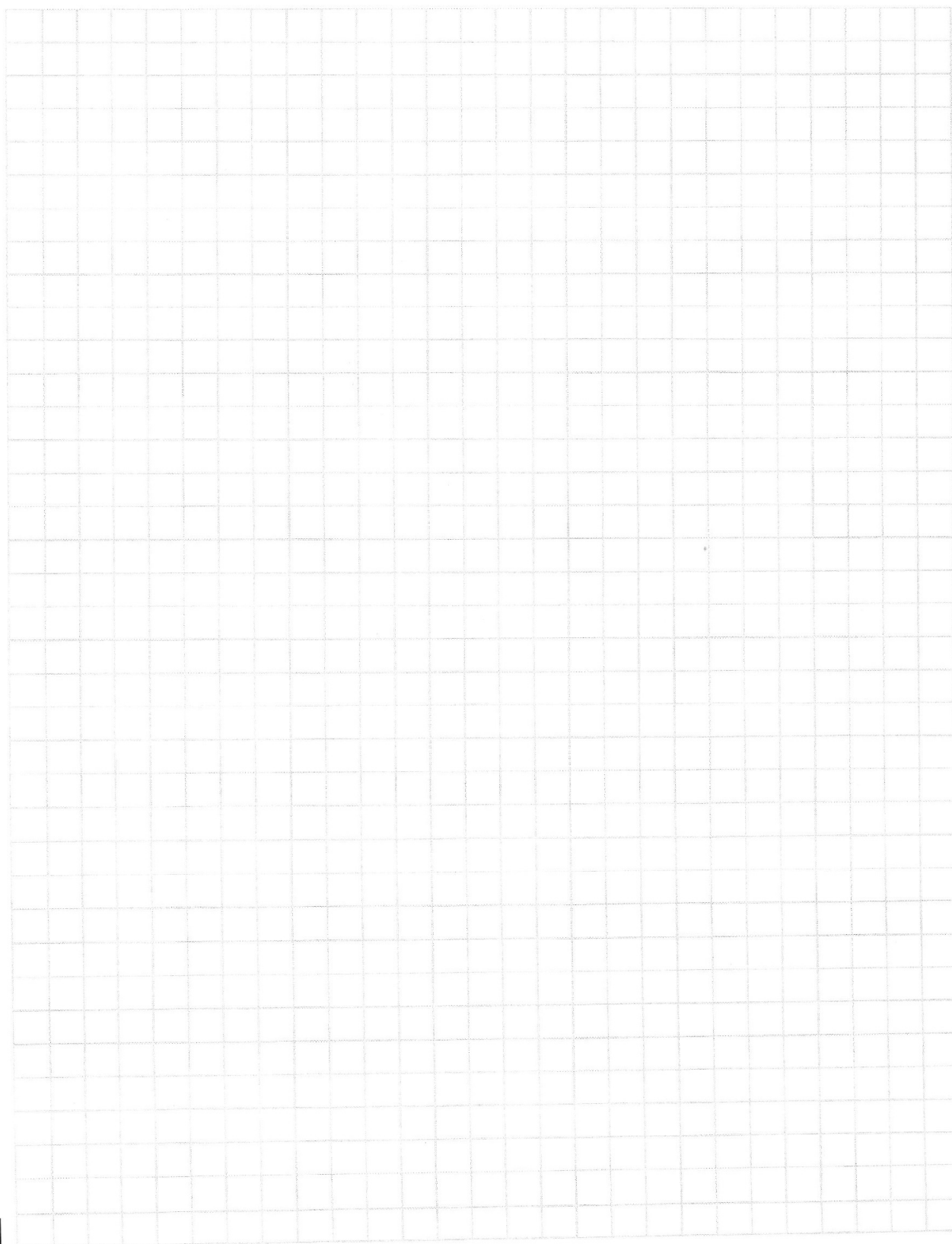


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



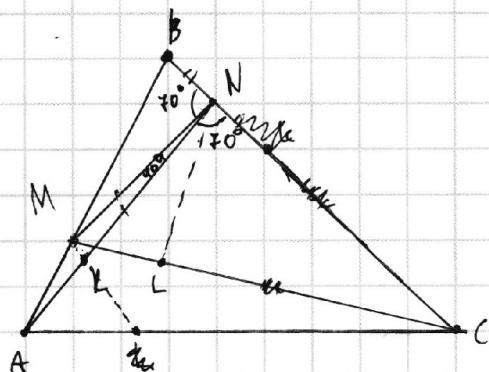


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BM}{NL} = \frac{BC}{CN}$$

$$BM \cdot CN = BC \cdot NL$$

2075

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

$$\frac{MK}{BN} = \frac{MA}{AB}$$

$$BN \cdot MA = MK \cdot AB = MK \cdot (MA + MB)$$

$$MK \cdot (MA + MB) = 2 \cdot BM \cdot NC$$

если $x=1$:

$$2071 = y^2$$

если $x=0$:

$$2048 = y^2$$

$$2^{11} = y^2$$

$$y = 2^{\frac{11}{2}}$$

