



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! \cdot (n+2)^2$$

$$361 = 19 \cdot 19$$

$$19 - \text{простое число} \Rightarrow \text{при } n < 19 \quad n! \not\vdots 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)! \vdots 19 \Rightarrow n+2 \vdots 19 \Rightarrow n_{\min} = 19 - 2 = \boxed{17}$$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D \cup B: x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

↓ всегда ≥ 0

↓ ≥ 0 при $x \leq 3,5$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 7, \quad \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + \left| 7 - 2x \right|$$

$$x \leq -1:$$

↑ всегда ≥ 0 при $x \geq 7/3$ (т.к. корни + полупр. число)

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \leftarrow \geq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - 2x + 4 > 0 \quad (D < 0)$$

$$x = (-\infty, -1]:$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 2x \leftarrow \geq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$-3 \geq 1 \Rightarrow x \notin (-\infty, -1]$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \text{ всегда } < 0 \text{ при } x \leq -1.$$

$$x = [3; 3,5]:$$

$$6 \geq 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$6 \geq 6 \Rightarrow x = [3; 3,5]$$

$$x > 3,5:$$

$$6 \geq 2x - 1 + 2x - 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$\text{Ответ: } x = [3; 3,5]$$



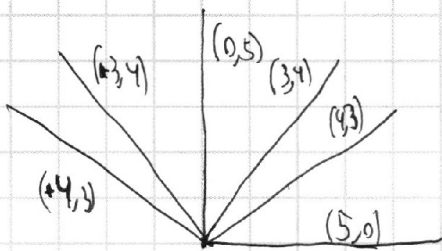
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Поскольку это параллельно $\Rightarrow$ он определяется по 2 сторонам. Вот все виды отрезков длиной 5 с точками на сетке.

Каждый отрезок может быть 2-х или 3-х видов:

$C_6^2 = 15$. Чтобы узнать каково количество таких отрезков на участке

$x = [1; 50]$, $y = [1; 50]$ нужно узнать количество отрезков (в направлении по оси). Тогда количество таких отрезков: $(49-x)(49-y)$

во всех возможных (15) случаях.

Подставим значения количества сумм отрезков длиной 5:

$$\begin{aligned}
 N(\text{каждый вид}) &= (49-1)(49-1) + (49-1)(49-2) + (49-2)(49-1) + (49-2)(49-2) + (49-3)(49-1) + \\
 &+ (49-3)(49-2) + (49-2)(49-3) + (49-3)(49-3) + (49-4)(49-1) + (49-4)(49-2) + \\
 &+ (49-2)(49-4) + (49-4)(49-4) + (49-5)(49-1) + (49-5)(49-2) + (49-2)(49-5) + (49-5)(49-5) = \\
 &= 4 \cdot 42^2 + 4 \cdot 41 \cdot 45 + 2 \cdot 41 \cdot 43 + 4 \cdot 40 \cdot 46 + 44^2 = 9056 + 7380 + 3526 + \\
 &+ 7360 + 7936 = 27258
 \end{aligned}$$

Ответ: 27258.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2025 = 45 \cdot 45$$

$$(y-45)(y+45) = 2^x \cdot 19$$

$$y = 19k + 7 \text{ или } y = 19k + 12 \quad k - \text{нечетное число}$$

$$y = 19k + 7;$$

$$(19k-38)(19k+52) = 2^x \cdot 19$$

$$(k-2)(19k+52) = 2^n$$

$$19k+52 = 2^n \quad (k - \text{нечетное число}) \quad (2^n = \frac{2^{2n}}{k-2} \text{ при } k-2 = 2^2)$$

$$19k = 2^2(2^{n-2} - 13)$$

$$19 \div 2 \Rightarrow k \div 4$$

$$\text{Пусть } k = 4f$$

$$4f - 2 = 2^z \quad | :2$$

$$2f - 1 = 2^{z-1} \quad \text{При } z > 1 \text{ нет } f \text{ нечетного числа} \Rightarrow z = 1$$

$$\text{и } f = 1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow y = 19 \cdot 4 + 7 = 83; \quad n = 8$$

$$\text{Если } y = 19k + 12;$$

$$(19k+57)(19k-33) = 2^x \cdot 19$$

$$(k+3)(19k-33) = 2^x$$

$$2^n \cdot 2^2 = 2^x$$

$$k+3 = 2^z$$

$$19k-33 = 2^n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k+3=2^z$$

$$19k-33=2^h$$

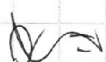
$$k=2^z-3$$

$$19 \cdot 2^z - 57 = 2^h + 33$$

$$19 \cdot 2^z = 2^h + 90 (*)$$

$$19k = 2^h + 33$$

рассмотрим (*) по модулю 19;



$$0 \equiv 2^h + 14 \pmod{19} \Rightarrow 2^h \equiv 5$$

$2^h \pmod{19}$	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1
$h+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Как видно, $2^h \equiv 5 \pmod{19}$ при $h \equiv 16$.

~~Рассмотрим (*) по модулю 19.~~

В уравнении (*) $90 \div 4 \Rightarrow$ если $2 \nmid h \geq 2$ то уравнение не решится.

$h > 2$ то выше доказано; при $2 \leq h$ $19 \cdot 2^h$ больше $2^h + 90$

$\Rightarrow y \neq 19k + 33 \Rightarrow$ единственное решение это:

$$x, y = 8; 83$$

Ответ: $\{8; 83\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \leftarrow \text{уравнение окружности (центр } (0;0) \text{ и } r = |a|) \\ x^2 - 6x + a \leq 8 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(a+8)}}{2} \quad a \leq 17$$

$$x = (3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}) \quad \text{Обм. что } |3 + \sqrt{17-a}| > |3 - \sqrt{17-a}|$$

Значит, крайняя точка отрезка на окружности $(-a) \leq 3 + \sqrt{17-a}$

$$|a| \leq 3 + \sqrt{17-a}$$

$$a \geq 0; \quad a \leq 3$$

$$a \leq 0; \quad a \leq -3$$

$$a = [0; 3];$$

$$a - 3 \leq \sqrt{17-a} \quad \begin{matrix} \leq 0 & 70 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$a \leq 3 + \sqrt{17-a}$$

$$-a \leq 3 + \sqrt{17-a}$$

$$a = (-3; 0); \quad \begin{matrix} \leq 0 \\ \downarrow \end{matrix} \quad -a - 3 \leq \sqrt{17-a}$$

$$17-a \geq a^2 - 6a + 9$$

$$\sqrt{17-a} \geq -a - 3$$

$$a^2 - 5a - 8 \leq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 \leq 17-a$$

$$a = \left[\frac{5 - \sqrt{57}}{2}; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right]$$

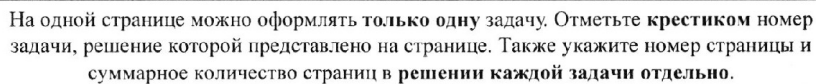
$$a^2 + 7a - 8 \leq 0$$

$$a = \left[\frac{3}{2}; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right]$$

$$a = \left[\frac{-7 - \sqrt{49 + 32}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{49}}{2} \right]$$

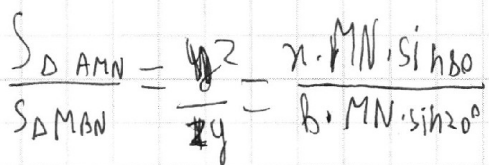
$$a = [-8; -3]$$

$$\text{Ответ: } a = \left[-8; \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right]$$



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$n_y = b_z \cdot \frac{\sin 20}{\sin 80}$$

$$2a = b \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow h = 2a \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

Th. cos $\frac{1}{2} A$ NC;

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta$$

$$CA = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 80^\circ} \cdot \sin 80^\circ = a \cdot \sin 80^\circ$$

$$2 \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ = 2 \sin 160^\circ \cdot \cos 160^\circ = \sin 20^\circ$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{4a^2 \sinh^2 \theta_0}{\sinh^2 2\theta_0} - \frac{4a^2 \sinh \theta_0 \cosh \theta_0}{\sinh 2\theta_0}} \quad \sinh 2\theta = a \cdot \sinh \theta_0$$

$$\begin{aligned}\sin 80^\circ &= \cos 10^\circ \\ \cos 80^\circ &= \sin 10^\circ\end{aligned}$$

$$\sin 2 = \frac{\sin 80^\circ}{\sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 80^\circ}{\sin^2 20^\circ} - \frac{4 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}}} = \frac{\sin 80^\circ}{\sqrt{\frac{4 \sin^2 80^\circ}{\sin^2 20^\circ} - 1}}$$

$$\text{Problem: } \alpha = \arcsin \left(\frac{\sin 80^\circ}{\sqrt{\frac{4 \sin^2 80^\circ}{\sin^2 20^\circ} - 1}} \right)$$

$\sin d =$ 



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + 9 - 8 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 32 - 4a}}{2}$$

$$x = \frac{6 - \sqrt{68 - 4a}}{2}; \frac{6 + \sqrt{68 - 4a}}{2}$$

$$3 + \sqrt{17 - a}$$

~~1300~~

$$(y^2 - 45)(y + 45) = 2^x \cdot 79$$

$$\begin{array}{l} y - 45 : 79 \\ y + 45 : 79 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 57 \\ 57 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$y = 19k + 7$$

$$(19k - 38)(19k + 52) = 2^x \cdot 79$$

$$\begin{array}{r} -26787 \\ -2025 \\ \hline 576 \end{array}$$

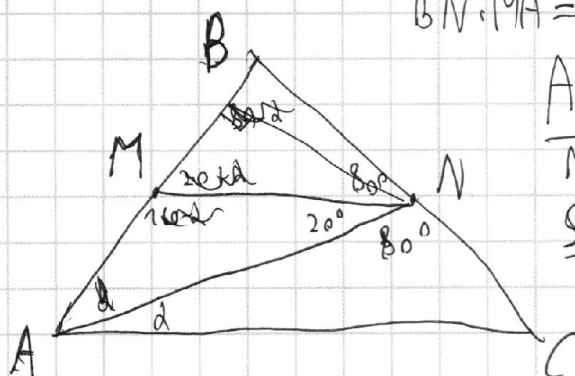
$$(k-2)(19k+52) = 2^x$$

$$k=4$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{AM}{MB} \cdot (19k - 33)(19k + 59) = 2^x \cdot 79$$

$$\frac{\sin 20^\circ \cdot MN \cdot AN}{\sin 80^\circ \cdot BN \cdot MN} = \frac{AM}{BM}$$



$$19k + 52 = 2^x$$

$$19k = 2^2(2^{x-2} - 13)$$

$$4a - 2 = 2^z$$

$$2a - 1 = 2$$

$$19k = 2^x + 33$$

$$k = 2^{\frac{x}{2}} - 3$$

$$19 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 157 = 2^x + 33$$

$$19 \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 2^x + 90$$

$$BN \cdot MA = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot NA \cdot BM \cdot NA$$

$$(k+3)(19k-33) = 2^x$$

$$k+3 = 2^z$$

$$19k-33 = 2^h$$

$$2N_c = \frac{NA \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}}{\sin 80^\circ}$$

$$2N_c = NA \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 32 \ 64 \ 128 \ 256$$

$$90 = 2 \cdot 45$$

$$18 \ 17 \ 15$$

$$11 \ 3 \ 6 \ 12 \ 5$$

$$10 \ 1$$

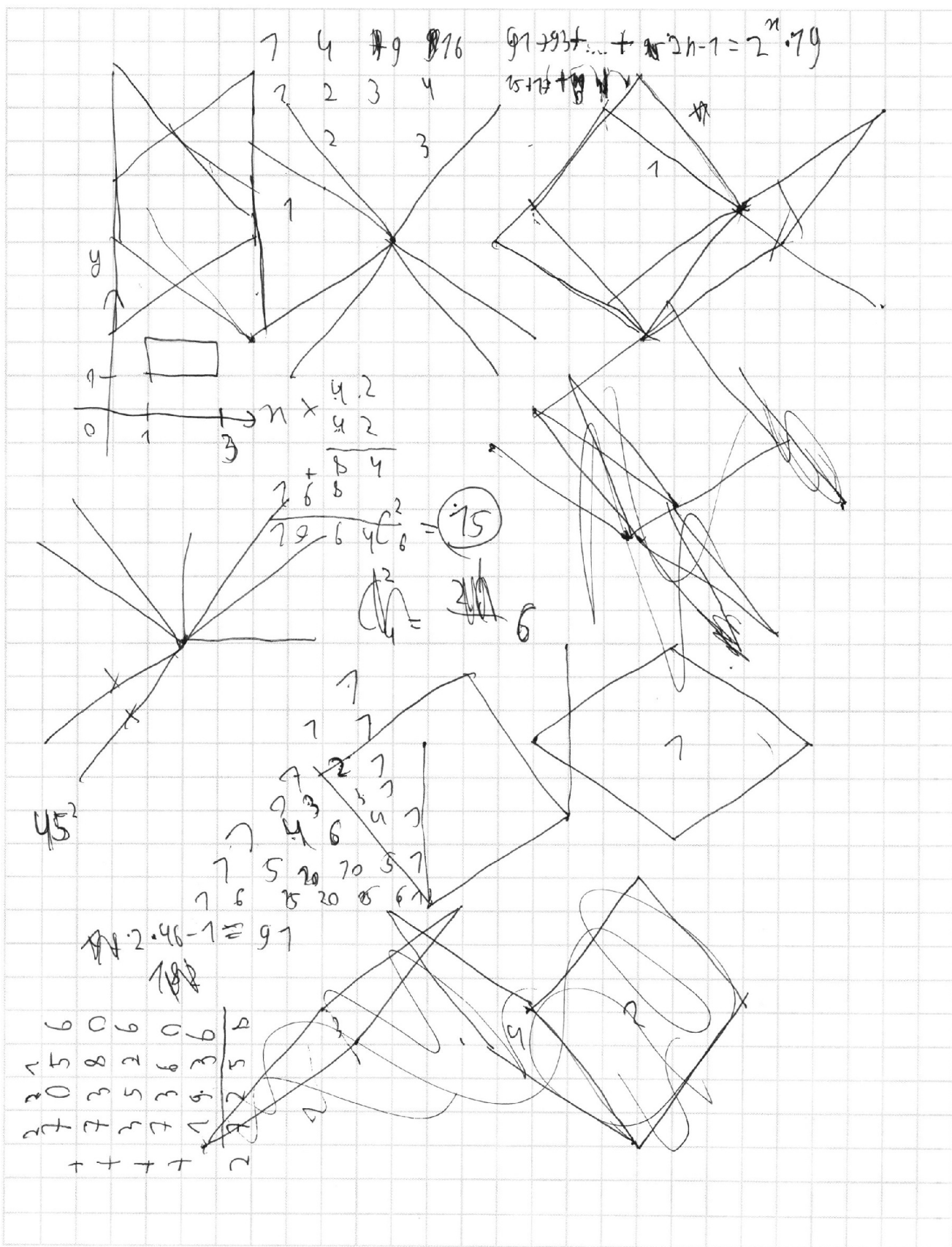


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$n! \cdot (1+n+1+n^2+3n+2) = 361$$

$$n! \cdot (n^2+4n+4) = 361$$

$$n! \cdot (n+2)^2 = 361$$

$$19 \cdot 19 = (n+2)^2 \cdot n!$$

$$n = 17$$

$$n, n+1, n+2, \dots$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 \div 10 = a^3$$

$$5n^2 + 20n + 20 = a^3$$

$$5(n+2)^2 = a^3$$

$$n = 38$$

$$n^2 - 2n - 3 \geq 0$$

$$(n-3)(n+1) \geq 0$$

$$n = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$-5$$

$$-11$$

$$x_{1,2} =$$

$$n^2 - 2n - 3 \geq 1 + 4n + 4n^2$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \\ 2 \ 6 \ 5 \ 0 \end{array}$$