



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 9

- [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
- [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
- [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Нацюним, что квадрат также является ромбом.
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
- [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$361 = 19 \cdot 19$$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) = n! (n+2)^2$$

Тогда должно быть: $n! (n+2)^2 = 19^2 \times$, получим 3 случая

- 1) $n! : 19^2$, тогда n только больше 19 }
2) $n! : 19$ и $(n+2)! : 19$, тогда $n \geq 19$ }
3) $(n+2)^2 : 19^2$, тогда $n+2 : 19$ и $\min n = 17$
- 19 простое, так что 19 не
получить из множества, состоящего из 19

Наименьшее n - в 3-ем случае ($n=17$)

Ответ: при $n=17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представим квадраты 5 последовательных натуральных чисел N^2 так:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 2n + 1) + \\ n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 5n^2 + 10$$

Тогда $5n^2 + 10 - 10 = 5n^2 = N^3$

$5n^2$ будет, так что в его разложении количество 5 кратно 3, значит n^2 содержит в себе хотя бы 2 пятерки, то есть 6 пятерок в себе одна пятерка.

Н не равно 5, т.к. это противоречит условию ($N > 6$), то есть n^2 содержит ещё какой-то множитель ≥ 1 . В n^2 их порядку, т.е. количество множителей: 2, а также оно: 3, ведь $5n^2$ будет (только если множитель $\neq 5$). \Rightarrow Количество множителей в n^2 : 6

Возьмём минимальное $n=2$ 3 такие множители - 2.

Тогда $n=5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $5n^2 = N^3 = 20^3 = 8000$; $N=20$

* (Если множитель $\neq 5$, то n^2 -минимум 5^8 и тогда $5n^2 = 5^9 > 20^3$)

Ответ: $N_{\min}=20$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заменим $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$ на t , тогда $t \geq 0$ $|t+6| \geq |t+2x-1| + |7-2x|$
 $t+6$ - положительное число, т.е. корень - положителен и 6 положителен

Тогда есть 4 случая, где в правой части подмножества выражения либо положительных и $=0$, либо отрицательных

$$1) t+6 \geq t+2x-1+2x-7$$

$$t+6 \geq t+4x-8$$

$$4x \geq 14$$

$$x \leq 3,5$$

Также из знака подмнож. выражение следует, что:

$$t+2x \geq 1$$

$$2x > 7$$

Тогда $x \leq 3,5$ и $x \geq 3,5$,

противоречие и

такого быть не может

$$2) t+6 \geq t+2x-1+7-2x$$

$$6 \geq 6$$

из знака подмнож. выражение:

$$x \geq \frac{1-t}{2}$$

$$x \leq 3,5$$

противоречие нет

$$3) t+6 \geq 1-t-2x+7-2x$$

$$2t \geq 2-4x$$

$$4x \geq 2-2t$$

$$x \geq \frac{1-t}{2}$$

из знака подмнож. выражение:

$$t+2x \geq 1 \quad x \geq \frac{1-t}{2}$$

$$2x \leq 7$$

$$\text{тогда } x < \frac{1-t}{2} \text{ и } x \geq \frac{1-t}{2}$$

противоречие и такого быть не может

$$4) t+6 \geq 1-t-2x+2x-7$$

$$2t \geq -12$$

из знака подмнож. выражение:

$$x \geq \frac{1-t}{2}; t+2x \leq 1$$

$$x \geq 3,5$$

$$\text{тогда } t+2x \geq t+7$$

$$t+7 < 1, \text{ но такого быть не}$$

может т.к. t полож и $7 > 1$

противоречие

Значит существует только вариант с положительным подмножеством выражения.

$$t = \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 4} = \sqrt{(x-1)^2 - 4} = \sqrt{(x-1-2)(x-1+2)} = \sqrt{(x-3)(x+1)}$$

тогда по методу интервалов $\frac{-}{-1} \frac{+}{3} \frac{-}{+}$

$$(x-3)(x+1) \geq 0 \text{ тогда } x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$

ан. Продолжение \rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порта QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай, где $x \geq 3$ (и такие $x \leq 3,5$), все окна верны,
т.к. б $t+2x \geq 1$ т.к. и $2x \geq 6 > 1$
т.е. промежуток $x \in [3; 3,5]$ верен

Рассмотрим случай, где $x \leq -1$, тогда б $t+2x \geq 1$, что оно и тоже
с $t \geq 1-2x$ и левые, и правые части положительные
(t - корень, а $-2x = 2 \times 1$), значит можно возьти x в квадрат
и убрать квадратные:

$$t^2 \geq 1 - 4x + 4x^2; X^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0$ кв.чел \Rightarrow нет корней, в параболе $a = 3 > 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow график схематично такой:  , т.е. никогда не меньше 0,

значит б промежутке $(-D; -1]$ нет подходящих x и
единственный промежуток - $x \in [3; 3,5]$

Ответ: при $x \in [3; 3,5]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть самое большое значение рёбер находится в координате $(1; 1)$, тогда где соседние точки находятся либо на координатах $(0; 1)$ и $(1; 0)$, то есть стороны ромба будут параллельны осям и получится квадрат, либо в координатах $(5; 4)$ и $(4; 5)$, так как тогда одна полукрайняя треугольник параллограмма с отношением сторон $5:4:3$, если брать члены цели, и этого, 2 ромба.

Помечу координатные точки, что из самой точки, входящей в квадрат 40×40 можно построить квадрат, а из самой точки в квадрат 40×40 можно построить второй ромб. Самой точке соответствует только ромб, где координаты могут меняться вдвое больше, а другие будут ограниченными относительно длины меньшего квадрата.

Итого самой точке квадрата из неё по 1 ромбу, и самой точке квадрата 40×40 : $40^2 + 40^2$

И не забудь ромб-квадрат в четырёх, которых судя по ~~некоторым~~ ~~одним~~ из ~~каких~~ ~~доказательств~~ получается:

$$40^2 + 40^2 - 1$$

Ответ: $40^2 + 40^2 - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перенесём 2025 в правую часть N^5
по разности квадратов: $(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$

Сразу видим, что остаток при делении x на 6 будет в таком случае правое
 $\frac{19}{2^x}$, а это не целое число, хотя левое члены целые.
противоречие

Левые члены состоят только из 19 и двоек, а тогда каждое из скобок - это $19 \cdot 2^a$, а другой - 2^b , и такое число не делится

на 6 случае, если 19 содержится в большей скобке $(y+45)$
получим

$$19 \cdot 2^a = 2^b \cdot 2^c, \text{ где } 2^c - \text{разность } (\frac{y+45}{y-45})$$

тогда $19 = \frac{2^b \cdot 2^c}{2^a} = 2^{b-a-c}$, но 19 - не степень 2 - противоречие

• если же 19 - в скобке $y-45$ получим:

$$19 \cdot 2^a \cdot 2^c = 2^b; 19 = 2^{b-a-c}, \text{ такое же противоречие}$$

Значит таких x и y нет

Ответ: Нет решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ - это окружность на координатной плоскости, т.е. для формулы $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ у нас $a = b = 0$

a и $b = 0$, значит окружность центр окружности находится в точке с координатами $(0;0)$, а - радиус этой окружности.

На графике нашей окружности X kommt точки прилегающих к полуметру $[-a; a]$

Найдём X , при которых $x^2 - 6x + a$ принимает наибольшее значение:

наибольшее значение $-6x$ - при $x = \underline{-a}$, а наибольшее значение x^2 - при $x = a$ и $x = \underline{-a}$, тогда $x = -a$ - это наименьшее значение

$$\text{при } x = -a \quad x^2 - 6x + a = a^2 + 6a + a = 8$$

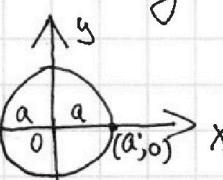
$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 8 = 81$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} = -8 ; 1$$

-8 не подходит т.к. радиус всегда положителен, остаётся $a = 1$

Ответ: $a = 1$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

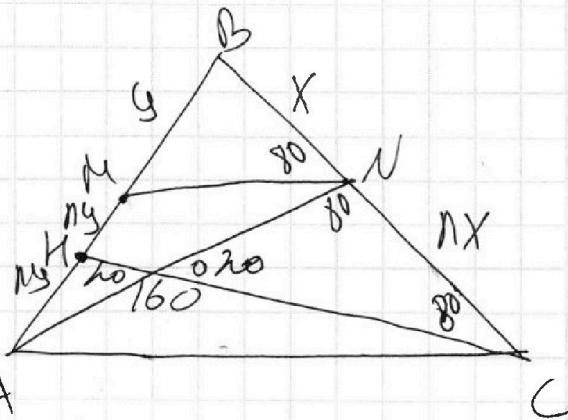
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \cdot \frac{BM}{MA}$$

Родители АМ Новосибирск
и Новосибирск отложенные

$$\frac{1}{n} \approx \frac{1}{2n}$$



$$\triangle BMN \sim \triangle HBC \text{ T.R. } \angle HBC = \angle MBN \text{ & } \frac{y}{Ng+y} = \frac{x}{Nr+x}$$

$$\text{Berga } \angle NCH = \angle BNA = 20^\circ \Rightarrow \angle NOC = 180 - 60 - 20 = 100$$

$$= \angle KOA \text{ for left. } \angle COA = 180 - 20 = 160 \text{ for clear.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

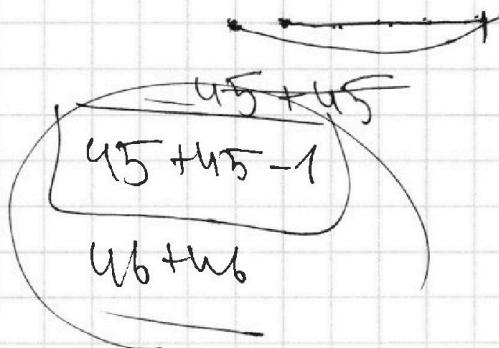
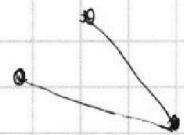
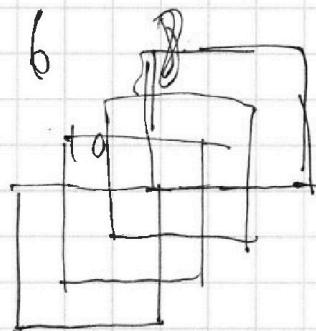
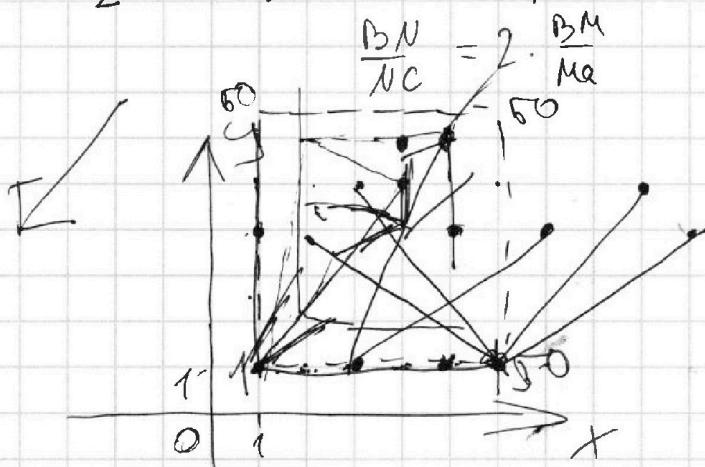
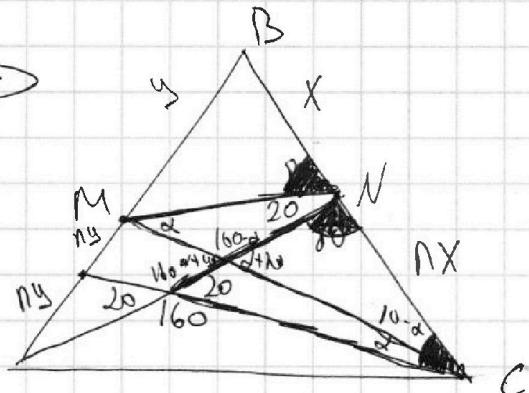
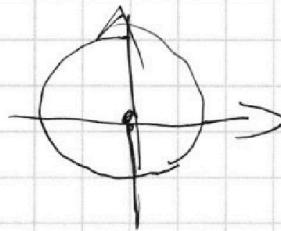
$$x = -a$$

$$a^2 + 6a + 9 = 8$$

$$q^2 + 7q - 8 = 0$$

$$D = 49 + 32 = 81$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} = 1; -8$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{-361119}{19 \cdot 179}$$

$$n! (1 + nH + (nH)(n+2)) = n! (n+2 - (nH)(n+2)) = n! (n+2)^2 - 19^2 x$$

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + \dots$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$n! (n+2)^2$$

$$\frac{19}{19^2}$$

$$\frac{19}{19^2}$$

$$19! \cdot 21^2$$

$$19! \cdot (19^2 + 2)^2$$

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 - 10 = \sqrt{3}$$

$$2n^2 + 8 + 2n^2 + 2 + n^2 = 5n^2 + 6 - 10$$

$$5 \cdot (5 \cdot 2 \cdot 2)^2$$

$$\sqrt{5n^2 + 10 - 10} = n^2 - 5n^2 - 4$$

$$\sqrt{5n^2} = n^3 \quad \frac{10^3}{5n^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{5 \cdot n \cdot n} = \frac{200}{n \cdot n} \cdot \frac{1000}{1000}$$

$$\frac{200}{n \cdot n} \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{3238}{388129}$$

$$\frac{200}{n \cdot n} \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{1000}{388129}$$

$$\frac{1000}{388129} = \frac{3238}{388129}$$

$$\frac{3238}{388129} = \frac{1000}{388129}$$

$$\frac{1000}{388129} = \frac{1000}{388129}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t+6 \geq t+2x - 1 + 7-2x \quad |) \text{ П0}$$

$$6 \geq 6$$

$$t+6 \geq -t - 2x + 1 + 2x - 7$$

$$2t \geq -6$$

$$t+6 \geq -t - 6$$

$$2t \geq -12$$

$$t \geq -6$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 8 + 1 - 4}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 - 4}$$

$$\sqrt{(x-1)(x+2)}$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} \geq 1-2x$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

$$+$$

$$\begin{aligned} X &\leq 3,5 \\ t+2x &\geq 1 \\ 2x &> 7 \end{aligned}$$

$$3) t+2x \geq 1$$

$$2x \leq 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$X \in [0; 3,5]$$

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x \geq 1$$

$$\begin{array}{r} -8-4 \\ -6-2 \\ -2-3 \\ -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8.4-5.2 \\ -2-1 \\ -1 \end{array}$$

$$2) \text{ ПП}$$

$$x \geq 0,5 - 0,5t \quad |) \quad x \leq 5 \cdot 5 \cdot 3^3$$

$$t+2x < 1$$

$$2x \leq 7$$

$$4) \text{ П0}$$

$$\frac{-2025}{25} \frac{5}{25}$$

$$\begin{aligned} t+2x &\leq 1 \\ 2x &\geq 7 \end{aligned}$$

$$x > 3,5$$

$$t+2x \geq 1$$

$$\begin{aligned} 1-t &\leq x \leq 3,5 \\ x &\in [3; 3,5] \end{aligned}$$

$$t \geq 1-2x$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$(x-3)(x+1) \geq 1-2x$$

$$x^2 - 3x - 3 \geq 1 - 2x$$

$$x^2 - x - 2 - 1 \cdot \frac{12}{2}$$

$$x^2 - x \geq 0$$

$$(x-3)(x+1) \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$x^2 - 3x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$$3x^2 - 2x + 4 \geq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 12 = 4 - 48 = -44$$

$$2 = 2 \cdot 19 \cdot 12$$

$$2a \cdot 19 = 2 \cdot 2 \cdot 19 = 76$$

$$y^2 - 45^2 - 19 \cdot 2 = 0$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2$$

$$y^2 - 45^2 = 19 \cdot 2$$

$$y^2 = 19 \cdot 2 + 45^2$$

$$y^2 = 19 \cdot 2 + 2025$$

$$y^2 = 2069$$

$$(x-3)(x+1) \geq 1-2x$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 2x + 4x^2$$

$$x^2 - 3x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 12 = 4 - 48 = -44$$

$$2 = 2 \cdot 19 \cdot 12$$

$$2a \cdot 19 = 2 \cdot 2 \cdot 19 = 76$$

$$y^2 - 45^2 - 19 \cdot 2 = 0$$

$$y^2 - 45^2 = 19 \cdot 2 + 45^2$$

$$y^2 = 19 \cdot 2 + 2025$$

$$y^2 = 2069$$

$$y^2 = 2069$$

$$y^2 - 45^2 = 19 \cdot 2 + 45^2$$

$$y^2 = 19 \cdot 2 + 2025$$

$$y^2 = 2069$$

$$y^2 = 2069$$