



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361$$

$$361 = 19^2$$

$$n! (1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) = n! (n^2 + 4n + 4) = 19 - \text{простое число}$$

$$= n! (n+2)^2$$

$n=17$ подходит

При $n < 17$ $n! \not\div 19$, т.к. n -простое

$n+2 \not\div 19$, т.к. $n+2 < 19$



$n=17$ - минимальное, подходящее n

Ответ: $n=17$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

третье

a - ~~первое~~ из посл. чисел

$$a + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = 5a^2$$

$$(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 - 10 = 5a^2 = N^3$$

Тогда $N \div 5$, но $N > 6$, так что $N \neq 5$

Пусть $N = 5x$, тогда $5a^2 = 125x^3$

$$a^2 = 25x^3$$

$a = 5\sqrt{x^3} \Rightarrow x$ - полный квадрат, т.к. $a \in \mathbb{N}$

Минимальный $x = 4$

$$38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 - 10 = 20^3 \leftarrow \text{Минимальный } N = 20$$

Ответ: $N = 20$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\sqrt{x^2-2x-3} + 6$ ^{$\sqrt{3}$} всегда $> 0 \Rightarrow$ Модуль с плюсом
Запишем $0 \leq x^2-2x-3 \geq 0 \rightarrow (x+1)(x-3) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

Рассмотрим 2 случая

$x \geq 3$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 + |7 - 2x|$$

$$7 - 2x \geq |7 - 2x|$$

$\downarrow$
 $7 - 2x \geq 0$, тогда равенство
Иначе отриц $\Rightarrow 1 \geq 0$ $\times$

$$7 \geq 2x$$

$$x \leq 3,5$$

$$\downarrow$$

 $x \in [3; 3,5]$

$x \leq -1$

$$7 - 2x > 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1$$

Аналогично следует, что $\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq 0$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1 - 2x$$

$$\begin{cases} 1 - 2x \leq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}, \text{ не подходит по условию случая} \\ x^2 - 2x - 3 \geq (1 - 2x)^2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

 $x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$$

$\downarrow$
корней нет, ветви вверх

$\downarrow$
всегда > 0

Ответ: $x \in [3; 3,5]$



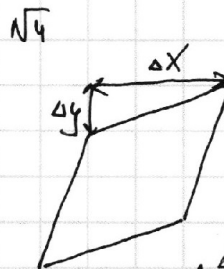
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть есть какой-то ромб:



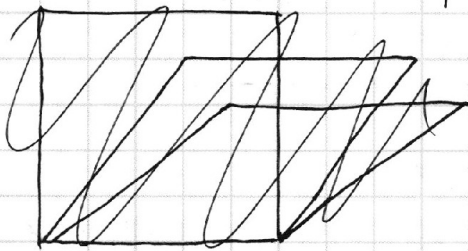
Так как координаты целые, Δx и Δy также целые

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = 5^2$$

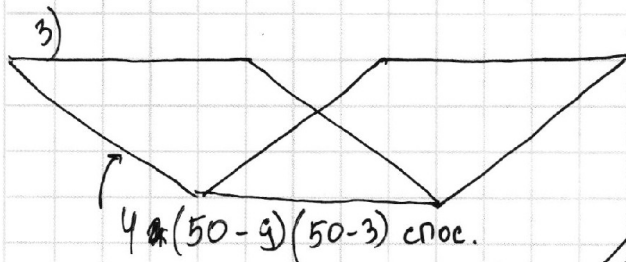
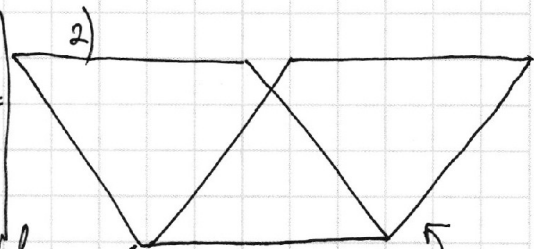
Перебором всех чисел от 0 до 5

Мы можем понять, что подойдут только пары (0;5) (5;0) (3;4) (4;3)

Теперь мы можем выбрать любые 2 пары из них и составить ромб, зарисуем все варианты:

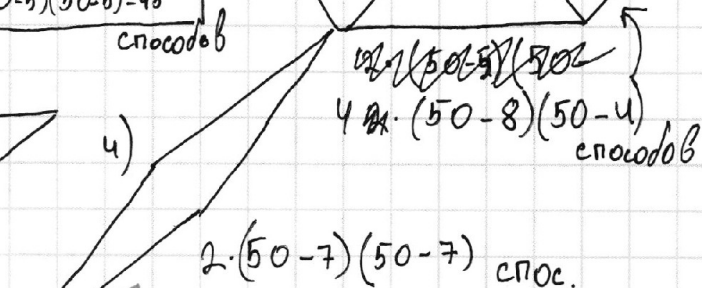


1) $(50-4)(50-4) = 46^2$ спос.
 $(50-5)(50-5) = 45^2$ спос.

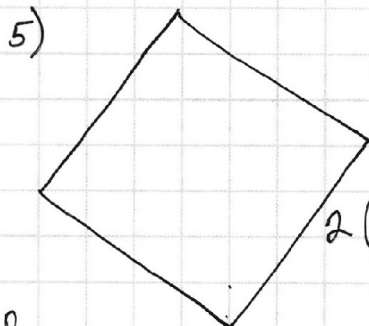


4 · (50-9)(50-3) спос.

4)



2 · (50-7)(50-7) спос.



2 · (50-7)(50-7) спос.

Пояснение, как я считал кол-во способов
Первый множитель - кол-во способов повернуть картинку получив другую

Второй и третий множитель - кол-во способов выставить вершину по x и по y , чтобы фигура полностью помещалась.

Всего $45^2 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 4 \cdot 41 \cdot 47 + 4 \cdot 43^2 = 24857$

Ответ: 24 857 способов разместить ромб



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45)$$

$$\begin{cases} y-45 = 2^a \\ y+45 = 2^b \cdot 19 \end{cases}$$

$$90 = 2^b \cdot 19 - 2^a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$\alpha > \beta$

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^b (19 - 2^{a-\beta})$$

$$\beta = 1$$

$$19 - 2^{a-1} = 45$$

$$2^{a-1} < 0 \text{ w}$$

$$y-45 = 2^a \cdot 19$$

$$\begin{cases} y-45 = 2^a \\ y+45 = 2^b \end{cases}$$

$$2^a(19-1) = 90$$

$$2^a = 5 \text{ w}$$

$\alpha < \beta$

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^b (19 \cdot 2^{b-a} - 1)$$

$$\alpha = 1$$

$$19 \cdot 2^{b-1} = 45 + 1$$

$$46 \nmid 19$$

w

$$90 = 2^b - 2^a \cdot 19$$

$\alpha > \beta$

$$90 < 0$$

w

$$\alpha = 1$$

$$2^{b-1} - 19 = 45$$

$$2^{b-1} = 64$$

$$\beta - 1 = 6$$

$$\beta = 7$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 7$$

$$x = \alpha + \beta = 8$$

$$y = 45 + 2^a = 47$$

$$y = 45 + 2^a = 47$$

Нам не важен знак $y \Rightarrow y = \pm 47$

После полного разбора случаев нашлась лишь 2 пары

Ответ: $(8; 47)$ и $(8; -47)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21
22
23
24

~~х~~ $x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow$ график явл. окр. с центром в $(0;0)$
радиуса a
 $\downarrow$

$$x^2 - 6x + a = (x-3)^2 + a - 9$$

$$x \in [-a; a]$$

максимум в наи более удаленной от $x=3$ точке, то есть
 $(x=-a) \Rightarrow (a+3)^2 + a - 9 = 8$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$a(a+8)(a-1) = 0$$

$$a = -8; a = 1$$

Ответ: $a = -8; 1$

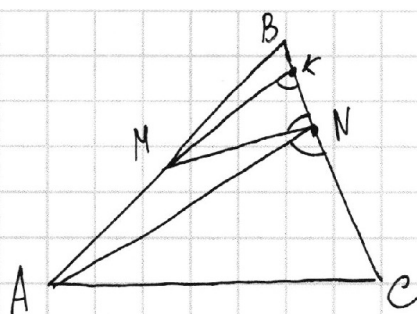


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Проведём отрезок из $M \parallel AN$
 $\angle MKN = \angle ANC = 80^\circ = \angle MNK$

$\triangle MKN - \text{p.f.}$

Пусть $BK = x$. $2BM \cdot NC = BN \cdot MA \Rightarrow \frac{2BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$

Если $\frac{BM}{MA} = k$, $\frac{BN}{NC} = 2k$, $\frac{BK}{KN} = k$ по т. Фалеса

$BK = x$ $KN = kx$ $NC = 2k(k+1)x$

$\triangle MKN - \text{p.f.} \Rightarrow MK = MN = \frac{kx}{2 \cos 80^\circ}$

$AN = k \cdot MK = \frac{k^2 x}{2 \cos 80^\circ}$

По т. косинусов $AC = \sqrt{\frac{k^4 x^2}{4 \cos^2 80^\circ} + \frac{4k^2(k+1)^2 x^2}{4} + 2 \cdot \frac{k^2 x}{2 \cos 80^\circ} \cdot 2k(k+1)x \cos 80^\circ}$

$\alpha = \angle NAC$

$\cos \alpha = \frac{AN^2 + AC^2 - NC^2}{2 \cdot AN \cdot AC} = \frac{\frac{k^4 x^2}{4 \cos^2 80^\circ} + 2k^3(k+1)x^2 - 4k^2(k+1)^2 x^2}{2 \cdot \frac{k^2 x}{2 \cos 80^\circ} \cdot AC} =$

$= \frac{\frac{k^4 x^2}{4 \cos^2 80^\circ} + 2k^3(k+1)x^2 \cos(80^\circ)}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

Ответ: $\alpha = 30^\circ$

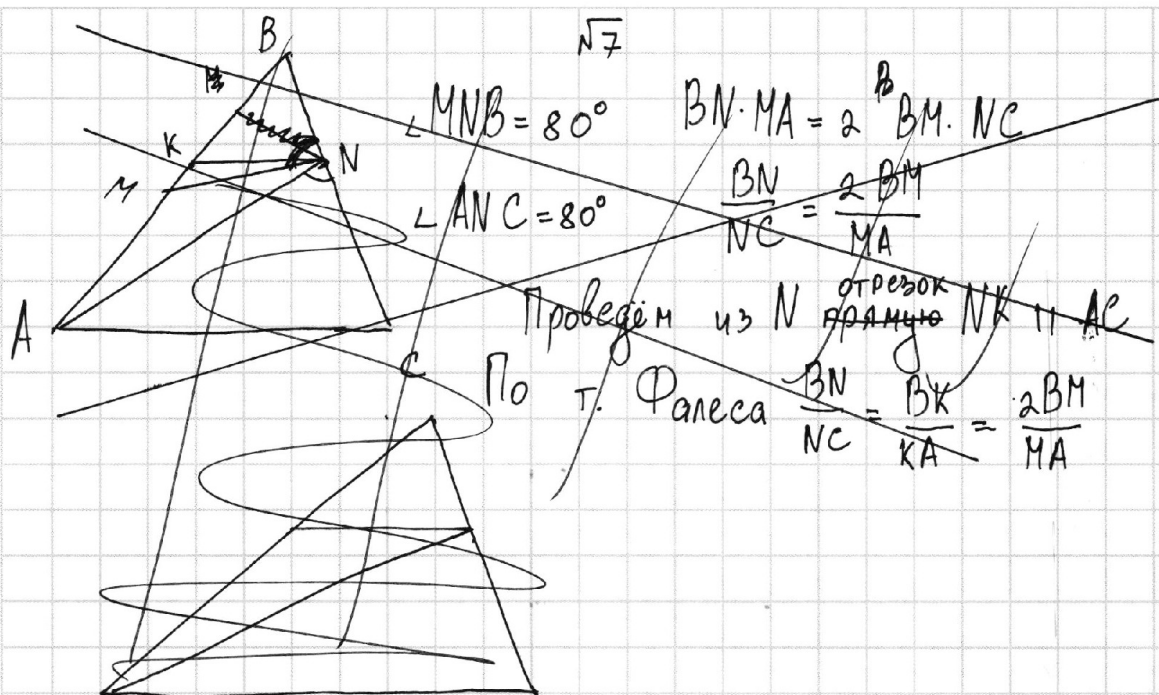


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-2x-3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7-2x|$$

Этот модуль
всегда раскроется с плюсом,
так как $\sqrt{\quad}+6 \geq 6 > 0$

ОДЗ:

$$x^2-2x-3 \geq 0$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

$$x \in [-1; 3]$$

Из ОДЗ $x \leq 3$

$$7-2x \geq 1$$

Раскроется с плюсом

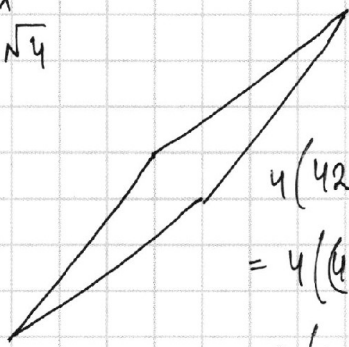
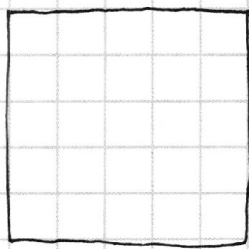
$$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + 7-2x$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1|$$

Это верно тогда, когда $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0$, тогда будет равенство

Иначе отриц $> | | > 0$ и

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x$$



$$45^2 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 4 \cdot 41 \cdot 47 + 4 \cdot 43^2$$

$$4(42 \cdot 46 + 41 \cdot 47 + 43 \cdot 43) =$$

$$= 4((44-2)(44+2) + (44-3)(44+3) + (44-1)^2)$$

$$= 4(44^2 - 4 + 44^2 - 9 + 44^2 - 87) =$$

$$= 4(3 \cdot 44^2 - 100)$$

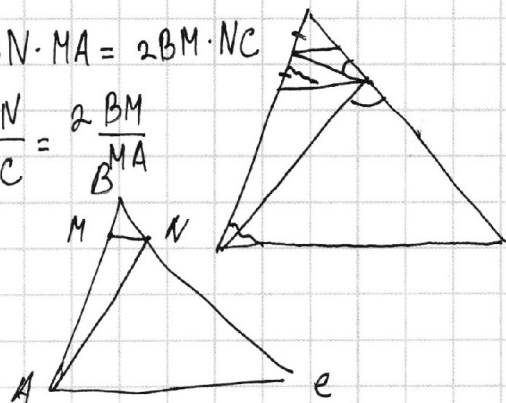
$$45^2 + 12 \cdot 44^2 - 400$$

$$45^2 + 12(45-1)^2 - 400$$

$$13 \cdot 45^2 - 12 \cdot 90 + 12 - 400$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA}$$



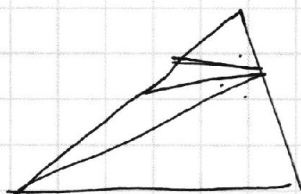
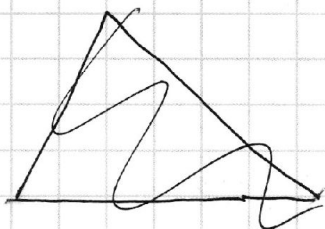


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$35^2 = 900 + 25 + 300 = 1225$$

$$\begin{cases} a = 2^\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 90 = 2^\beta \cdot 19 \end{cases}$$

$$90 = 2^\beta (2^{\alpha-\beta} + 19)$$

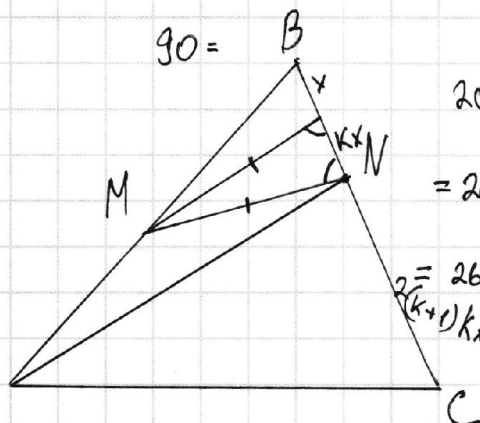
$$\alpha < \beta$$

$$90 = 2^\alpha (2^{\beta-\alpha} \cdot 19 - 1)$$

$$\frac{BN}{NC} = 2k$$

$$\frac{BM}{MA} = k$$

$$1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1} A$$



$$2025 \cdot 13 - 4(100 + 89 \cdot 3) =$$

$$= 2025 \cdot 13 - 4 \cdot 367 =$$

$$= 26000 + 325 - 1468 = 24857$$

$$\frac{kx}{2 \cos 80}$$

$$x + kx = y + 2ky$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1+2k}{1+k}$$

$$BM = \sqrt{x^2 + \frac{k^2 x^2}{4 \cos^2 80} - 2kx \cdot \cos 100}$$

$$BM = x \cdot \sqrt{1 + \frac{k^2}{4 \cos^2 80} + 2k \cdot \cos 80}$$

