



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (n-1)! + n! + (n+1)! &= (n-1)! \cdot (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n^2 + 2n + 1) = \\ &= (n-1)! \cdot (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$289 = 17^2; 17 - \text{простое число}$$

Предположим, что $n < 16$. Тогда, т.к. 17 - простое, то $(n-1)!$ не кратно 17. Т.к. $n+1 < 17$, то $(n+1)^2$ тоже не кратно 17. Значит, $(n-1)! \cdot (n+1)^2 \not\div 17$ (т.к. 17 - простое и не один из множителей не кратно 17), а следовательно не делится на 289. Значит, $n < 16$ не подходит.

$$\text{при } n=16 \quad (n-1)! + n! + (n+1)! = 15! \cdot 17^2 = 15! \cdot 289, \text{ т.о.}$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289 \Rightarrow n=16 \text{ подходит и оно наименьшее}$$

Ответ: при $n=16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Обозначим эти семь последовательных чисел как $x; x+1; x+2; x+3; x+4; x+5; x+6$. Тогда сумма их квадратов равна

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 12x + 36 = 7x^2 + 42x + 91$$

$$\text{Тогда } N^5 = 7x^2 + 42x + 91 - 28 = 7x^2 + 42x + 63 = 7(x^2 + 6x + 9) = 7(x+3)^2$$

Т.е. 7-простое число и $N^5 \div 7$, то $N \div 7$.

Рассмотрим $N \div 7$ и большие 8:

$$1) N=14. N^5 = 2^5 \cdot 7^5. 7(x+3)^2 = 2^5 \cdot 7^5$$

$$(x+3)^2 = 2^5 \cdot 7^4$$

$$x+3 = 4\sqrt{2} \cdot 49 \Rightarrow x \notin N \Rightarrow N=14 \text{ не подходит}$$

$$2) N=21. N^5 = 3^5 \cdot 7^5. 7(x+3)^2 = 3^5 \cdot 7^5$$

$$(x+3)^2 = 3^5 \cdot 7^4$$

$$x+3 = 9\sqrt{3} \cdot 49 \Rightarrow x \notin N \Rightarrow N=21 \text{ не подходит}$$

$$3) N=28. N^5 = 4^5 \cdot 7^5 = 2^{10} \cdot 7^5. 7(x+3)^2 = 2^{10} \cdot 7^5$$

$$x+3 = 2^5 \cdot 49 = 32 \cdot 49$$

$$x = 32 \cdot 49 - 3$$

$N=28$ подходит и оно наименьшее

Ответ: 28



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ: $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$ (область допустимых значений)

По свойству модуля $|a| + |b| \geq |a+b|$ для $\forall a, b \in \mathbb{R}$
 (В данном случае $a = \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$, $b = 6 - x$)
 Тогда $|\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x| =$
 $= |\sqrt{x^2 - x - 2} + 5|$

Но по условию $|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$. Значит,
 $|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x|$, т.е. $|a| + |b| = |a+b|$.

Это возможно, когда числа a и b одного знака $\Rightarrow$
 (или равны 0)

т.к. в данном случае $a+b = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 > 0$, то и числа
 a и b ($\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1$ и $6 - x$) больше (или равны) 0 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$$

(1) $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$

• если $x \geq 1$, то $1 - x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$ для $\forall x \in [1; +\infty)$

• если $x < 1$, то $1 - x > 0 \Rightarrow$ должно выполняться $x^2 - x - 2 \geq x^2 - 2x + 1$
 $x \geq 3$

но это случаи, когда $x < 1 \Rightarrow x$ не может быть $\geq 3 \Rightarrow$
 $x < 1$ не подходит

Но по ОДЗ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 6 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow$ решением
 неравенства
 является $x \in [2; 6]$

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow \text{т.к. } 23 \cdot 2^x \div 2, \text{ а } 2025 \div 2, \text{ то } y \div 2$$

$x > 0$, т.к. при $x < 0$ $23 \cdot 2^x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$, что противоречит условию,
 а при $x = 0$ $23 \cdot 2^x + 2025 = 2048 = 2^8 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$.

$$2025 = 23 \cdot 88 + 1 = 23 \cdot 11 \cdot 2^3 + 1$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = 23 \cdot 2^x + 23 \cdot 11 \cdot 2^3 + 1 = 23(2^{x-3} + 11 \cdot 2^3) + 1 = y^2$$

$$23(2^{x-3} + 11 \cdot 2^3) = (y-1)(y+1)$$

т.к. 23 - простое число, то $y \equiv \pm 1 \pmod{23}$

т.к. $2025 \div 3$, $23 \equiv 2 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ или 1 , то $23 \cdot 2^{x-3} \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x \div 2$

1) $x=1$ $23 \cdot 2 + 2025 = 2071 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x=1$ не подходит

2) $x=3$ $23 \cdot 8 + 2025 = 2209 = 47^2 \Rightarrow y = \pm 47 \Rightarrow$ подходит пара
 $(3; 47)$ и $(3; -47)$

3) $x \geq 5$. $x=3+k$, $k \geq 2$, $23(2^x + 11 \cdot 2^3) = 23 \cdot 8(2^{k-1} + 11) = (y-1)(y+1) \Rightarrow y^2 - 1 \div 8$, но не кратно 16

$y \equiv \pm 1 \pmod{8}$
 $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$ или 3 или 5 или 7 , но если $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$ или 7 , то $y^2 \equiv 1 \pmod{16}$, что невозможно $\Rightarrow y \equiv \pm 3 \pmod{8}$ или 5 . $y = 8p+3$ или $y = 8p+5$

но тогда $y^2 = 64p^2 + 48p + 9$ или $y^2 = 64p^2 + 80p + 25$, тогда
 $y^2 - 1 = 8(8p^2 + 6p + 1)$ или $y^2 - 1 = 8(8p^2 + 10p + 3)$, тогда

Ответ: $(3; -47); (3; 47)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

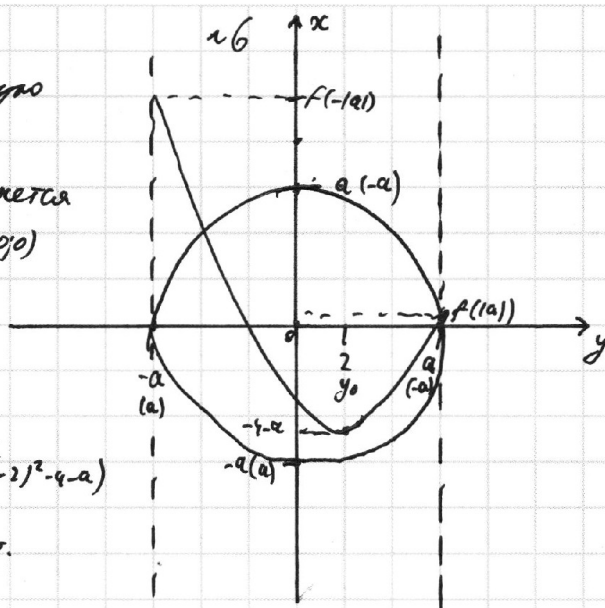
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим координатную плоскость Oxy .

Графиком $x^2 + y^2 = 1$ является окружность с центром $(0,0)$ и радиусом $|a|$.



Графиком $x = y^2 - 4y - a$
 $x = (y-2)^2 - 4 - a$
 $(Ay) = (y-2)^2 - 4 - a$
 является парабола с
 ветвями вверх (к положительн.
 направл. оси Ox) и
 y_0 (ордината вершины) $= 2$

Соответственно, на промежутке $[-|a|, |a|]$ наибольшее значение $x = (y-2)^2 - 4 - a$ должно быть 6. Т.к. $y_0 > 2$, то $f(|a|) < f(-|a|) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ наибольшее значение будет в точке с ординатой $-|a|$. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow f(-|a|) = 6$

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(-a) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 + 3a - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ a = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

Ответ: $a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ и $a = -1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

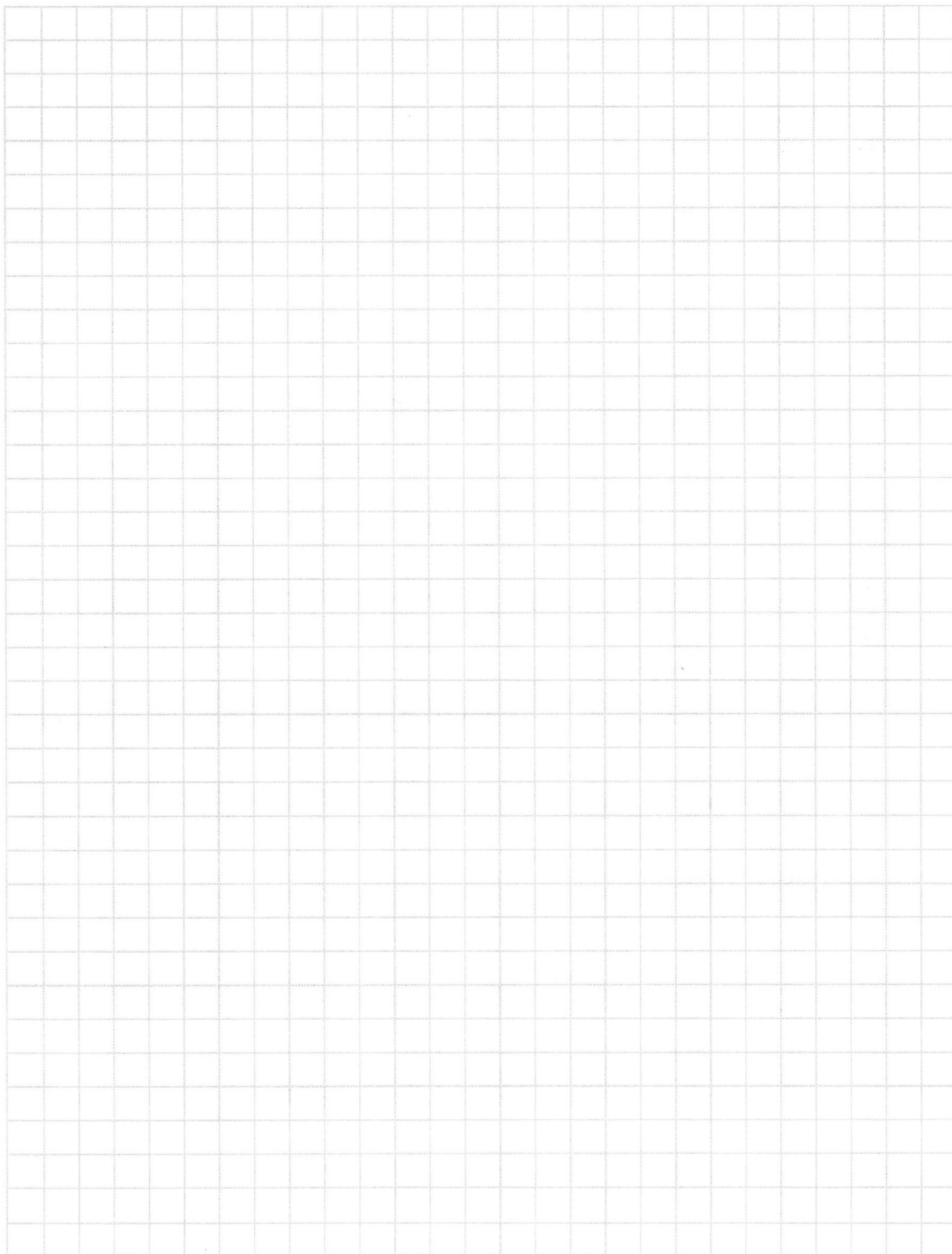
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(n-1)! \cdot (1+n+n(n+1))}{1+n+n^2+n} : 17^2$$

$$\frac{(n-1)! \cdot (n+1)^2}{17^2} : 17^2$$

$$n=16$$

$$15! \cdot 17^2 : 17^2 \checkmark$$

$$n < 16?$$

$$(n-1)! \cdot 17^2$$

$$n+1 < 17 \Rightarrow (n+1)^2 : 17$$

$$x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 12x + 36 =$$

$$7x^2 + 42x + 91$$

$$7x^2 + 42x + 63 = 17^5$$

$$7(x^2 + 6x + 9) = 17^5 \cdot 23$$

$$7(x+3)^2 = 17^5$$

$$23 \cdot 2^x \cdot (2^k - 1) + 17 = 17^5$$

$$(x+3)^2 = 25 \cdot 17^4$$

$$(x+3)^2 = 4^5 \cdot 17^4$$

$$x+3 = 49 \cdot 32$$

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

$$13 + 1 - 21 = 5$$

$$13 - 21 = 1$$

$$|x^2 - x - 2 + x - 1| + |6 - x| \geq |x^2 - x - 2 + 5|$$

$$6 - x \geq 0$$

$$x \leq 6$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x^2 - x - 2 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$3x \geq 3$$

$$x \geq 1$$

$$x \geq 1$$

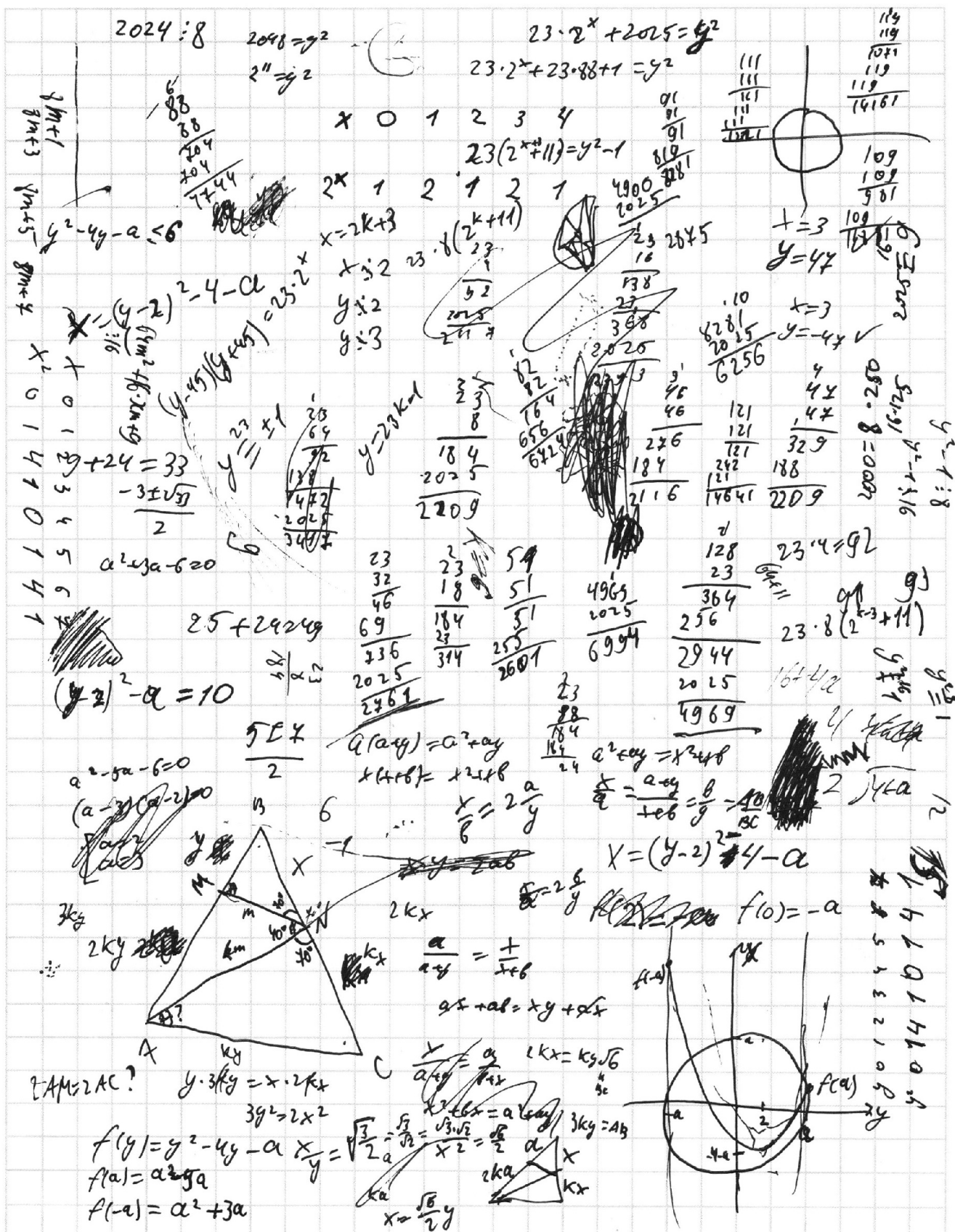
$$x \leq -1$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x \leq -1$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	1	4	0	7	7	0	4	1
2x	0	2	4	8	7				





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

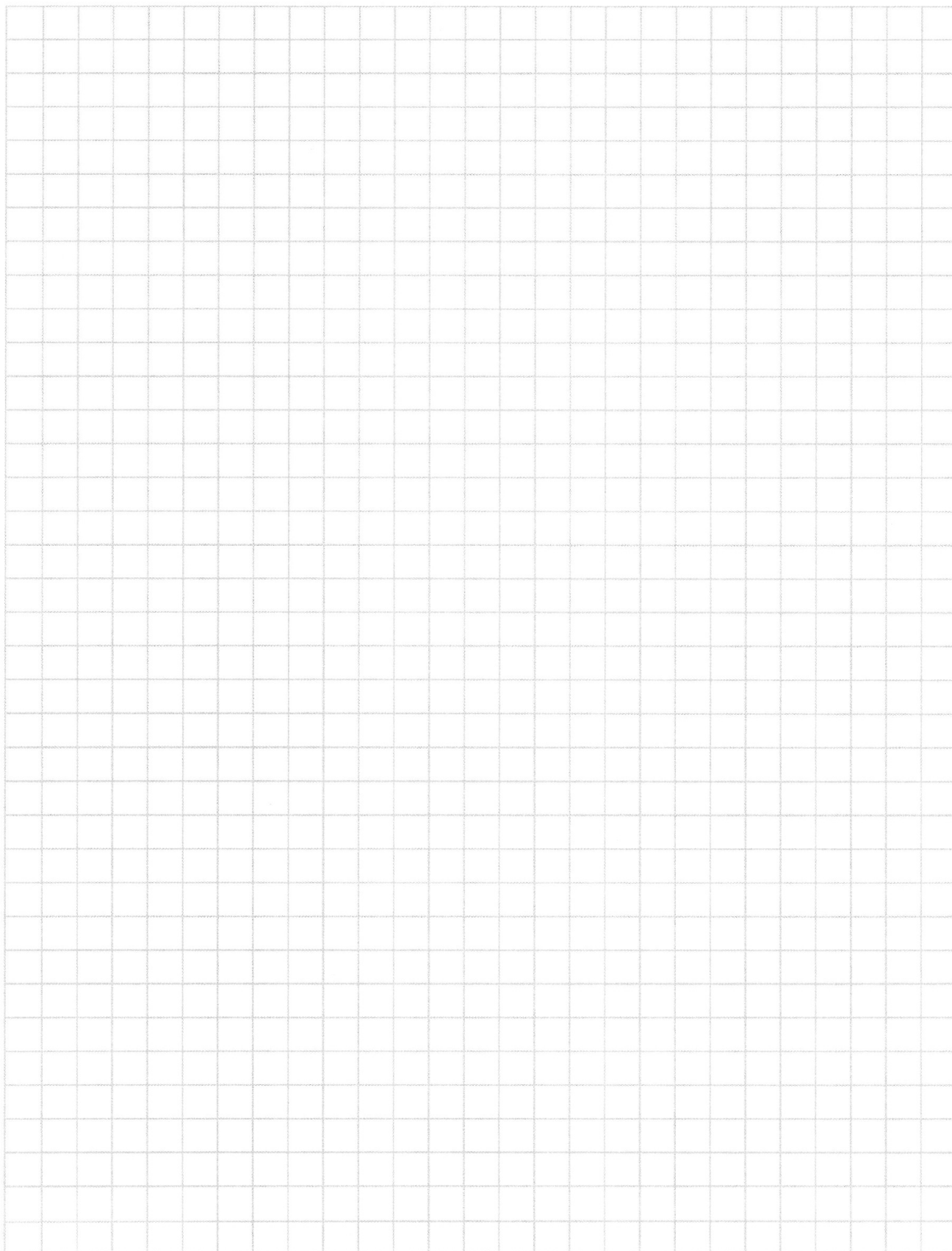
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

