



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 n! + (n+1)! + (n+2)! &= n! + n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= n! + n! \cdot n + n! + n! (n^2 + 3n + 2) = \\
 &= n! + n! \cdot n + n! + n! \cdot n^2 + n! \cdot 3n + n! \cdot 2 = \\
 &= n! \cdot n^2 + 4n! + 4n! \cdot n = n! (n^2 + 4n + 4) = \\
 &= \frac{n! (n+2)^2}{361 = 19 \cdot 19} : 19^2 \Rightarrow \begin{cases} n! : 19^2 \\ (n+2)^2 : 19^2 \Leftrightarrow n+2 : 19, \text{ т.к. } 19 - \text{пр.ч.} \\ n! : 19 \\ n+2 : 19 - \text{по } 2\text{О уже достаточное условие, т.к. делимость } (n+2)^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [n! : 19^2] &\Leftrightarrow n \geq 38 \text{ (т.к. среди чисел } 1 - n \text{ достаточно } 2 \text{ раза } 19) \\
 [(n+2)^2 : 19] &\Leftrightarrow n+2 : 19 \Leftrightarrow n+2 \equiv 17 \pmod{19} \Leftrightarrow n \geq 17
 \end{aligned}$$

Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы можем представить наши числа как

$$a-2, a-1, a, a+1, a+2$$

а их сумма ~~к~~ квадратов:

$$(a^2 - 4a + 4) + (a^2 - 2a + 1) + a^2 + (a^2 + 2a + 1) + (a^2 + 4a + 4) = 5a^2 + 10$$

$$\Rightarrow \text{их сумма квадратов} - 10 : (5a^2 + 10) - 10 = 5a^2 = N^3 \Rightarrow N^3 : 5 \Rightarrow N : 5, \text{ но } N > 5, \text{ соотв-но оно составное } (\neq 5 \text{ и } : 5) \Rightarrow N = 5 \cdot k$$

в кубе nat. числа k имеем минимум $\min 3$. пусть, a соотв-но, т.е. $N^3 : 125$, $a : 5$.

пусть, $a = 5k$

$$5a^2 = 125k^2, \text{ т.е. } k^2, \text{ тогда тоже куб и оно тоже}$$

$$\text{nat. числа } \neq 1, \text{ т.е. } 125k^2 = 125 = 5^3, 5 < 6$$

$$\Rightarrow k \min 2^3 \quad k \geq 8$$

$$a = 40 \Rightarrow 5a^2 = 8000 = 20^3$$

Ответ: 20.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

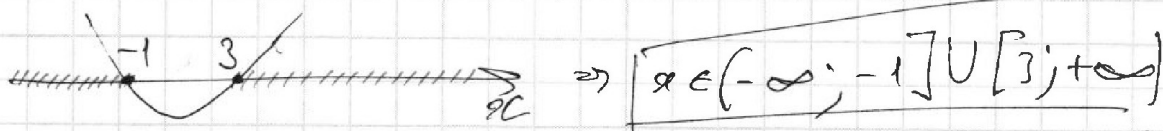
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Будем решать для всех допустимых значений x (а как по-другому?)

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$ всегда > 0 . $\rightarrow$ модуль выражения равен самому выражению.

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) \geq 0$$



3) $2x - 1$ тогда всегда

$4 - 2x$ тогда всегда > 0 .

если $x \geq 3,5$

$$6 \geq 2x - 1 + 2x - 4.$$

$$6 \geq 4x - 3 \quad x \leq 3,5 \rightarrow \text{и}$$

$$\text{или } 4x \leq 14$$

4) I. если $x \geq 3$

$$2x - 1 > 0$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1$$

«все выражения»:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 4 - 2x$$

$$0 \geq 0 \quad x - \text{любой.} \in [3; 3,5)$$

II. если $x \leq -1$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

т.к. $1 - 2x \geq 0$. и $\sqrt{\quad} \geq 0$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$0 \geq 3x^2 - 2x + 4, \text{ т.к. } x < 0. \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 = 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

наше н-во: $(x \leq -1)$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq \frac{1 - 2x}{\geq 0}$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$0 \geq 3x^2 - 2x + 4. - \text{нет решений, т.к.}$$

$$\text{при } x \leq -1, \underline{3x^2 - 2x + 4 > 0}$$

$$\text{Ответ: } x \in [3; \infty).$$



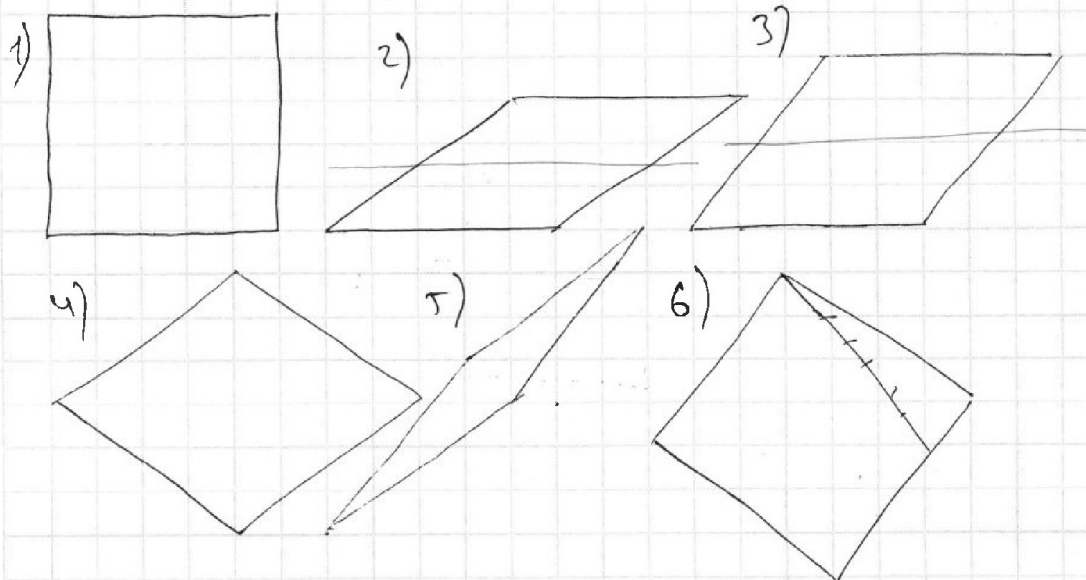
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представлены также 6 видов ромбов (или перевернуты и повороты):



Все они ^{одно} задаются прямоугольником соотв-но:

1) 5×5 ; 2) 9×3 ; 3) 8×4 ; 4) 8×6 ; 5) 5×4 ; 6) 7×4 .

получается, нужно учесть сколько ^{способов} можно ^{способ} пойти ^{способ} расположить указанные выше прямоугольники в квадрате 49×49

$$\begin{aligned}
 &1) \quad 45 \times 45 \text{ способов (он однозначно определяется)} \\
 &2) \quad 48 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 2 = \left. \begin{array}{l} \text{поворот} \\ \text{симметрии} \\ \text{отн. осей} \end{array} \right\} 45^2 + 41 \cdot 44 \cdot 4 + 42 \cdot 46 \cdot 4 + \\
 &3) \quad 42 \cdot 46 \cdot 2 \cdot 2 = \left. \begin{array}{l} \text{поворот} \\ \text{симметрии} \\ \text{отн. осей} \end{array} \right\} 42^2 + 42 \cdot 44 \cdot 2 + 43^2 \cdot 2 + 43^2 = \\
 &4) \quad 42 \cdot 44 \cdot 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{поворот} \\ \text{симметрии} \\ \text{отн. осей} \end{array} \right\} = 43^2 \cdot 3 + 42 \cdot 29 \cdot 2 + 164 \cdot 47 + 45^2 \\
 &5) \quad 43 \cdot 43 \cdot 2 \\
 &6) \quad 43 \cdot 43
 \end{aligned}$$

Ответ: $43^2 \cdot 3 + 42 \cdot 29 \cdot 2 + 164 \cdot 47 + 45^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{19 \cdot 2^x}_{\text{четное}} + \underbrace{2025}_{\text{нечетное}} = y^2$$

нечетное $\Rightarrow y$ - нечетный

можно сразу сказать, что т.к. y - четное, x тоже ≥ 0 .

$$19 \cdot 2^x + 45^2 = y^2 \Leftrightarrow 19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$\begin{cases} y - 45 = 2^x \\ y + 45 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 45 = 2^x \\ y + 45 = 19 \\ y - 45 = 19 \\ y + 45 = \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 45 = 2^k \\ y + 45 = 19 \cdot 2^{x-k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2^{x-k} \\ y + 45 = 2^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2^{x-k} \\ y + 45 = 2^k \end{cases}$$

$$19 \cdot 2^{x-k} - 2^k = 2^{x-k} (19 - 2^{2k-x}) = 90$$

$\downarrow$ м.н. 2^{x-k} - четное $\downarrow$ м.н. 2^k - четное неч.

$x \geq k \geq 0$.

$$2^k - 19 \cdot 2^{x-k} = 2^{x-k} (2^{2k-x} - 19) = 90$$

неч.

$$90 = 2 \cdot 45 \Rightarrow 2^{x-k} = 2 \quad x = k + 1$$

$$2^{x-k} = 19 + 45$$

$$\begin{cases} 2^{2k-x} = 64 \Rightarrow 2k-x = 6 \\ 2^{x-k} = 2 \Rightarrow x = k+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x-k} = 2 \Rightarrow x = k+1 \\ 2^{2k-x} = 64 \Rightarrow 2k-x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k - x \\ 2k - x = 6 \end{cases}$$

$$19 - 2^{2k-x} < 45 \text{ - не невы-}$$

числен, т.к. $2^{x-k} \geq 0$.

$$k = 4 \Rightarrow x = 5$$

$$|y| = 173$$

$$\text{Ответ: } (8; 173); (8; -173)$$

8-7 не выходи

$\Rightarrow y \neq 45 \Rightarrow y \neq 90 \Rightarrow y \neq 45$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

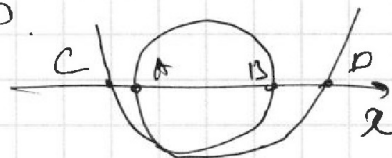
1) $x^2 + y^2 = a^2$ - окружность с центром в т. $(0; 0)$ и радиусом $|a|$, т.е. $-|a| \leq x \leq |a|$

2) выражение $x^2 - 6x + a$ не зависит от y , значит

мы просто должны решить его при всех возможных значениях x .

$$x^2 - 6x + a \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + a - 8 \leq 0.$$

найдем корни.



$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 8) = 36 + 32 - 4a = 68 - 4a$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{68 - 4a}}{2} = 3 \pm \sqrt{17 - a}$$

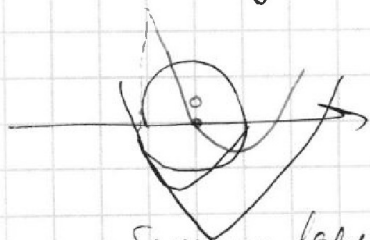
Получается нужно, чтобы все точки $-|a| \leq x \leq |a|$, лежали в промежутке $[3 - \sqrt{17 - a}; 3 + \sqrt{17 - a}]$

$$\underbrace{-|a|}_{\text{отриц.}} > \underbrace{3 - \sqrt{17 - a}}_{\text{отриц.}}$$

и один из концов отрезка AB совпадет с одной из точек с мин. y тогда задача будет достигнута $= 8$

$x^2 - 6x + a - 8$ - парабола, полученная из параболы

$x^2 - 6x$ с нулями 0 и 6 , смещенная на $a - 8$ ед. $\downarrow$



тогда еще корни смещенной параболы x_1 и x_2 должны:

$$x_1 \leq -|a|; x_2 \geq |a|, \text{ и } x_1 \neq x_2.$$

а поскольку вершина параболы ≥ 0 достигнута только значением $x_1 \leq -|a|$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



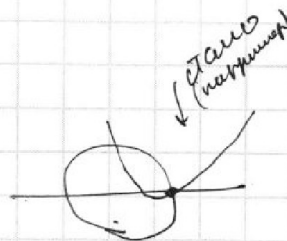
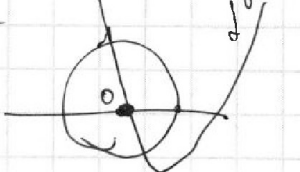
СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

условие $x, \bar{x} = -|a|$ равносильно условию

$f(-|a|)$ у параболы $y^2 = 6x$, $\leq |a-8|$

$$a^2 + 6|a| \leq |a-8|$$



I) $a=0$. нет решений.

II) $a \neq 0$ $f(-|a|) = |a-8|$ ($f(x) = x^2 - 6x$) $\leq a-8$.

$a^2 + 6|a| = |a-8|$ - тут перебором можно сразу увидеть, $\Rightarrow a-8 > 0 \Rightarrow a > 8$

$$a^2 + 6|a| = a-8$$

$$a^2 + 6a = a-8 \Leftrightarrow a^2 + 5a + 8 = 0 \Leftrightarrow D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 8 < 0$$

$$III) f(|a|) = a-8 \Leftrightarrow |a-8| = a-8$$

$a \geq 8$
 $a-8 \geq 0$ и т.п. перебором можно увидеть.

$$a^2 + 6|a| = a-8$$

$$1) a < 0: a^2 - 6a = 8-a \quad a^2 - 5a - 8 = 0 \quad D = 25 + 32 = 57$$

$$2) a > 0: a^2 + 6a = 8-a$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$$

$$D = 49 + 4 \cdot 1 \cdot 8 = 81$$

$$a = \frac{-4 \pm 9}{2} \quad a = 1$$

$$\text{Ответ: } a = 1; a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$



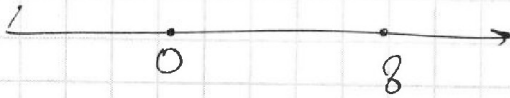
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 6|a| = -(b-a)$$



1) $a < 0$: $a^2 - 6a = b - a$ a

2) $b > a \geq 0$ $a^2 + 6a = -b + a$

$$a^2 + 5a + b = 0 \quad \Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot b < 0$$

нет. реш.

3) $a \geq b$ $a^2 + 6a = (a - b)$

$$a^2 + 6a = b - a$$

$$a^2 + 7a - b = 0 \quad \Delta = 49 + 81$$

$$a = \frac{-7 \pm \sqrt{120}}{2}$$

$a = 1$, т.к. $a \geq 0$,
то $b < b \Rightarrow$ не.

Ответ: $a = \frac{5 - 2\sqrt{14}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

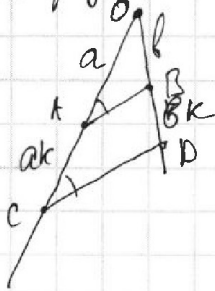


СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Докажем lemma: Если на одной стороне от его вершин последовательно отрезки a и ak , а на другой b и bk , то прямые, проводящие через соответствующие концы этих отрезков параллельны:



$AB \parallel CD$.

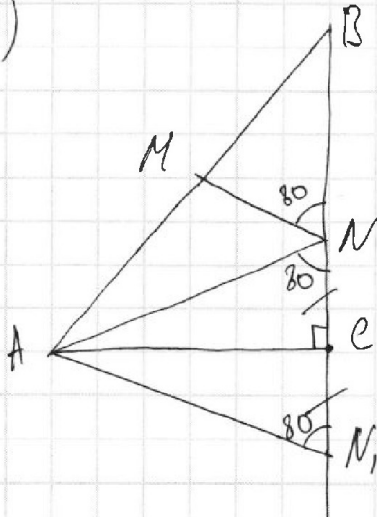
$$1) \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{b}{b+bk} = \frac{1}{1+k}.$$

$$\frac{a}{a+ak} = \frac{a}{a(1+k)} = \frac{1}{1+k} //$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \angle OAB = \angle OCD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB \parallel CD.$$

2)



$$1) BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}.$$

$$2) N_1 \text{ на } BC: CN = CN_1, \text{ и } N_1 \neq N.$$

$$\Rightarrow 2NC = NN_1,$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NN_1} = \frac{BM}{MA} \Rightarrow \text{по доказанной лемме,}$$

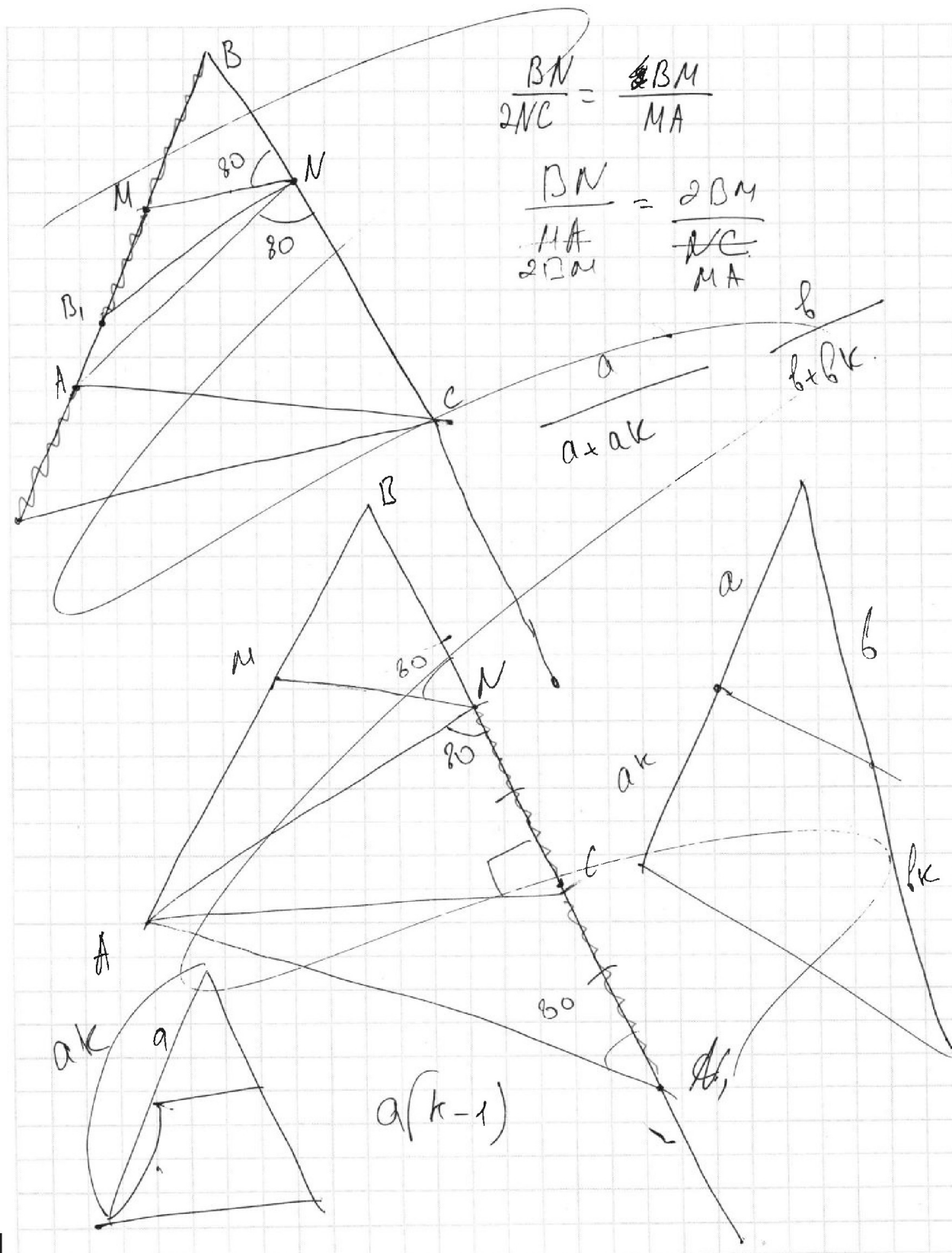
$$AN_1 \parallel MN \Rightarrow \angle BAN_1 = \angle BMN =$$

$$= 80^\circ \Rightarrow \triangle N_1AN - \text{н/б} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } C - \text{сер. } NN_1, AC \perp NN_1,$$

$$\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ \Rightarrow \angle CAN = 180 - \angle CN_1A - \angle ACN = 10^\circ.$$

Ответ: 10° .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

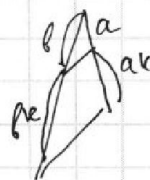
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b}{b(1+k)} = \frac{a}{a(1+k)}$$

$$\frac{a}{a(1+k)} =$$