



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



✕ [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?

✕ [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .

✕ [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

✕ [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.

✕ [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad (n-1)! + n! + (n+1)! : 289.$$

Заметим, что $289 = 17^2$, где 17 — простое.

$$\begin{aligned} (n-1)! + n! + (n+1)! &= (n-1)! \cdot (1 + n + n(n+1)) = \\ &= (n-1)! \cdot (1 + 2n + n^2) = (n+1)^2 (n-1)! : 289 \end{aligned}$$

Тогда пусть $n < 16$, тогда $0 < n+1 < 17 \Rightarrow (n+1) \not\div 17$

а значит и $(n+1)^2 \not\div 17$ т.к. 17 — простое
тогда и $(n+1)^2 \not\div 17^2$.

Значит $(n-1)! : 289 = 17^2$, раз $(n+1)^2 \not\div 17$

тогда раз 17 — простое, то $n-1 \geq 17$
потому что иначе в разложении $(n-1)!$ на
простые не встретится 17 вообще
т.е. $n \geq 18$, но мы предположили, что $n < 16$ (!!)

Значит $n \geq 16$ — оценка.

Пример $n = 16$:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 (n-1)! &= (16+1)^2 \cdot (16-1)! = \\ &= 17^2 \cdot 15! : 17^2 = 289. \end{aligned}$$

Ответ: $n = 16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть $a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3$ — эти семь
 последовательных натуральных чисел, т.е. $a \in \mathbb{N}$
 $(a-3) \in \mathbb{N}$

Тогда $(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 - 28 = N^5$
 где $N \in \mathbb{N}$.



$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 - 28 = N^5$$



$$7a^2 + 2 \cdot (9 + 4 + 1) - 28 = N^5 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) 7a^2 + 28 - 28 = N^5 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) 7a^2 = N^5$$

$$N^5 : 7 \Rightarrow N : 7$$

т.к. 7-простое

тогда $N : 7$ и $N > 0$ $\Rightarrow N \geq 7$ — оценка
 $(N \in \mathbb{N})$

Пример: $N = 7$; $a = 49$: тогда числа:
 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52

$$7a^2 = 7 \cdot (49)^2 = 7 \cdot (7^2)^2 = 7 \cdot 7^4 = 7^5$$

$$\text{и } N^5 = 7^5 = 7a^2 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) (46)^2 + 47^2 + 48^2 + 49^2 + 50^2 + 51^2 + 52^2 - 28 = 7^5$$

Ответ: $N = 7$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x| \quad - \text{ по условию}$$

$$\left] \begin{aligned} a &= 6-x; \quad b = \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \end{aligned} \right., \quad \text{тогда}$$

Заметим, что $a+b = \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x = \sqrt{x^2-x-2}+5.$

тогда $|a+b| \geq |a|+|b| \quad - \text{ по условию.}$

Но $|a+b| \leq |a|+|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Докажем это:

$$0 \leq |a+b| \leq |a|+|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

тогда

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \\ &(a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2 \end{aligned}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2|ab|$$

$$2ab \leq 2|ab|$$

$$ab \leq |ab| \quad - \text{ верно } \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

тогда

$$\begin{cases} |a+b| \leq |a|+|b| \\ |a+b| \geq |a|+|b| \end{cases} \Rightarrow |a+b| = |a|+|b|$$

т.е. $|\sqrt{x^2-x-2}+5| = |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$

$$|(6-x)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1)| = (6-x)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1) \quad \{ |ab| = ab \}$$

тогда $x^2-x-2+25+2 \cdot 5 \sqrt{x^2-x-2} = 36-12x+x^2+x^2-x-2+$
 $+x^2-2x+1+2(x-1)(\sqrt{x^2-x-2})+2(6-x)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1)$

$$10\sqrt{x^2-x-2} = 12-12x+x^2+x^2-2x+2(x-1)(\sqrt{x^2-x-2})+2(6-x)(\sqrt{x^2-x-2})+2(6-x)(x-1)$$

$$\sqrt{x^2-x-2}(10-2x+2-12+2x) = 12-14x+2x^2-12+12x+2x-2x^2$$

$$0=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но при этом $\sqrt{x^2 - x - 2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Значит $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 две вершины ромба, соединённых
сторонами ромба. их координаты —
 $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ соответственно.

При этом $y_2 \geq y_1$ не уменьшая общности.

Тогда $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 5^2$ — т.к. длина
стороны любого ромба, рассматриваемого нами — 5.

Тогда по условию $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 \in \mathbb{Z}$ и $(y_2 - y_1)^2 \in \mathbb{Z}$.

Тогда $\exists (x_2 - x_1) = a; y_2 - y_1 = b \geq 0$

$a^2 + b^2 = 5^2$ — имеет всего 12

решений в $\mathbb{Z}$.

Эти решения:

$$\begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases} \begin{cases} a=0 \\ b=-5 \end{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases} \begin{cases} a=-5 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases} \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases} \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases} \quad \text{при этом } b \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нам подходят всего 7 из них:

$$\begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases} \begin{cases} a=-5 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

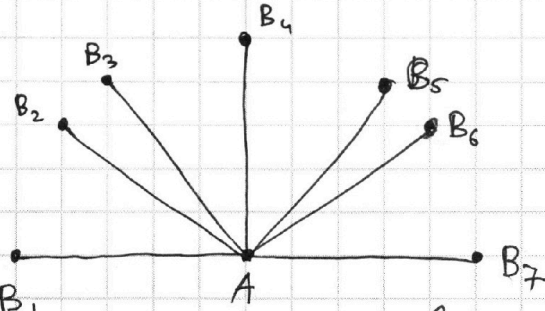
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда если $A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$, то
всего будет 7 видов сторон ромба:



B_i - положение B

однозначно. Всего среди всех ромбов со стороной 5 и с вершинами в узлах координатной сетки как мы выяснили будет только 7 различных видов сторон.

Значит посчитать кол-во ^{разных} ромбов можно, ~~то~~ посчитав кол-во способов выбрать различные пары соседних сторон для ромба.

Тогда A - общая вершина ^{этих} соседних сторон ромба, а B_i и B_j - расположение вторых концов сторон ромба.

Т.е. мы считаем кол-во пар (B_i, B_j) при которых образуются разные ромбы. ($i < j$)

Тогда заметим, что ~~эти~~ пары $(B_1; B_4)$ и $(B_4; B_7)$ дают один и тот же вид ромба - квадрат; пара $(B_1; B_7)$ вместо ромба даёт отрезок, поэтому её тоже не учитываем.

А также ~~любые~~ любые две пары вида

$(B_1; B_j)$ и $(B_j; B_7)$ дают один и тот же ромб, потому что образуют смежные углы $\rightarrow$ углы ромба будут совпадать.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при этом пары $(B_i; B_j)$ и $(B_{8-i}; B_{8-j})$

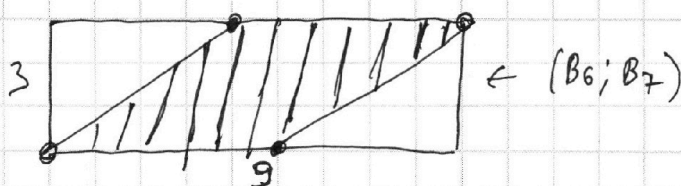
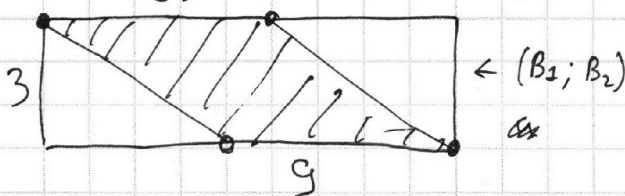
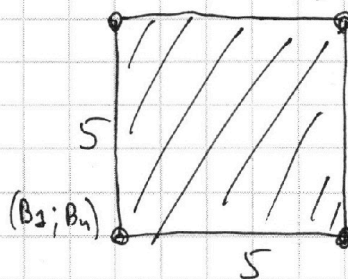
будут давать различные ромбы, ~~но~~ хотя и равные, потому что их не получится совместить наложением, необходима еще и осевая симметрия.

Итого validными считаются такие пары:

- $(B_1; B_4)$ $(B_4; B_5)$ $(B_2; B_6)$
- $(B_1; B_2)$ $(B_4; B_6)$ $(B_3; B_5)$
- $(B_1; B_3)$ $(B_5; B_6)$ $(B_3; B_6)$
- $(B_2; B_3)$ $(B_5; B_7)$ $(B_2; B_5)$
- $(B_2; B_4)$ $(B_6; B_7)$
- $(B_3; B_4)$

Всего 15 различных видов ромбов.

Тогда поместим каждый из этих ромбов в прямоугольник, касающийся вершин ромба и имеющий стороны, параллельные координатным осям. Получатся следующие прямоугольники:



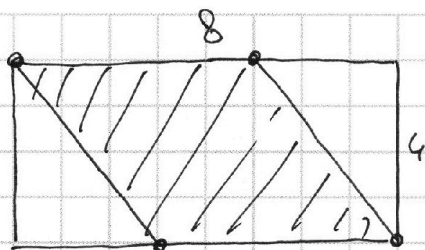


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

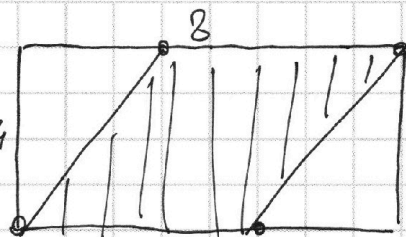
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 6

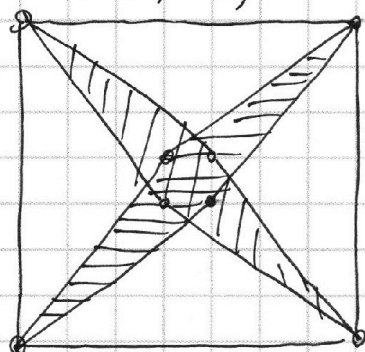
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$(B_1; B_3)$

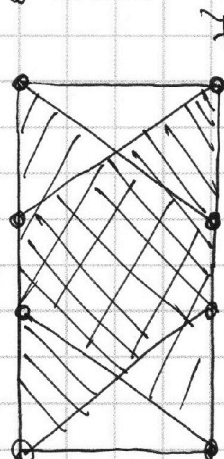


$(B_5; B_7)$

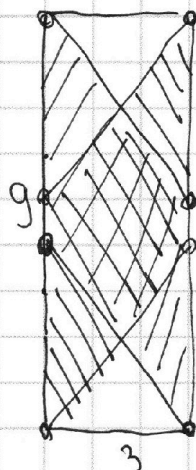


7

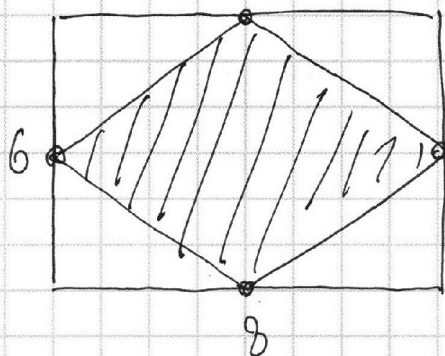
гла $(B_2; B_3)$ и $(B_5; B_6)$



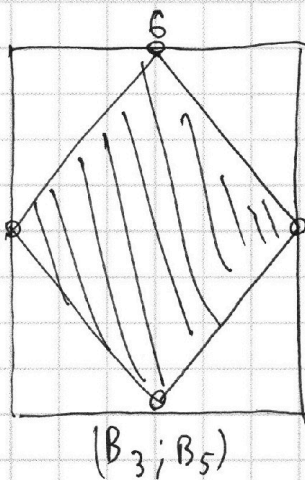
гла $(B_2; B_4)$ и $(B_4; B_6)$



гла $(B_3; B_4)$ и $(B_4; B_5)$



$(B_2; B_6)$



$(B_3; B_5)$

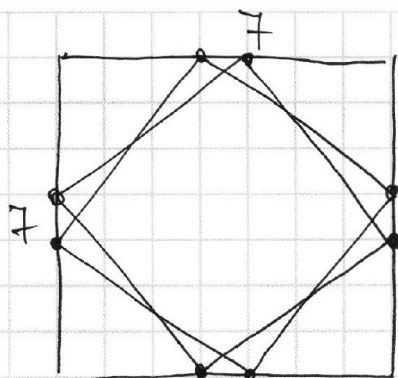


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



← где $(B_3; B_6)$ и $(B_2; B_5)$

Тогда кол-во ромбов данного вида = кол-ву прямоугольников, куда их можно вписать, расс-

ложенных в квадрат 44×44 — по условию.

Тогда в квадрат 44×44 можно расположить квадратов 5×5 равно ~~44~~ $(44 - (5 - 1)) \cdot (44 - (5 - 1)) = 40 \cdot 40 = 1600$ способами $\Rightarrow$ 1600 ромбов вида $(B_1; B_4)$.

Аналогично посчитаем кол-во ромбов каждого вида:

$$(B_1; B_2) \rightarrow (44 - (9 - 1)) \cdot (44 - (3 - 1)) = 36 \cdot 42$$

$$(B_6; B_7) \rightarrow 36 \cdot 42$$

$$(B_1; B_3) \rightarrow (44 - (8 - 1)) \cdot (44 - (4 - 1)) = 37 \cdot 41$$

$$(B_5; B_7) \rightarrow \cancel{37 \cdot 41}$$

$$(B_2; B_3) \rightarrow (44 - (7 - 1)) \cdot (44 - (7 - 1)) = 38 \cdot 38$$

$$(B_5; B_6) \rightarrow 38 \cdot 38$$

$$(B_2; B_4) \rightarrow 37 \cdot 41$$

$$(B_3; B_6) \rightarrow 38 \cdot 38$$

$$(B_4; B_6) \rightarrow 37 \cdot 41$$

$$(B_2; B_5) \rightarrow 38 \cdot 38$$

$$(B_3; B_4) \rightarrow 36 \cdot 42$$

$$(B_4; B_5) \rightarrow 36 \cdot 42$$

$$(B_2; B_6) \rightarrow (44 - (6 - 1)) \cdot (44 - (8 - 1)) = 39 \cdot 37$$

$$(B_3; B_5) \rightarrow 37 \cdot 39$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
6 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого всего

$$1600 + 4 \cdot 36 \cdot 42 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 4 \cdot 38^2 + 2 \cdot 39 \cdot 37$$

ромбов

$$= 1600 + 6048 + 6068 + 5776 + 5772 =$$

$$= 1600 + 12116 + 11548 = 25264$$

Ответ: 25264 ромбов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Покажем, что $x \in \mathbb{N}$ и $x \not\equiv 2$. $\lfloor x, y \in \mathbb{Z} - \text{но у нас}$

$$x \quad 2^n \bmod 3 : \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \nexists k \in \mathbb{N} : \begin{cases} n = 2k-1 \\ n = 2k \end{cases}$$

$$1) \quad n = 2k-1 : \quad 2^n = 2^{2k-1} \equiv_3 2^{2 \cdot (k-1) + 1} \equiv_3 2 \cdot (2^2)^{k-1} \equiv_3 2 \cdot 4^{k-1} \equiv_3 2 \cdot 1^{k-1} \equiv_3 2$$

$$2) \quad n = 2k : \quad 2^n = 2^{2k} \equiv_3 (2^2)^k \equiv_3 4^k \equiv_3 1^k \equiv_3 1$$

Тогда если $x \not\equiv 2$, то $2^x \equiv_3 1$; $23 \equiv_3 2$

$$2025 \equiv_3 0$$

$$\text{тогда } y^2 = 2025 + 23 \cdot 2^x \equiv_3 0 + 1 \cdot 2 \equiv_3 2$$

$$(?!)\quad \text{т.к.} \quad y^2 \equiv_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall y \in \mathbb{N}.$$

Значит $x \not\equiv 2$

$$\text{если } x < 0, \text{ то } \cancel{23} \quad 23 \cdot 2^x = \frac{23}{2^{|x|}} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{т.к. } 23 \not\equiv 2, \text{ но } 23 \cdot 2^x = y^2 - 2025 \in \mathbb{Z}$$

$$(?!)\quad \text{Значит } x \geq 0 \text{ и } x \not\equiv 2 \Rightarrow x > 0.$$

Заметим, что $2025 = 45^2$

$$2^x \cdot 23 = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45).$$

Заметим, что $2^x \cdot 23 : 23$ — простое $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-45 : 23 \\ y+45 : 23 \end{cases} \quad \begin{cases} y \equiv_{23} 45 \\ y \equiv_{23} -45 \end{cases} \quad \begin{cases} y \equiv_{23} -1 \\ y \equiv_{23} 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \begin{cases} y = 23k+1 \\ y = 23k-1 \end{cases} \quad (\text{случай } y=1 \text{ рассмотрим отдельно})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда x $y = 23k + 1$:

$$23 \cdot 2^x = (23k + 1 + 45)(23k - 44)$$

$$23 \cdot 2^x = 23(k+2)(23k-44) \Rightarrow 2^x = (k+2)(23k-44)$$

Значит $k+2$ и $23k-44$ являются степенями двойки $k+2 = 2^m$

Тогда $2^x = 2^m(23 \cdot (2^m - 2) - 44)$

$$2^{x-m} = 23 \cdot 2^m - 46 - 44$$

$$2^{x-m} = 23 \cdot 2^m - 90$$

т.к. $k \in \mathbb{N}$, то $k+2 > 2 \Rightarrow m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$

$$2^{x-m} = 23 \cdot 2^m - 2 \cdot 45$$

$$2^{x-m-1} = 23 \cdot 2^{m-1} - 45$$

Значит $m-1 \geq 1$ Тогда $2^{x-m-1} = 23 \cdot 2^{m-1} - 45$

Значит $2^{x-m-1} \div 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{x-m-1} = 1$$

т.е. $x-m-1 = 0$
 $x = m+1$

$$2^{m+1} = 2^m(23 \cdot (2^m - 2) - 44)$$

$$2 = 23 \cdot 2^m - 90$$

$$92 = 23 \cdot 2^m \cdot \frac{1}{23}$$

$$4 = 2^m \Rightarrow m = 2$$

Значит $x = 3$

и $k = 2^m - 2 = 2$

$$\Rightarrow y = 23k + 1 = 47$$

или же $y = 1$, то

$$23 \cdot 2^x + 2025 = 1 \Rightarrow 23 \cdot 2^x = -2024 \text{ (!!) т.к. } x \in \mathbb{N}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь

$$y = 23k - 1$$

$$23 \cdot 2^x = (23k - 1 + 45)(23k - 46)$$

 $k \in \mathbb{N}$

$$23 \cdot 2^x = 23(k-2)(23k-44)$$

 $k \geq 2$

$$2^x = (k-2)(23k-44)$$

тогда ~~тогда~~

$$\exists m \in \mathbb{Z}^+ : k-2 = 2^m$$

$$2^x = 2^m (23 \cdot (k-2) - 44)$$

$$2^{x-m} = 23 \cdot 2^m + 2$$

если

$$m = 0:$$

$$2^x = 23k - 44$$

$$k = 2 + 1 = 3$$

$$2^x = 23 \cdot 3 - 44$$

 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \quad (?!)$$

т.к. $x \not\equiv 2$

значит

$$m > 0, \text{ тогда}$$

$$2^{x-m-1} = 23 \cdot 2^{m-1} + 1$$

либо

$$m = 1,$$

тогда

$$2^{x-m-1} = 23 + 1 = 24 \quad (?!)$$

либо

$$m > 1,$$

тогда

$$2^{x-m-1} = 23 \cdot 2^{m-1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{x-m-1} \not\equiv 2 \Rightarrow 2^{x-m-1} = 1 \Rightarrow x = m+1.$$

$$2^{m+1} = 2^m (23 \cdot 2^m + 2)$$

$$2 = 23 \cdot 2^m + 2$$

$$0 = 23 \cdot 2^m \quad (?!)$$

Ответ:

$$x = 3; y = 47$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$

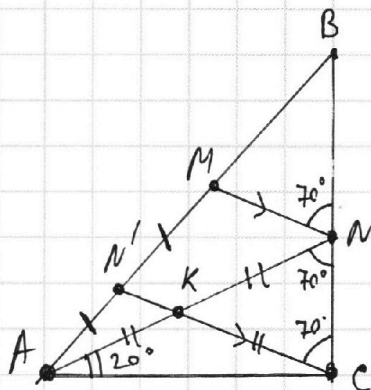
$M \in AB$

$N \in BC$

$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

И-ти: $\angle CAN = ?$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$



$$\frac{BN}{NC} = 2 \cdot \frac{BM}{MA}$$

Проведём из т. C
прямую параллельную

MN , тогда пусть она пересекает AB в т. N'
и AN в т. K . Тогда раз $MN \parallel CN'$

то $\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MN'}$ — по т. Фалеса

и при этом $\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA} \Rightarrow$

$$\frac{BM}{MN'} = 2 \frac{BM}{MA} \Rightarrow MA = 2MN' \text{ т.е. } N' -$$

— середина AM . $\triangle MAN$: в нём прямая
 $N'K \parallel MN$ проходит через середину AM (N') $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Эта прямая — средняя линия.

Значит $AK \parallel KM$ $AK = KN$.

Раз $MN \parallel N'C$, то $\angle MNB = \angle N'CB = 70^\circ$ как соответственные

тогда $\angle N'CB = \angle KCB = \angle KCN = 70^\circ = \angle ANC =$

т.е. $\angle KCN = \angle KNC \Leftrightarrow KN = KC = AK$. $\square = \angle KNC$

Тогда заметим, что в $\triangle ANC$ медиана CK равна
половине AN ($\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$ при этом $\angle ANC = 70^\circ$)

Значит второй острый $\angle CAN = 90^\circ - \angle ANC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$
в прямоугольном $\triangle ANC$ где $\angle ACN = 90^\circ$
Ответ: 20°

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} |\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x| \\ |\sqrt{x^2-x-2}+5| \leq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x^2-x-2}+5| = |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$|ab| = ab$$

$$ab \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$C = 2x^2 - 4x + 12$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1 + 4 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$x_1 = 3$$

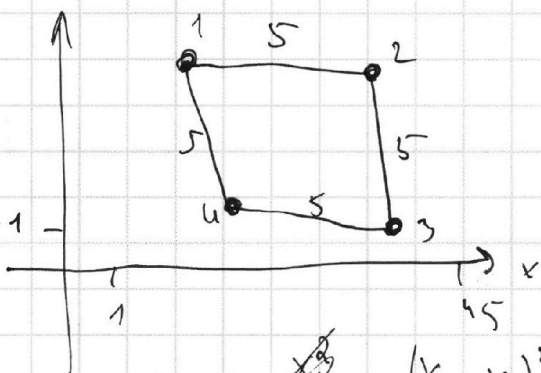
$$(x+2)(x-1)$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)(x+1)} + x - 1 \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-2)(x+1)} > 1-x$$



$$(x_1; y_1) (x_2; y_2) (x_3; y_3) (x_4; y_4)$$

$$x_i \in \{Z\} \cap [1; 45]$$

$$y_i \in \{Z\} \cap [1; 45]$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 25 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 = (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2$$

$$(6-x)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1) = (6-x)(\sqrt{x^2-x-2}+x-1)$$

$$1) 6 = x:$$

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1|$$

$$(2\sqrt{x^2-x-2}+x+4)/(6-x) \geq 0$$

$$2) \sqrt{x^2-x-2}+x-1=0$$

$$x^2-x-2=1-2x+x^2$$

$$x=3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$(n-1)! (1 + n + (n+1)) \neq 2(n-1)! \cdot (n+1)$$

$$(n-1)! (1 + n + n^2 + n) = (n-1)! (1 + 2n + n^2) = (n+1)^2 \cdot (n-1)!$$

289

~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 17 19

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 17} \\ \underline{28} \\ 9 \\ \underline{7} \\ 2 \text{ (ост.)} \end{array}$$

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

$$a^2 + b^2 + 2|ab| \geq a^2 + b^2 + 2ab$$

$$|ab| \geq ab$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 11} \\ \underline{12} \\ 69 \\ \underline{66} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 13} \\ \underline{26} \\ 29 \\ \underline{26} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 17} \\ \underline{17} \\ 119 \\ \underline{119} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$(n+1)^2 \cdot (n-1)! : 17^2$$

$$\boxed{n < 16}, \text{ тогда}$$

$$n+1 < 17 \Rightarrow n+1 \not\equiv 17$$

$$(n+1)^2 \not\equiv 17$$

$$n < 16 \Rightarrow n-1 < 15$$

$$\boxed{n \geq 16}$$

$$n = 16:$$

$$17^2 \cdot (15)! : 17^2$$

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 - 28 = 1^5$$

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 - 28 = 1^5$$

$$7a^2 + 2(9 + 4 + 1) - 28 = 1^5; \quad 7a^2 + 28 - 28 = 1^5$$

$$7a^2 = 1^5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой задаче нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

23k-44≡2
23

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$1-23(2^x-1) \equiv 1-23(-1) \equiv 1+23 \equiv 24 \pmod{23}$$

$$xy \in \mathbb{Z}$$

$$2^x \equiv 14 \pmod{23}$$

$$2^x \equiv 18 \pmod{23}$$

$$2025 = 45^2$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 < (y+1)^2$$

$$y^2 < 23 \cdot 2^x + 45^2 < (y+1)^2$$

$$y^2 < 23 \cdot 2^x + 45^2 < y^2 + 2y + 1$$

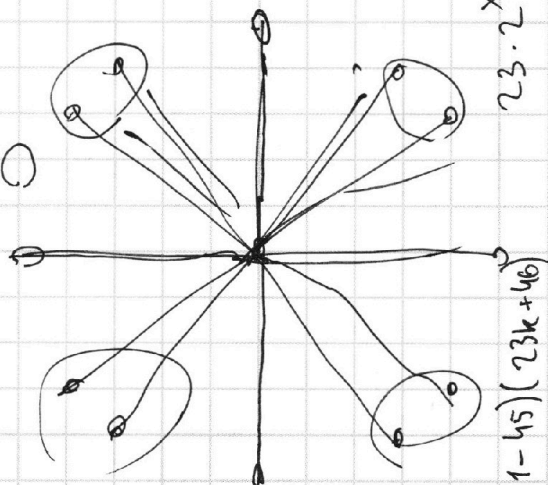
$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$23 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2025 \equiv 0 \pmod{3}$$

2^n	$\text{mod } 3$
2	2
2 ²	1
2 ³	2
2 ⁴	1

x	x^2
0	0
1	1
2	1



$$23 \cdot 2^x = (23k-44)(23(k+2))$$

$$2^x = (23k-44)(k+2)$$

$$2^x = 23k^2 + 2k - 88$$

$$23k^2 + 2k - 88 + 2^x = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 23 \cdot (-88)$$

$$D = 1 - 23(2^x - 88)$$

$$2^x < 88$$

$$2^x \leq 64 \Rightarrow y^2 \leq 23 \cdot 2^x + 45^2 < (y+1)^2$$

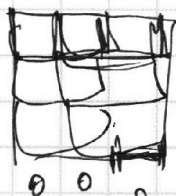
$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 8 \\ 2 \quad 2 \quad 23 \quad 4 \\ 16 \equiv -7 \end{array}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$23 \cdot 2^{2k} + 2025 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3}$$



$$y^2 - 4y - 9 = 0$$

$$1979$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$45 \equiv 22 \pmod{23}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$y = 23k+1$$

$$y = 23k+1$$

$$y = 23k-1$$

$$23 \cdot 2^x = (23k+1-45)(23k+46)$$

$$y = 23k+1$$

$$46-44$$

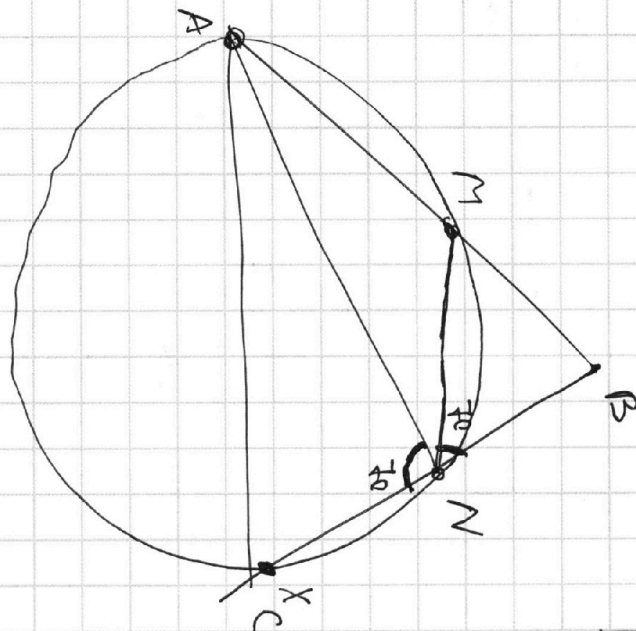


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

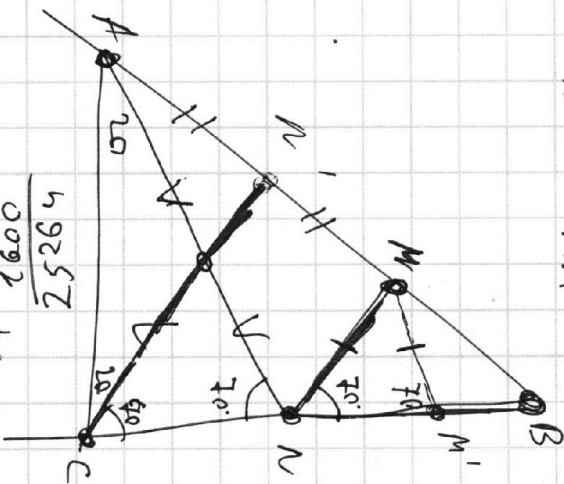
$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MA} \cdot 2$$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BM'}{M'N}$$

$$2 \frac{BM'}{M'N} = \frac{BM}{NC}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{M'N} = 2 \frac{BM}{MA}$$

$$MA = 2M'N$$



$$\begin{array}{r} 24+6=20 \\ 111 \\ 1444 \\ \times \\ \hline 545 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 638 \\ \times 338 \\ \hline 304 \\ + 1144 \\ \hline 21448 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1517 \\ \times 4 \\ \hline 6068 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 37 \\ \hline 273 \\ + 117 \\ \hline 1443 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 147 \\ \times 14 \\ \hline 2058 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1216 \\ \times 11548 \\ \hline 12160 \\ + 121600 \\ \hline 140016 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49257 \\ \times 49982 \\ \hline 492570 \\ + 4925700 \\ \hline 2471556 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ \times 4 \\ \hline 6048 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84511 \\ \times 2772 \\ \hline 2311552 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91121 \\ \times 89092 \\ \hline 8190912 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ \times 126 \\ \hline 190512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ \times 36 \\ \hline 54432 \end{array}$$

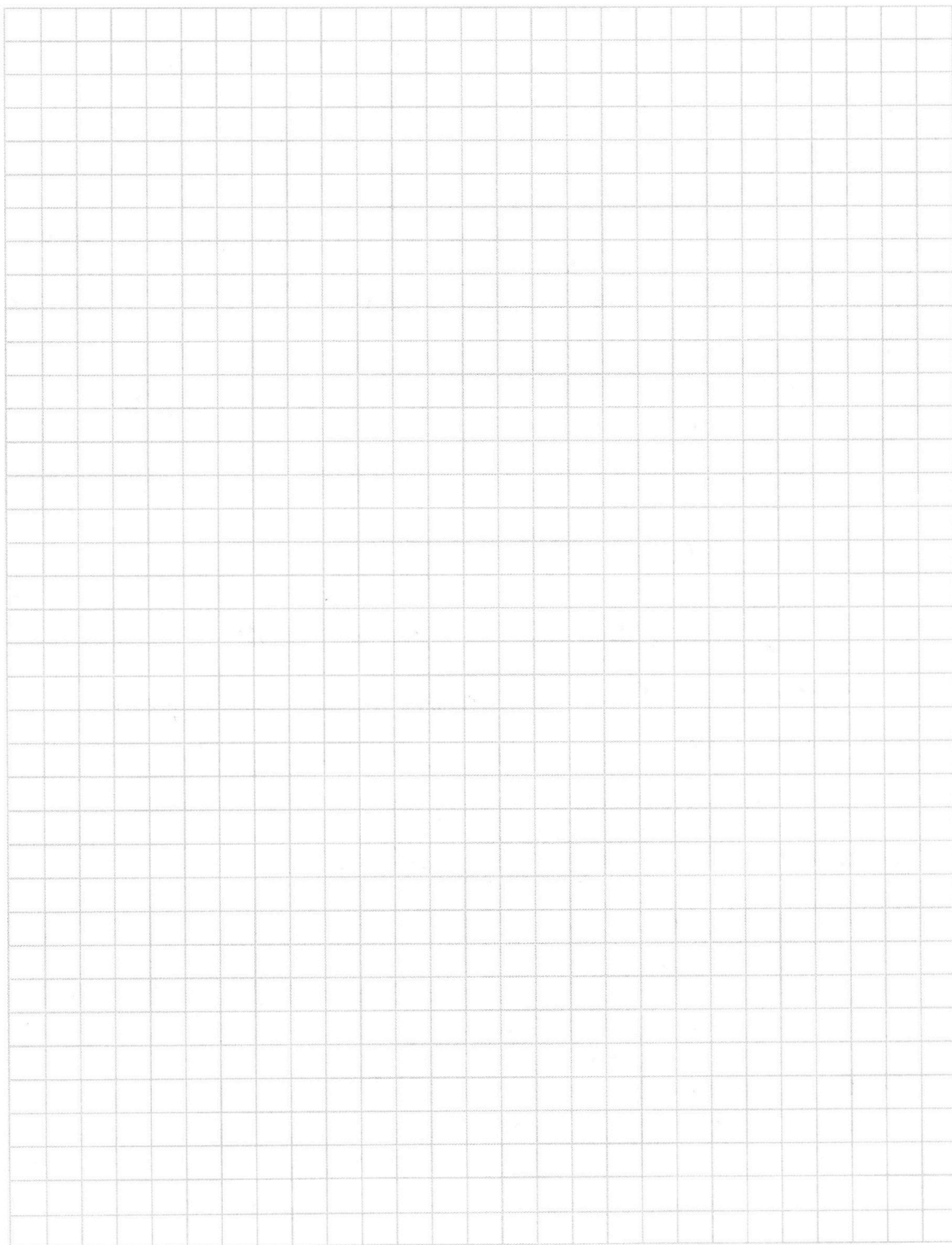


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

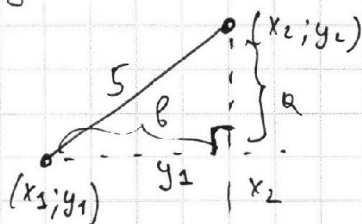
абсциссы и ординаты любой вершины — целые числа, значит эти точки находятся в узлах координатной сетки.

Заметим, что может быть всего 4 вида отрезков — сторон этих ромбов

т.к. уравнение $a^2 + b^2 = 5^2$ имеет ровно 4 решения в $\mathbb{Z}^+$

это $\begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$

Тогда если взять две соседние точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (вершины ромба)

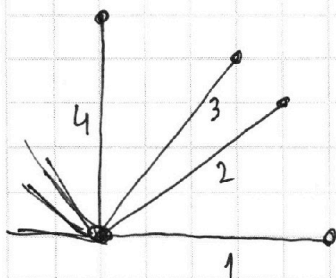


соединить их отрезком длины 5, то

можно ~~то~~ взять $b = |x_1 - x_2|$

и $a = |y_1 - y_2|$, тогда мы получаем пару $(a, b) \Rightarrow$

имеем всего 4 пары отрезков:
 $\Rightarrow$ 4 вида отрезков:



Тогда заметим, что для



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Покажем, что $x \in \mathbb{N}$ и $\forall x: 2$

$$2^n \bmod 3: \quad 2 \equiv 2; \quad 2^2 \equiv 1; \quad 2^3 \equiv 2 \dots$$

$$\dots \quad 2^{2k} \equiv 1; \quad 2^{2k+1} \equiv 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Тогда если $x \div 2$, то $2^x \equiv 2$

и $23 \equiv 2$ значит $23 \cdot 2^x \equiv 1$ и $2025 \div 3$

Значит

$$y^2 = 2025 + 23.$$

2^n	$\bmod 3$
2^1	2
2^2	1
2^3	2
2^4	1

$$\boxed{\begin{array}{l} 2^{2k+1} \equiv 2 \\ 2^{2k} \equiv 1 \end{array}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

