



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) = n! (1 + n+1 + n^2 + 3n+2) \\ = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2$$

$361 = 19^2$, если $n \leq 16$, то $n! \not\div 19$ (т.к. 19 простое и его нет в числе от 1 до 16) и $(n+2)^2 \not\div 19$, т.к. $n+2 \leq 18$ и так же $\not\div 19$, тогда $n \geq 17$ и при $n = 17$ $n! (n+2)^2 \div 19^2$.
Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_1; a_2; a_3; a_4; a_5 \leftarrow$ последовательные числа и
 $a_1 = x-2; a_2 = x-1; a_3 = x; a_4 = x+1; a_5 = x+2$, тогда

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 5x^2 + 10$$

тогда т.к. сумма квадратов минус 10 это $N^3 (N > 6)$, то

$$5x^2 + 10 - 10 = N^3; \quad 5x^2 = N^3, \quad \text{тогда } x = \sqrt[2]{\frac{N^3}{5}}$$

$$5^{3k-1} \geq 5^2, \quad \text{тогда } x \geq 5, \quad \text{т.к. } N > 6, \quad \text{если } m^3 > 1$$

(~~иначе $5x^2 \geq 5^3$ и $N \geq 5$~~), тогда $m = p^{3k}$ иначе если степень не кратна 3, то и при возведении в квадрат она не кратна 3, а должна быть кратна, тогда $m \geq 2^{3-8}$ тогда $5x^2 \geq 5 \cdot 5^2 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2^2)^3 = 20^3$, тогда $N \geq 20$

если $m^3 = 1$, то $5x^2 = N^3$, то есть k делится на 3

Иначе если $k \neq 3$ то $N = 5$, а $N > 6$, ~~тогда k делится на 3~~ k не может быть т.к. $k-1$ должно быть ≥ 2 т.к. x^2 , а $k-1$ будет нечетным, тогда $x^2 \geq 5^8$ $x \geq 5^4 > 20$.

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\overbrace{|\sqrt{x^2-2x-3}+6|}^{\text{всегда } > 0} \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7-2x|$$

т.к. есть $\sqrt{x^2-2x-3} \Rightarrow x^2-2x-3 \geq 0$, тогда ~~$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$~~

Если $x > 3,5$, тогда $\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1-7+2x$,
 $4x \leq 14 \quad x \leq 3,5$, а $x > 3,5$ тогда $x \leq 3,5$.

2) если $0,5 \leq x \leq 3,5$, то $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0$ и
 $7-2x \geq 0$, тогда $\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1+7-2x$
 $6 \geq 6$ - верно
 ≥ 0 при $x \leq 3,5$

Но $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ тогда $3 \leq x \leq 3,5$

3) если $x < 0,5$, тогда $x \leq -1$. Если $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x$ (т.к. $x \leq -1$, то $1-2x > 0$ и $\sqrt{x^2-2x-3} > 0$)

тогда $x^2-2x-3 \geq 4x^2-4x+1, -3x^2+2x-4 \geq 0$

$D < 0$ и ветви направлены вниз, такого не может быть,

тогда при $x \leq -1 \quad \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \leq 0$, тогда

$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3}-2x+1+7-2x$

$2\sqrt{x^2-2x-3} \geq 2-4x$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x$ (Выше мы доказали, что

такое не может быть)

тогда $x \in [3; 3,5]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

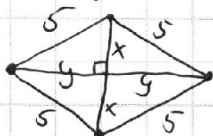
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

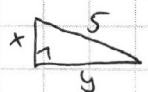
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

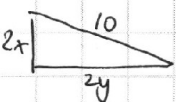
Т.к обе координаты каждой вершины ~~это~~ целые числа, то и расстояние между ними целое число, тогда диагонали ромба целые числа.



То есть $2x$ и $2y$ — целые числа

Рассмотрим такой треугольник:

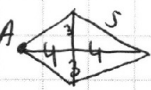


если заменить его на подобный с катетом подобия 2, то получимся , мы знаем что $2x$ и $2y$ целые и по т. Пифагора

$(2x)^2 + (2y)^2 = 100$ ~~также~~ оно имеет ~~реш~~ только два решения

(т.к. сторона $2x$ может быть только 1 2 3 4 5 6 7 8 9, тогда $(2x)^2$ может быть только 1 4 9 16 25 36 49 64 81, тогда $(2y)^2$ может быть только 99 96 91 84 75 64 51 36 19 (т.к. $100 - (2x)^2$) и тогда $2y$ может быть $\sqrt{99}$; $\sqrt{96}$ $\sqrt{91}$ $\sqrt{84}$ $\sqrt{75}$ 8 $\sqrt{51}$ 6 $\sqrt{19}$ (Аналогично если $2x$ и $2y$ поменять местами)).

Тогда ~~2x=6~~ либо $2x=6$ $2y=8$ или $2x=8$ $2y=6$, тогда ~~x=3~~ либо $x=3$ $y=4$ либо $x=4$ $y=3$.

Рассмотрим ~~как~~ сколько вариантов разместить ромб с $x=3$ $y=4$ (то есть A ) Будем ~~так~~ смотреть, где может находиться т. А.

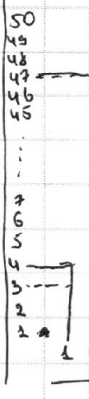
По y только в промежутке от $[\frac{4}{2}; 4\frac{4}{2}]$

По x только в промежутке от $[1; 4\frac{4}{2}]$

тогда всего т. А может находиться в $44 \cdot 42$ (сколько положений т. А столько и ромбов)

Если рассмотреть ромб с $x=4$ $y=3$, то он будет отличаться поворотом на 90° , тогда таких ромбов так же $44 \cdot 42$

и всего ромбов может быть $44 \cdot 42 \cdot 2 = 3696$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Рассмотрим $y > 0$, тогда)
 $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$; $19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45)$
 (Рассмотрим еще $y < 0$, тогда y со знаком минус)
 Тогда либо $y-45$ либо $y+45 : 19$, если $y-45 : 19$, то
 $y-45 = 19k$, тогда $y+45 = 19k+90$, т.к. произведение
 скобок $19 \cdot 2^x$, то $|y+45| = 2^p$, т.к. $y-45 = 19k$, то
 $|k| = 2^p$ (имеем $y-45 : q$, $q \geq 3$, а $19 \cdot 2^x \not\equiv q$), тогда
 если $k : 4$, то $|19 \cdot 4 \cdot r + 90| = |2(19 \cdot 2 \cdot r + 45)| \leftarrow$ не
 может быть 2^p , тогда $|k| = 2^p$, $k \not\equiv 4 \rightarrow |k| = 2$, тогда
 $k = \pm 2$
 $y-45 = 19 \cdot 2 = 38$ или $-2 \cdot 19 = -38$, $y+45 = y = 83$ тогда $x = 8$
 $y = 7$, но тут получается $19 \cdot 2^x < 0$ - не
 Если $y+45 : 19$, то $y+45 = 19f$, $y-45 = 19f-90$,
 Аналогично получим, что $|f|$ равно только 2,
 тогда $f = \pm 2$
 но тогда $y = 38-45 = -7$ или $y = -38-45 = -83$
 тогда $19 \cdot 2^x < 0$, такого не может
 $x = 8$

Тогда возможные пары x и y это $(8; 83); (8; -83)$.

$$\angle CAN = \frac{1}{2} (180 - 80.2) = 49.9^\circ$$

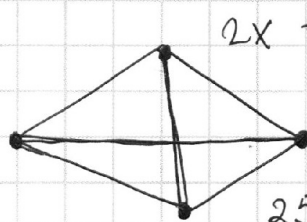


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

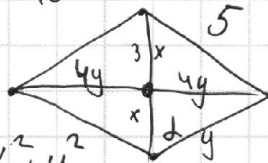
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2x + 2y = 10$$



$$25 = x^2 + y^2$$

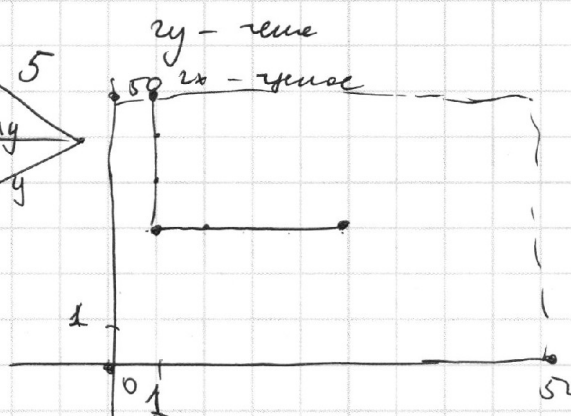
$$100 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = 5$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = \frac{2x}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$\frac{y}{(\sin \alpha)^2} = \frac{2x}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

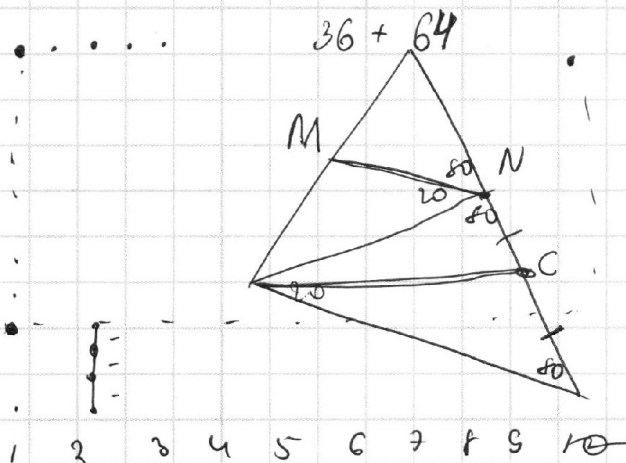
1 2 3 4 5 6 7 8 9



2NC

46 47 48 49 50

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20



1 09
2 88
3 97

55

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 19 \\ \hline 2304 \\ 2560 \\ \hline 4864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2304 \\ 2560 \\ \hline 4864 \end{array}$$

42 43 44 45 46 47 48 49 50

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$$

$$\begin{array}{r} 4864 \\ + 2025 \\ \hline 6889 \end{array}$$

$$50 - 6 = 44$$

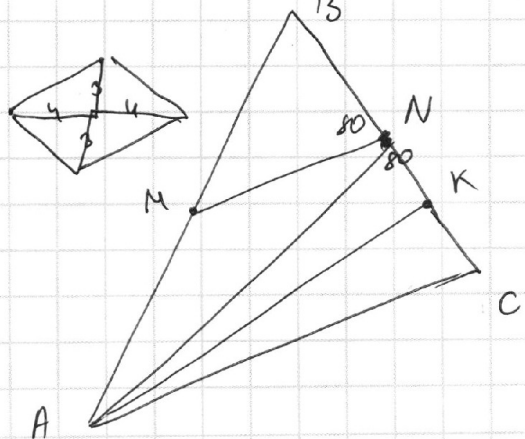
44

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 42 \\ \hline 88 \\ 176 \\ \hline 1848 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 1848 \\ \hline 3696 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 83 \\ \hline 249 \\ 664 \\ \hline 6889 \end{array}$$

1 4 9 16 25 36 49 64 81
90 91 92 93 94 95 96 97 98 99



$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} = \frac{BN}{NC}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including geometric diagrams and algebraic derivations.

Top Left: A circle with a point outside it and a line passing through it.

Top Center: A large triangle with internal lines and angles. Angles of 80° and 20° are marked. Equations: $\frac{x}{\sin 80} = \frac{y}{\sin 20}$ and $\frac{\sin 20}{\sin 80} = \frac{\sin 4}{\sin (80-4)}$.

Top Right: A diamond-shaped quadrilateral with diagonals intersecting at a right angle. Sides are labeled 5, 3, 4, 4.

Middle Left: A right triangle with sides a , b , and hypotenuse c . Angles of 20° and 80° are marked. Equations: $\sin 20 = \frac{c}{a}$, $\sin 80 = \frac{b}{d}$, $\frac{\sin 20}{\sin 80} = \frac{c \cdot d}{a \cdot b}$.

Middle Right: A right triangle with sides c , b , and hypotenuse a . Angle of 18.75° is marked.

Bottom Left: Algebraic derivations involving square roots and fractions. Equations include: $\sqrt{(c+d)^2 + b^2}$, $\sqrt{c^2 + b^2 + 2cd + d^2}$, $\sqrt{c^2 + b^2}$, $\sqrt{c^2 + b^2 + 2cd + d^2}$, $\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}$, $\sqrt{1 + \frac{b^2}{(c+d)^2}}$.

Bottom Right: Further algebraic work. Equations include: $\frac{a}{b} c_2 + c_2 = c$, $c_2 = \frac{cb}{a+b}$, $d = \sqrt{\left(\frac{cb}{a+b}\right)^2 + b^2}$.

Far Right: Vertical equations: $X^2 - 6X + 9 \leq 8$, $X^2 - 6X + 9 - 8 \leq 0$, $D = 36 - (9 - 8) \cdot 4$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y-45 = 19k$$

$$y = 19k + 45$$

$$y+45 = 19k + 90$$

$$2^x = 19k + 90$$

$$2^x = 19m + 45 = 64 + 19t$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$(x-3)(x+1)$$

$$(x-3)(x+1) + 2x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$$1 - 2x$$

$$2x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 0,5$$

$$x < 0,5$$

$$x \leq -1$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 + 1 - 4x$$

$$0 \geq 3x^2 - 2x + 4$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$19t - 45$$

$$x^2 - 6x + 9 - 8$$

$$0 \leq 36 - (a-8) \cdot 4 \geq 0$$

$$36 - 4a - 32 = 4 - 4a > 0$$

$$x^2 + y^2 = 9^2$$

$$x^2 - 6x + 9 - 8 \geq 0$$

$$D = 36 - 4(a-8) \geq 0$$

$$k:2, \text{ но } k \neq 4$$

$$k=2$$

$$k:3$$

$$y$$

$$y+45 = 19k$$

$$y-45 = 19k-90$$

$$P_k$$

$$x^2 - 2x - 3$$

$$1 - 2x$$

$$6889$$

$$-2025$$

$$4864$$

$$-38$$

$$106$$

$$-95$$

$$114$$

$$-114$$

$$0$$

$$256$$

$$x =$$

$$a < 1$$

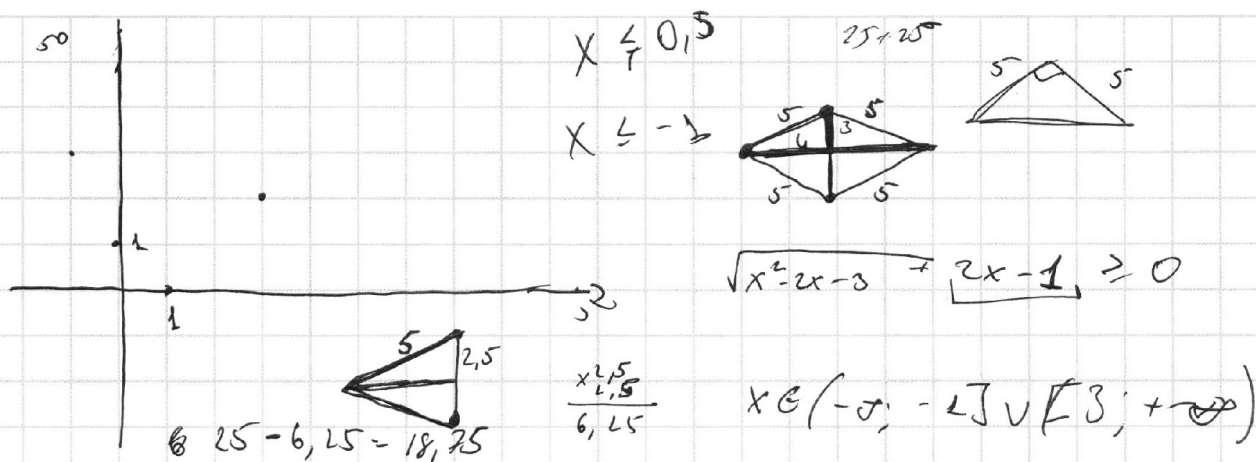


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$$

$$x \leq -1$$

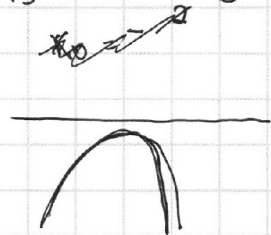
$$x < 0,5$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 + 1 - 4x$$

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$$D = 4 - 0 < 0$$



$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! \cdot (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) =$$

$$n! \cdot (n+2 + n^2 + 3n + 2) = n! \cdot (n^2 + 4n + 4) = n! \cdot (n+2)^2$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 19} \\ 18 \\ \hline 271 \\ 18 \\ \hline 9 \\ 18 \\ \hline 171 \\ 18 \\ \hline 19 \\ 361 \end{array}$$

$$361 = 19^2$$

$$n=17 \quad \sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + |7-2x|$$

$n \geq 6$

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 - 10 = N^3$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{4x} + \cancel{4} + \cancel{x^2} - \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{x^2} + \cancel{4x} + \cancel{4} - 10 = 0$$

$$5x^2 = N^3$$

$$x^2 = 5 \cdot 9$$

$$2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$$

$$40 \cdot 40 \cdot 5 =$$

$$x \geq 3,5$$

$$x_1 = -2, x_2 = -1$$

$$\times 200$$

$$8000 = 20^3$$

$$0,5 \leq x \leq 3,5$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$0,5 \leq x \leq 3,5$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 7-2x$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 7-2x$$

$$6 \geq 6$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \leq 0$$

$$14 \geq 4x$$

$$3,5 \geq x$$

$$x < 0,5$$

$$x = 3,5$$

