



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Для того, чтобы  $abc$   
было наименьшим, надо чтобы  
 $a, b, c$  состояли только  
из 2 и 7.

Тогда:

$$ab = 2^{14+x_1} \cdot 7^{10+x_2}$$

$$bc = 2^{17+y_1} \cdot 7^{17+y_2}$$

$$ac = 2^{20+z_1} \cdot 7^{37+z_2}, \text{ где } x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{N}$$

тогда:

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = 2^{11+x_1+y_1-z_1} \cdot 7^{-10+x_2+y_2-z_2}$$

Чтобы  $b$  было целое, тогда хотя бы одно из

$x_1, y_1, z_1$  должно быть 1, и чтобы сумма  
 $x_2+y_2$  была хотя бы 10. В самом случае:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+x_1+y_1+z_1} \cdot 7^{64+x_2+y_2+z_2}$$

Из предыдущих условий,  $x_1+y_1+z_1$  хотя бы 1,

и  $x_2+y_2$ , а следовательно и  $x_2+y_2+z_2$  хотя бы  
10.

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+1} \cdot 7^{64+10} = 2^{52} \cdot 7^{74}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Чтобы  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$  можно было сократить

на  $m$ , надо чтобы  $(a+b):m$  и  $(a^2-6ab+b^2):m$ .

Тогда:  $a^2-6ab+b^2:m$

$\downarrow$   
 $(a^2+2ab+b^2-8ab):m$

$((a+b)^2-8ab):m$  м.к.  $(a+b):m$ , то  $(a+b)^2:m$

$\swarrow$   
 $8ab:m$

~~Но м.к.  $a$  и  $b$  разный~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

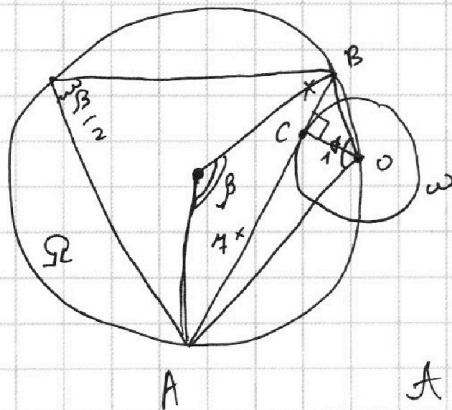
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    
  2    
  3    
  4    
  5    
  6    
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3



С одной стороны,

$$8x = 2R_{\Omega} \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{\beta}{2} = 180^{\circ} - \alpha$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin (\angle AOC + \angle COB)$$

$$\sin \angle AOC = \frac{4x}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$\cos \angle AOC = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$\sin \angle COB = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\cos \angle COB = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin \alpha = \sin \angle AOC \cos \angle COB + \cos \angle AOC \sin \angle COB =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{49x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \frac{8x}{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$8x = 2R_{\Omega} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{8x}{2R_{\Omega}}$$

$$\frac{8x}{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{8x}{2R_{\Omega}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 2R_{\Omega} = 2.5$$

$$(49x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1) = 100$$

Положим  $x^2 = t$

$$49t^2 + 49t + t + 1 = 100$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$$0 = 50^2 + 99 \cdot 4 \cdot 99 = 50^2 + (148 - 50)(148 + 50) =$$
$$= 50^2 + (148^2 - 50^2) = \cancel{148} 148^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-50 \pm 148}{98}$$

- не подходит, т.к.  
 $t = x^2$

$$t = \frac{-50 + 148}{98} = 1$$

11  
↓

$$x = \sqrt{t} = 1$$

А т.к.  $AB = 8x$ , то  $AB = 8$ .

Ответ:  $AB = 8$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$1. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

1. + 2.

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 9 - 42x + 49x^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{42}$$

Но:  $x^2 + 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \\ x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}$

~~$\frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$ , но  $\frac{22 + \sqrt{976}}{42} > \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ , поэтому оно не подходит.~~

~~$x = \frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ , поэтому оно подходит.~~

~~$\frac{22 - \sqrt{976}}{42}$~~

$\frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$ , но  $\frac{22 + \sqrt{976}}{42} > \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ , поэтому оно не подходит

оно не подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$  (продолжение)  
А корень  $\frac{22 - \sqrt{976}}{42} < \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ , поэтому

не подходит.

Ответ:  $x = \frac{22 - \sqrt{976}}{42} \approx -0,23$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

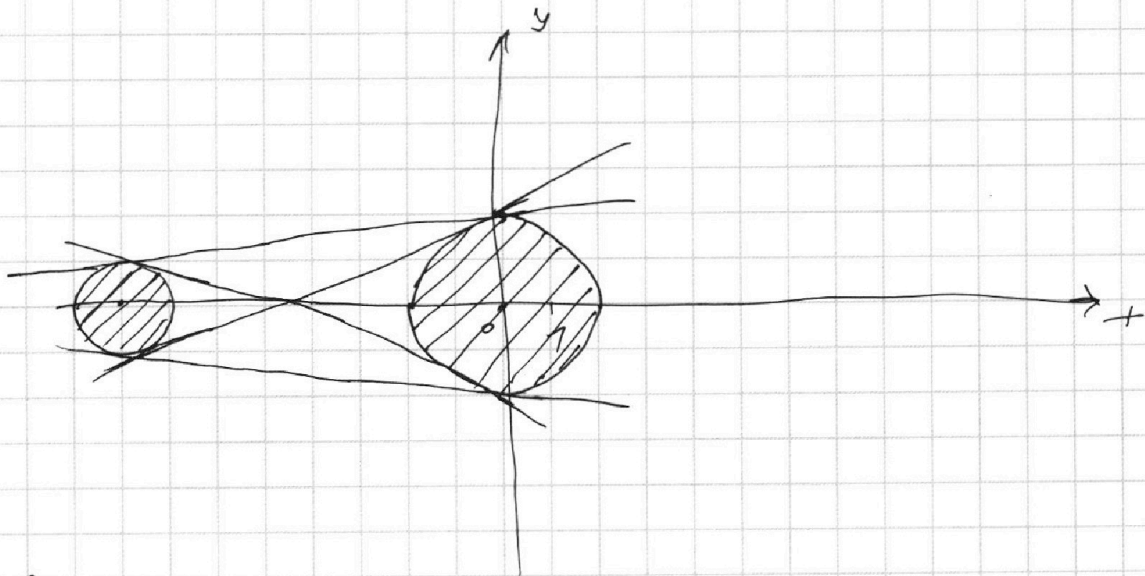
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

это два уравнения ~~окружности~~ <sup>окружности</sup> и ~~окружности~~ <sup>окружности</sup>.



Если первая скобка  $\geq 0$ , то  $(x, y)$  внутри  
левой ~~окружности~~ <sup>окружности</sup> ~~и~~ <sup>и</sup> ~~тогда~~ <sup>тогда</sup> вторая скобка должна  
быть  $\geq 0$ , но есть  $(x, y)$  снаружи правой ~~и~~ <sup>и</sup> ~~окружности~~ <sup>окружности</sup>. И наоборот вторая скобка  
 $\leq 0$ , тогда первая  $\geq 0$  и  $(x, y)$  внутри  
второй окружности.

А уравнение  $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$ , это просто просто прямая.  
Тогда два решения будет, когда прямая  
будет касательной сразу к двум окружностям.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

Пусть  $y = \cancel{ax} + k$ , где  $k = 10k$

Тогда:

$$\begin{cases} (x+8)^2 + (ax+k)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + (ax+k)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

и т.к. это касательная,  
то  $D = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\sqrt{1} - \sqrt{2} = 2 - 3x$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} = 1$$

$$\sqrt{1} = \frac{3 - 7x}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{9 - 42x + 49x^2}{4}$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{1 - 2 + 7x}{7x - 1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{4x^2}$$

$$49x^2 - 74x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$

ОДЗ:

$$2 \cdot \left( \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} \right)^2 - 5 + 3 \geq 0$$

нога ногам

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

всегда

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5 + \sqrt{1}}{4} \\ x \leq \frac{5 - \sqrt{1}}{4} \end{cases}$$

$$\left( \frac{22 + \sqrt{976}}{82} \right)^2 - 5 + 3 \geq 0$$

$$\left( \frac{22 + \sqrt{976}}{82} \right)^2 \geq 2$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} \geq \frac{5 + \sqrt{1}}{4}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} \geq \frac{5}{4}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} \geq \frac{5}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



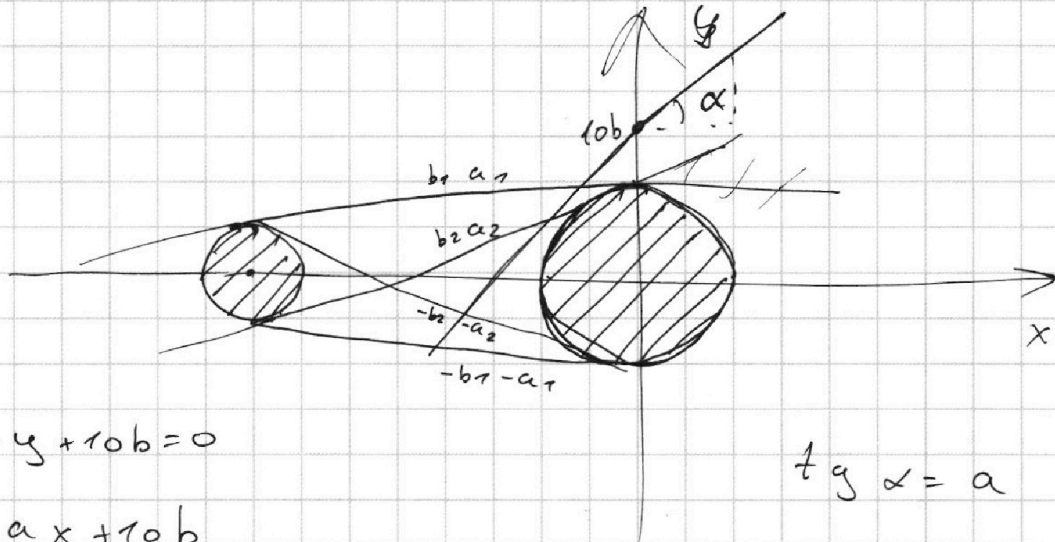
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 5

$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$ax - y + 10b = 0$$

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$\tan \alpha = a$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 = 1$$

$$x^2(1+a^2) + x(16+20ab) + 64+100b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(64+100b^2 - 1) = 0$$

$$16^2 + 640ab + 400a^2b^2 = (4+4a^2)(64+100b^2 - 1)$$

$$16^2 + 640ab$$

$$8^2 + 160ab + 100a^2b^2 = 64 + 100b^2 - 1 + 64a^2 + 100a^2b^2 - a^2$$

$$64 + 160ab = 64 + 100b^2 - 1 + 64a^2 - a^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$x - y = x^2 - y^2$$

$$x - y = (x - y)(x + y)$$

$$x + y = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$(4x^2 - 3x + 4) - 2\sqrt{\dots} = (2 - 7x)^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 = \frac{(2 - 7x)^2 + 1}{2}$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 2 - 14x + 24,5x^2 + \frac{1}{2}$$

$$24,5x^2 - 4x^2 - 14x + 3x + 2 + \frac{1}{2} - 4 = 0$$

$$20,5x^2 - 11x - 1,5 = 0$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 =$$

$$2 \cdot \sqrt{\dots} = \frac{2 \pm \sqrt{\dots}}{2}$$

$$484 + 165 \cdot 3 = 989 + 495 = 1484$$

$$8x^2 - 6x + 8 = 4 - 28x + 295x^2 + 1$$

$$x(x + 44) = 9 \cdot 3 \cdot 41$$

- 8  $41 \cdot \frac{3}{2}$
- 10  $41 \cdot \frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

OD<sup>3</sup>:  
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2 \cdot \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + (2x^2 + 2x + 1) = 4 - 28x + 49x^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2 \cdot \sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$4x^2 - 49x^2 - 3x + 28x + 4 - 4 = 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$4x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x = 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3$$

$$(4x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x) - (4x^3 + 2x^2 + 4x + 3)$$

$$x(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3) - (4x^3 - 2x^2 - 4x - 3)$$

$$(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3)(x - 1)$$

$x^4$	$x^3$	$x^2$
$x^3$	$x^2$	$x$
$x^2$	$x$	$1$

$$4x^3 - 2x^2 - 4x - 3$$

~~4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3~~

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 2x^3 \\ -2x^3 - 4x^3 \\ \hline -4x^3 \end{array}$$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$   
 $2x^2 + 2x + 1 = 0$   
 $-5x + 3 - 2x - 1 = 0$   
 $-7x + 2 = 0$   
 $x = 2/7$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$   
 $x = 1, x = 3/2$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-8x - 2x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$  - несокп.

$\sqrt{2}$   
 $[a, b] = 1$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a^2-3ab+b^2-3ab}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a(a-3b)+b(b-3a)}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ (a+b)^2 - 8ab &: m \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 : m \quad 8ab : m$$

$$a+b : m$$

$$8ab : m$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ ab &: m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= k_1 m \\ ab &= k_2 m \end{aligned}$$

~~$$\begin{aligned} a+b &= km \\ 8ab &= nm \end{aligned}$$~~

~~$$a = km - b$$~~

~~$$8(km-b)b = nm$$~~

~~$$8km^2 - 8b^2 = nm$$~~

~~$$8kmb - 8b^2 = nm$$~~

$$a = k_1 m + n_1$$

$$b = k_2 m + n_2$$

$$k_1 m + n_1 + k_2 m + n_2 = m$$

$$m(k_1 + k_2) + (n_1 + n_2) = m$$

$$n_1 + n_2 = m$$

$$(k_1 m + n_1)(k_2 m + n_2) = m$$

$$k_1 k_2 m^2 + k_1 m n_2 + k_2 m n_1 + n_1 n_2 = m$$

$$n_1 n_2 = m$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1 = \frac{k_2(a+b)}{ab}$$

$$a+b = \frac{k_2(a+b)}{ab} m$$

$$1 = \frac{k_2 m}{ab}$$

$$ab = k_2 m$$

$$a \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{k_1}{k_2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{aligned}
 ab &= 2^{14+k_1} \cdot 7^{10+k_2} \\
 bc &= 2^{17+m_1} \cdot 7^{12+m_2} \\
 ac &= 2^{20+n_1} \cdot 7^{37+n_2}
 \end{aligned}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab \cdot bc = 2^{31} \cdot 7^{22}$$

$$\frac{ab^2}{ac} = \frac{k_1 k_2 \cdot 2^{31} \cdot 7^{22}}{k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}} = \frac{k_1 k_2}{k_3} \cdot 2^{11} \cdot 7^{-15}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$$

abc

$$b = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3} \cdot 2^{11} \cdot 7^{-15}}$$

$$a = \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30}}$$

$$c = \sqrt{\frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{23} \cdot 7^{55}}$$

$$abc = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 k_1 k_3 k_2 k_3}{k_1 k_2 k_3}}$$

$$abc = \sqrt{k_1 k_2 k_3}$$

$$ab^2 c = 2^{31+k_1+m_1} \cdot 7^{22+k_2+m_2}$$

$$b^2 = 2^{11 \cdot \frac{k_1+m_1-1}{2}} \cdot 7^{-15 \cdot \frac{k_2+m_2-1}{2}}$$

$$k_2 + m_2 = 10$$

$$k_2 = 0 \quad m_2 = 10$$

$$k_1 / m_1 / m_2 = 1/5/1$$

$$\begin{aligned}
 a^2 b^2 c^2 &= 2^{51+(k_1+m_1+m_2)} \cdot 7^{64+(k_2+m_2+m_2)} \\
 abc &= 2^{26} \cdot 7^{37}
 \end{aligned}$$

$$b^2 = 2^{12/10}$$

$$b = 2^6 / 2^5$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 10$$

$$\begin{aligned}
 b &= 2^6 \\
 a &= 2^{10} \cdot 7^{20} \\
 c &= 2^{17} \cdot 7^{17}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

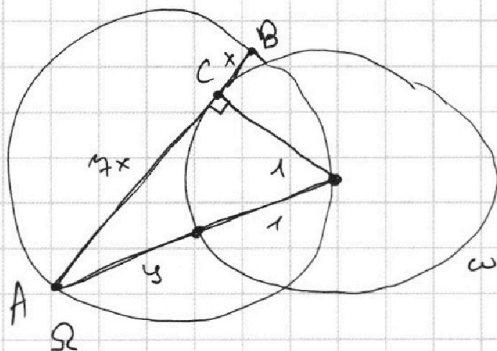
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 3



$$R_{\omega} = 1$$

$$R_{\Omega} = 5$$

$$(7x)^2 + 1^2 = (y+1)^2$$

$$y \cdot (y+1) = (7x)^2$$

$$49x^2 + 1 = y^2 + 2y + 1$$

$$y^2 + 2y = 49x^2$$

$$(7x)^2 + 1 = (y+1)^2$$

$$(7x)^2 = y \cdot (y+2)$$

$$y^2 + 2y = 49x^2$$

$$1(1+y) = (7x)^2$$

$$(1+y)^2 = 1^2 + (7x)^2$$

$$1+y = (7x)^2 = 49x^2$$

$$(1+y)^2 = 1 + 49x^2$$

$$(49x^2)^2 = 1 + 49x^2$$

$$49^2 x^4 = 1 + 49x^2$$

$$49x^2 = t$$

$$t^2 = 1 + t$$

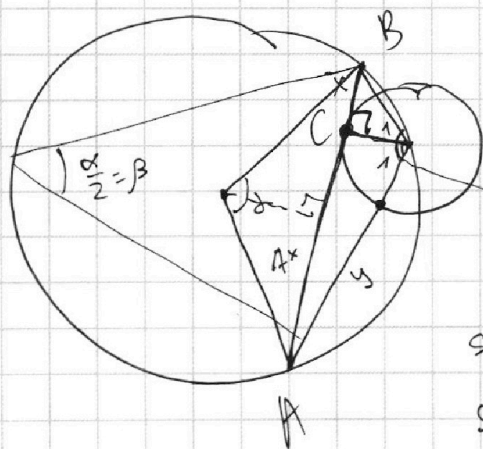
$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$49x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$29x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



$$2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$2R \cdot \sin \beta$$

$$2R \sin \beta$$

$$\frac{x}{\sin \beta_1 \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin \beta_2 = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta = \sin(\beta_1 + \beta_2) =$$

$$\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$

$$\sin \beta = \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} =$$

$$= \frac{x + 7x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1}} = \frac{8x}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} =$$

$$8x = 2.5 \cdot \frac{8x}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}}$$

$$1 = 2.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}}$$

$$\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$$

$$(x^2+1)(49x^2+1) = 100 \quad x^2 = t$$

$$(t+1)(49t+1) = 100$$

$$49t^2 + t + 49t + 1 = 100$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 99 \cdot 9 \cdot 49 =$$

$$= (50^2) + (198 \cdot 50)(198 + 50) =$$

$$= 50^2 + (198^2 - 50^2) = 198^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-50 \pm 198}{98} = \frac{-50 + 198}{98} =$$

$$= \frac{99}{98} = \textcircled{1}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \textcircled{x = 1}$$

$$\frac{99 \cdot 198}{98 \cdot 98} = \frac{99 \cdot 99}{98 \cdot 98}$$

$$99 \cdot 99 = (198 - 50)(198 + 50)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(99 - 50)(99 + 50)$$

$$(99 - 50)(99 + 50)$$

$$\frac{99 \cdot 99}{98 \cdot 98} = \frac{(99 - 50)(99 + 50)}{98 \cdot 98}$$

$$99 \cdot 99 = 98 \cdot 98$$

$$\times \cdot (100 + x) = 99 \cdot 99$$

$$\frac{99 \cdot 99}{98 \cdot 98}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 5

$$160ab = 100b^2 - 1 + 63a^2$$

$$100b^2 = 160ab - 63a^2 + 1$$

~~$$100b^2$$~~

$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 = 9$$

$$x^2 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 = 9$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + 100b^2 - 9 = 0$$

$$D = \cancel{20} 400a^2b^2 - 4(1+a^2)(100b^2 - 9) = 0$$

$$100a^2b^2 = 100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 9$$

$$0 = 100b^2 - 4a^2 - 9$$

$$0 = 160ab - 63a^2 + 1 - 4a^2 - 9$$

$$0 = \cancel{16} 160ab - 67a^2 - 8$$

$$67a^2 = 160ab - 8$$

~~$$ax$$~~ 
$$y = ax + 10b$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 9) = 0$$

$$0 = 160ab - 67a^2 - 8$$

$$160ab = 67a^2 + 8$$

$$b = \frac{67a^2 + 8}{160a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a} = \frac{67a}{160} + \frac{3}{160a}$$

$$160ab = 100b^2 - 1 + 63a^2$$

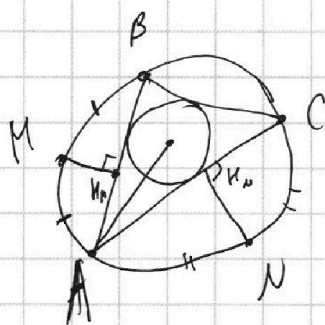
~~100~~

$$67a^2 + 3 = 100 \left( \frac{67a^2 + 3}{160a} \right)^2 - 1 + 63a^2$$

$$67a^2 + 3 = \frac{(67a^2 + 3)^2}{16a} - 1 + 63a^2$$

$$4a^2 + 4 = 8$$

N7



$$MK = 5$$

$$NK = 2$$