

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)!(1+n+n(n+1)) = (n-1)!(n^2 + 2n + 1) = (n-1)!(n+1)^2$$

$$289 = 17^2 \Rightarrow \text{при } n=16 \quad (n+1)^2 = 17^2 : 289 \Rightarrow (n-1)!(n+1)^2 : 289 \text{ при } n=16$$

$$\text{при } n < 16: \left\{ \begin{array}{l} n-1 < 17 \Rightarrow (n-1)! \not\equiv 17 \pmod{17} \\ n+1 < 17 \Rightarrow (n+1)^2 \not\equiv 17 \pmod{17} \end{array} \right\} \Rightarrow (n-1)!(n+1)^2 \not\equiv 17 \pmod{17} \Rightarrow n < 16 \text{ не подходит}$$

Ответ: 16



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наименьшее из этих семи чисел равно $m-3 \Rightarrow$ сумма их квадратов $-28 =$
 $= (m-3)^2 + (m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 + (m+3)^2 - 28 = 7m^2 + 2(1+4+9) - 28 = 7m^2 = N^5$

~~Вывод: $N=7$~~ $N^5 = 7m^2 \Rightarrow N^5 : 7 \Rightarrow N : 7$ (м.к. 7-простое) $\Rightarrow$ м.к. $N \geq 8$, то

Докажем, что $N=7 \cdot 2$ и $N=7 \cdot 3$ не годят.

при $N=7 \cdot 2$: $N^5 = 7^5 \cdot 2^5 = 7 \cdot m^2 \Rightarrow m^2 = 7^4 \cdot 2^5$, но 2 простое $\Rightarrow$ м.к. в квадрате степень каждого простого делится на 2, а степень 2 здесь $=5$, то такого быть не может

при $N=7 \cdot 3$ доказательство аналогичное

Выводим, $N:7$, но $N \neq 2 \cdot 7; 3 \cdot 7 \Rightarrow N \geq 4 \cdot 7$. А при $N=4 \cdot 7$: $N^5 = (2^2 \cdot 7)^5 = 2^{10} \cdot 7^5 = 7 \cdot m^2 \Rightarrow m^2 = 2^{10} \cdot 7^4 \Rightarrow m = 7^2 \cdot 2^5 \Rightarrow$ есть пример, где $N=4 \cdot 7 \Rightarrow$ наименьшее $N=4 \cdot 7=28$

Ответ: 28



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\text{ОДЗ: } x^2-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad \text{при } x \geq 1 \vee$$

$$x \leq -1: x^2-x-2 \geq (1-x)^2 = 1-2x+x^2 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ не подх. (м.к. } x \leq -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \text{ при } x \geq 1$$

$$6-x \geq 0 \text{ при } x \leq 6$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 0 \quad \forall x \text{ (из ОДЗ)}$$

Итого:

$$\begin{array}{c|c|c} \sqrt{x^2-x-2} & - & + \\ 6-x & + & - \end{array}$$

$$\text{при } x \leq -1: \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq -\sqrt{x^2-x-2}-x+1+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad x \leq -1 \Rightarrow 1-x \geq 0$$

$$x^2-x-2 \geq (1-x)^2 = 1-2x+x^2$$

$$x \geq 3, \text{ но } x \leq -1 \Rightarrow \emptyset$$

при $1 < x < 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x$$

$$5 \geq x-1+6-x$$

$$5 \geq 5$$

$$0 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in (1; 6) \text{ подх.}$$

при $x \geq 6$:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+x-6$$

$$5 \geq x+x-7$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6, \text{ но } x \geq 6 \Rightarrow \text{подх. только } x=6$$

$x \leq -1$ и $1 < x < 6$. Теперь наложим на ОДЗ:

$$\begin{cases} 1 < x \leq 6 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \rightarrow 2 \leq x \leq 6$$

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☒ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Перча QR-кода недопустима!

Теперь приведёт общий алгоритм, который для конкретной формы ромба посчитает, сколько их всего в промежутке $[1; 45]$ (координаты всех их вершин в промежутке $[1; 45]$):

~~Здесь мы рассмотрим только ромбы~~ Пусть у нас есть форма ромба X , для которой мы это считаем. Представим допустимую область для расположения ромбов в виде квадрата со стороной 44. Все подходящие ромбы лежат полностью внутри этого квадрата (или на его границе). Заметим, что если вокруг ромба X описать прямоугольник, ~~тогда ромб будет~~ а потом стереть ромб, то, зная форму X , мы однозначно восстановим ромб $\Rightarrow$ мы получаем взаимное соответствие нарисованного на плоскости ~~конкретного ромба~~ формы X и описанного вокруг него прямоугол. Также заметим, что, если ромб ~~на~~ находится внутри допустимой области - квадрата 44×44 , то и его описанный прямоугольник лежит внутри (возможно, частично на границе) этой области $\Rightarrow$ количество ромбов формы X внутри этой области есть кол-во описанных прямоугольников, ~~которые~~ являющихся описанными для ромба формы X , внутри этой области. * Тогда заметим, что прямоугольников $p \times m$ внутри этой области (прямоуг. с целочисленными координатами вершин) ~~найдётся~~ $(45-p)(45-m)$ штук (т.к. каждый из них однозначно задаётся своей верхней левой вершиной, которая находится ~~посередине~~ в прямоугольнике * p - его длина по горизонтали ($\parallel O_x$), m - по вертикали ($\parallel O_y$). Т.е. прямоугольники 1×2 и 2×1 , к примеру, разные

размером $(45-p) \cdot (45-m)$. Значит, если описанный прямоугол. для формы ромба X имеет размеры $p \times m$, то таких ромбов в области $(45-p)(45-m)$. Тогда заметим, что p - расстояние между ~~вершинами~~ левой и правой вершинами ромба по горизонтали, а m - расстояние по вертикали между верхней и нижней вершинами ромба. ~~Значит, для формы ромба X мы получили~~

Выходит, для формы ромба X мы научились считать, сколько таких ромбов внутри подходящей области $\Rightarrow$ если все эти значения для 15 форм сложить, получим ответ на задачу. Но сначала отдельно для каждой формы посчитаем, сколько таких ромбов ~~у нас~~ ~~получится~~.

Форма: Число подх. ромбов: Форма: Число подх. ромбов:

1 40 · 40

2 41 · 37

3 41 · 37

4 42 · 36

5 42 · 36

6 42 · 36

7 39 · 37

8 41 · 37

9 39 · 37

10 38 · 38

11 38 · 38

12 38 · 38

13 38 · 38

14 41 · 37

15 36 · 42

Итого получаем:

$$40 \cdot 40 + 4 \cdot 42 \cdot 36 + 4 \cdot 38^2 + 41 \cdot 37 \cdot 2 + 39 \cdot 37 \cdot 2 = 1600 + 6048 + 5904 + 6068 + 2886 = 22506$$

Ответ: 22 506



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

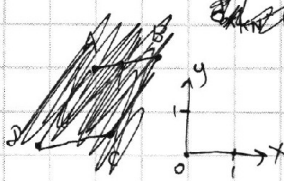
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по стороне

Возьмём две соседние вершины такого ромба пусть d_x - модуль разности их координат по x , d_y - модуль разности их координат по y . Расстояние между этими вершинами $= \sqrt{d_x^2 + d_y^2} =$ длина стороны ромба $= 5$. Т.к. d_x, d_y - числа ~~полож~~ неотр., и при том целые (т.к. вершины ромба имеют целые координаты), то заметим, что $d_x, d_y \leq 5$ (иначе пусть $d_x > 5 \Rightarrow d_x^2 + d_y^2 > 25 \Rightarrow \sqrt{d_x^2 + d_y^2} > 5 \Rightarrow d_x, d_y$ - целые в промежутке от 0 до 5 включительно $\Rightarrow$ $\begin{cases} d_x = 3 \\ d_y = 4 \\ d_x = 0 \\ d_y = 5 \end{cases}$ - с точностью до перестановки местами d_x и d_y т.Пифагора

~~Пусть дан ромб ABCD, где A - самая верхняя его вершина. Если таких несколько, то самая левая из них, а D лежит левее B (не считая общности с A по стороне соседствуют B и D), и пусть D самая левая из них (B и D не лежат на одной вертикали т.к. ABCD ромб $\Rightarrow$ выпуклый).~~

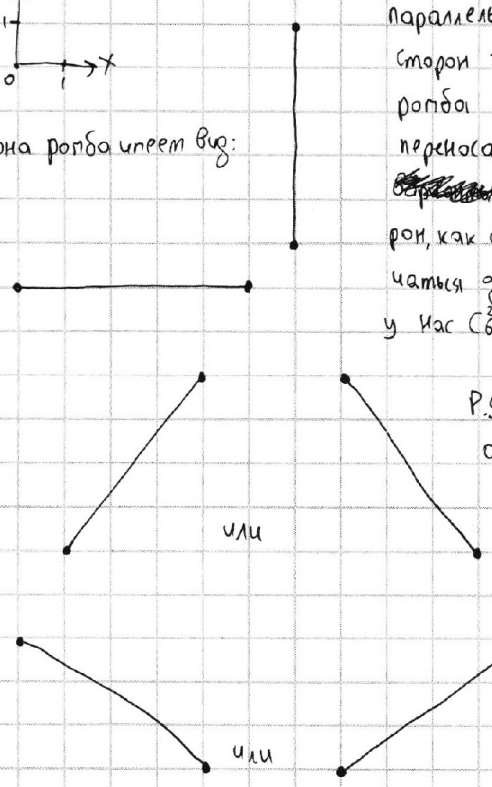


При $\begin{cases} d_x = 0 \\ d_y = 5 \end{cases}$ сторона ромба имеет вид:

при $\begin{cases} d_x = 5 \\ d_y = 0 \end{cases}$

при $\begin{cases} d_x = 3 \\ d_y = 4 \end{cases}$

при $\begin{cases} d_x = 4 \\ d_y = 3 \end{cases}$



Заметим, что т.к. у ромба противоположные стороны параллельны, то, выбрав из предложенных ниже 6 сторон 2 штуки, мы однозначно задаём форму ромба с точностью до его параллельного переноса. ~~Всего таких пар 15 штук.~~ При том из одной пары выбранных сторон, как бы мы их ни переставляли, будет получаться один и тот же ромб $\Rightarrow$ видов ромбов у нас $C_6^2 = 15$. Все они приведены ниже:

P.S. А вот уже по картинке ромба можно однозначно установить из какой пары сторон он сделан $\Rightarrow$ у нас взаимное соответствие ромба и пары сторон $\Rightarrow$ ромбов $C_6^2 = 15$ штук



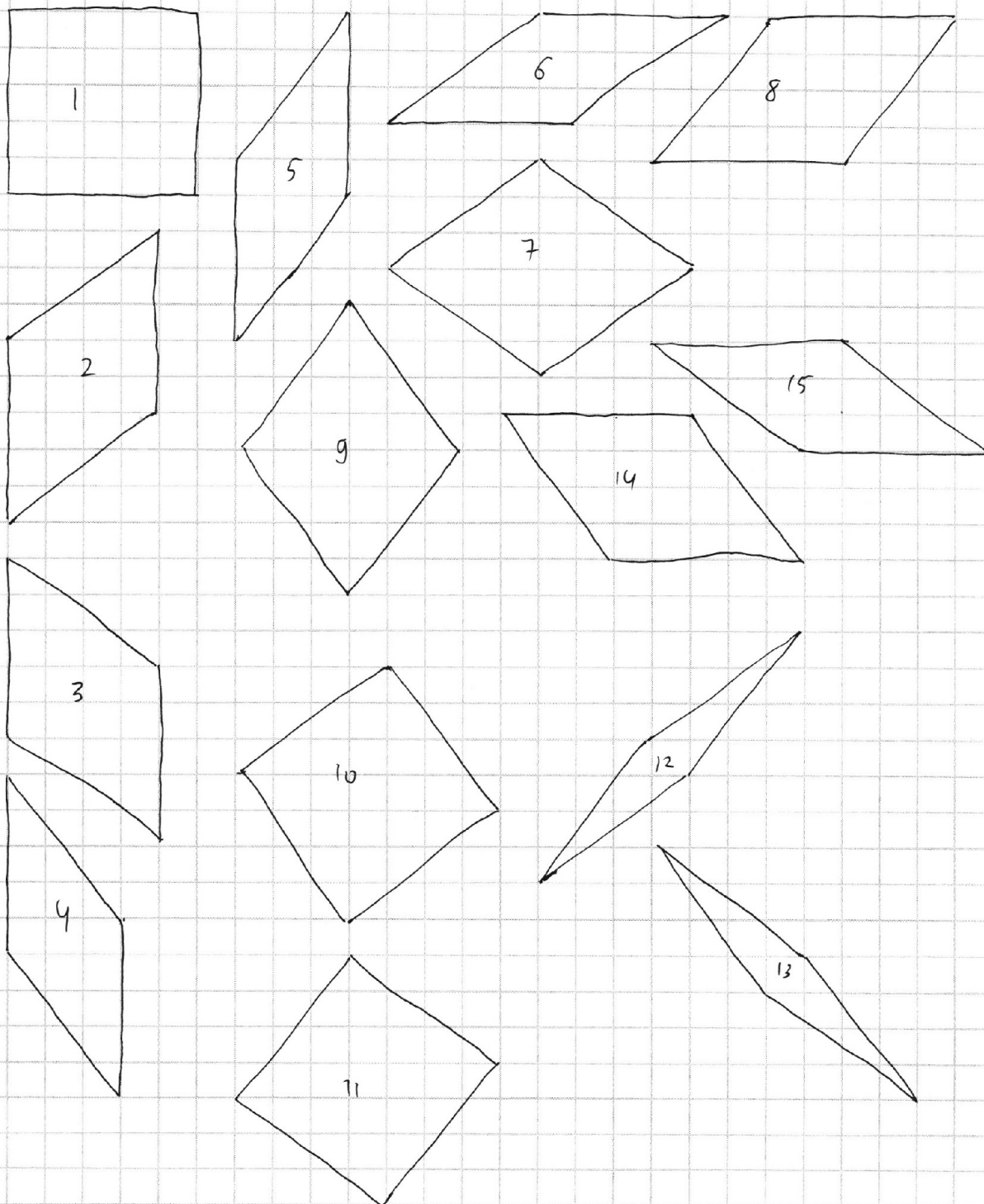
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Р.С. я при, когда показываю форму роботов и их сторон, подразумеваю, что оси координат у меня направлены вдоль линий сетки, а одна сторона клетки — единичный отрезок



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим, что $2025 \equiv 1 \pmod{23}$, $23 \cdot 2^x \equiv 0 \pmod{23}$~~

Заметим, что y^2 — целое (т.к. $y \in \mathbb{Z}$), $2025 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 23 \cdot 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ т.к. $23 \nmid 2$, то $x \geq 0$

Также заметим, что если $(x; y)$ удовлетвор. уравнению, то $(x; -y)$ ^{тоже} удовлетвор. уравнению, т.к. $y^2 = (-y)^2$ ~~будем рассматривать $y \geq 0$, так как, если $y < 0$, то $(x; -y)$ — тоже решение, поэтому ответ по y~~

Заметим, что $2025 + 23 \cdot 2^x > 2025 = 45^2 \Rightarrow y > 45$ (т.к. $f(x) = y^2$ ^{возрастает} на промежутке $[0; +\infty)$). $2025 \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 23 \cdot 2^x + 2025 \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow y^2 \equiv 1 \pmod{23}$. Посмотрим на все остатки по $\text{mod } 23$

и их квадраты:

0

ост. квадрат. по $\text{mod } 23$

0 0

1 1

2 4

3 9

4 16

5 2

6 13

7 3

8 18

9 12

10 8

11 6

12 6

13 8

14 12

15 18

16 3

17 13

18 2

19 16

20 9

21 4

22 1

По $\text{mod } 23$ только остатки 1 и 22 дают 1 в квадрате $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \equiv 1 \pmod{23} \\ y \equiv -1 \pmod{23} \end{cases}$$

При $y \equiv 1 \pmod{23}$: $y > 45 \Rightarrow y \geq 47$. $y = 47 \Rightarrow 23 \cdot 2^x + 2025 = 47^2 \Rightarrow 23 \cdot 2^x = 47^2 - 45^2 = (47-45)(47+45) = 8 \cdot 23 = 23 \cdot 2^3 \Rightarrow x = 3$. Одна пара

найдена: $(3; 47)$ при $y \equiv 47 \pmod{23} \Rightarrow y \geq 47$

при $y > 47$: $y \geq 70$ (т.к. $y \equiv 1 \pmod{23}$) $\Rightarrow 23 \cdot 2^x = y^2 - 45 = (y-45)(y+45)$. $45 \equiv -1 \pmod{23}$

$\Rightarrow y+45 \equiv 23$ (т.к. $y \equiv 1 \pmod{23}$) $\Rightarrow y+45 \equiv 23 \pmod{23} \Rightarrow y-45$ — степень двойки (т.к.

$23 \cdot 2^x \equiv 23 \pmod{23}$, 2^x — простое множитель), пусть $y-45 = 2^p$. $y+45 \equiv 23$, но

при этом $y^2 - 2025 = 23 \cdot 2^x \Rightarrow y+45 = 23 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) (т.к. в члках случаев

получает лишние простые множители). $\leftarrow$ т.к. $y+45 > 46$

$$2^n = \frac{y+45}{23} \quad 2^p = y-45 \quad p \geq n \Leftrightarrow 2^n \leq 2^p \Leftrightarrow \frac{y+45}{23} \leq y-45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22y \geq 45 \cdot 24 \Leftrightarrow y \geq \frac{45 \cdot 24}{22} = \frac{45 \cdot 12}{11} + \frac{90}{11} = 45 + \frac{88+2}{11} = 49 + \frac{2}{11} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y \geq 50$ (т.к. $y \in \mathbb{Z}$) ~~а это доказали ранее~~ (т.к. $y \geq 70$). В силу

равносильности переходов $p \geq n \Rightarrow \text{НОД}(y+45; y-45) = \text{НОД}(y-45; 90)$

(Алг. Евклида) $= 2^n \Rightarrow 90 \cdot 2^n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow y+45 = 23 \cdot 2 = 46 \Rightarrow y = 1$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $y \equiv 1 \pmod{23}$ подходит только пара $(3; 47)$

$$\text{P.S. } \left. \begin{aligned} \text{НОД}(y-45; y+45) &= \text{НОД}(2^p; 23 \cdot 2^n) \\ n &\leq p \text{ (доказано)} \end{aligned} \right\} \text{НОД}(y-45; y+45) = 2^n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $y \equiv -1 \pmod{23}$:

$$y > 45 \Rightarrow y \geq 68$$

$$y \equiv -1 \pmod{23} \Rightarrow y - 45 \equiv 0 \pmod{23} \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot 2^k \quad (k \in \mathbb{N}, y \geq 68), \text{ потому что } y^2 - 2025 = (y+45)(y-45) = 23 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$\Rightarrow y - 45$ не может делиться ни на какие простые множ., кроме 23 и 2)

$$y + 45 \not\equiv 0 \pmod{23} \text{ (т.к. } y - 45 \text{ уже } \equiv 0 \pmod{23}, \text{ а в итоге } y^2 - 2025 = 23 \cdot 2^x \text{ 23 в первой степени)} \Rightarrow y + 45 =$$

$$= 2^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{т.к. } y + 45 > 1$$

$$\cancel{y + 45 > y - 45} \Rightarrow y + 45 > y - 45 \Rightarrow 2^n > 2^k \Rightarrow n > k \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{НОД}(y-45; y+45) = \text{НОД}(23 \cdot 2^k; 2^n) = \\ = 2^k \text{ (т.к. } k < n) \end{array}$$

$$\text{Запомним, что } \text{НОД}(y+45; y-45) = \text{НОД}(y-45; 90) \text{ (алг. Евклида)} = 2^k \text{ (т.к. } k < n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 : 2^k \Rightarrow |k| \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot 2^k = 46 \Rightarrow y = 91 \Rightarrow y + 45 = 136 = 2^n \Rightarrow \text{противоречие} \Rightarrow y \equiv -1 \pmod{23} \text{ не бывает}$$

$$(k=0 \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot 2^0 = 23 \Rightarrow y = 68 \Rightarrow y + 45 = 113 = 2^n \Rightarrow \text{противоречие} \uparrow)$$

Получает один ответ (3; 47) и, как оговорено в начале, подходит ещё (3; -47). Выходит это все пары подходящих (x; y)

$$\text{Ответ: } \{(3; 47); (3; -47)\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2 - \text{симметрично отн. } x, y \Rightarrow y^2 - 4y - a \text{ запишем на } f(x) = x^2 - 4x - a$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - \text{окружность (если график смотреть) с центром в } (0, 0) \text{ и радиусом } |a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f) = [-|a|, |a|]$$

$$f(x) = x^2 - 4x - a = (x-2)^2 - (a+4)$$

абсцисса вершины

↑ параболы ветвями вверх. $x_{\text{в}} = 2$

Парабола ветвями вверх $\Rightarrow$ максимум на концах области её определения (при $x = \pm |a|$) $\Rightarrow$ её максимум $= \max(f(|a|), f(-|a|))$. $f(-|a|) > f(|a|)$ т.к.

$$f(-|a|) \geq f(|a|) \Leftrightarrow (-|a|-2)^2 - (a+4) \geq (|a|-2)^2 - (a+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|a|+2)^2 \geq (|a|-2)^2 \text{ т.к. } |a|+2 \geq |a|-2 \Rightarrow \text{в силу равносильности переходов}$$

$$f(-|a|) \geq f(|a|) \Rightarrow \max_{[-|a|, |a|]} f(x) = f(-|a|) = (|a|+2)^2 - a - 4 = 6 \text{ решим это уравнение}$$

$$\text{при } a \geq 0: (a+2)^2 - a - 4 = 6 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 6 = 0 \quad D = 3^2 + 4 \cdot 6 = 33 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}, \text{ но } a \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{при } a < 0: (-a+2)^2 - a - 4 = (a-2)^2 - a - 4 = 6 \Leftrightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a-6)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 6, \text{ но } a < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1$$

$$\text{ответ: при } a \in \left\{ -1; \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right\}$$

$$* \left| |a|+2 \right| \geq \left| |a|-2 \right| \text{ т.к. } |a|+2 \geq 2$$

$$|a|-2 \geq -2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

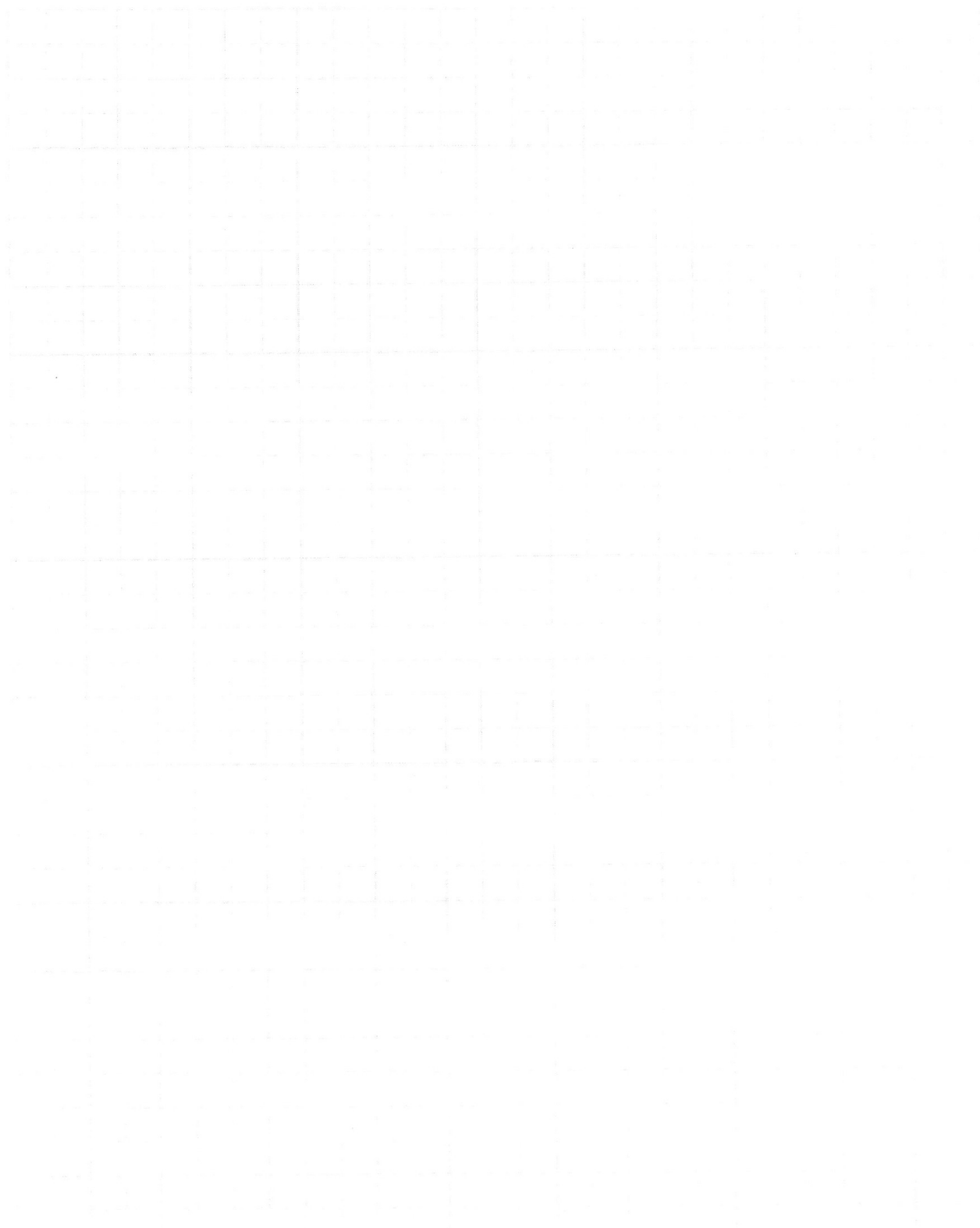
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$68 + 45 = 113$

$y = 68$

$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$

$23 \cdot 2^{x-1} + 23 \cdot 2^{x-1} + 45^2 = y^2$

$x \geq 2$

$23 \cdot 2^{x-1} + 23 \cdot 2^{x-1} + 45^2 = y^2$

$x = 2k+1$

$23 \cdot 2^{2k+1} + 45^2 = y^2$

$23 \cdot 2^{2k} + 23 \cdot 2^{2k} + 45^2 = y^2$

$(45 + 23 \cdot 2^k)^2 + 23 \cdot 2^k - 23 \cdot 2^k = y^2$

$23 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$

$23 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$

$y-45$

$y \equiv 1 \pmod{23}$

N

$(n-3) + (n-2) + (n-1)$

$2025 = 23 \cdot 88 + 1$

$23 \cdot 2^x + 2025 \equiv 1 \pmod{23}$

$y \equiv 1 \pmod{23}$

$y = 47$

$x = 3$

$47^2 - 45^2 = 2 \cdot 47 \cdot 2 = 184$

$47 + 45 = 92$

$184 \mid 23$

8

$\pm \sqrt{23 \cdot 2^x + 2025}$

$y = y$

$(y-45)$

$2 \cdot 92$

68

$2 \cdot 4$

46725

45

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$(x-2)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$y^2 - 4y + 1 = (x-2)^2 - 3$

$45 \equiv -1$

23

$25 \cdot 115$

$y - 45$ степень двойки

$\frac{y-45}{23}$ не

144

169

23

161

$23 \cdot 6$

138

23

113

70

$70^2 - 45^2 =$

$= 25 \cdot 115$

113

23

$(68+45) \mid (68-45)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

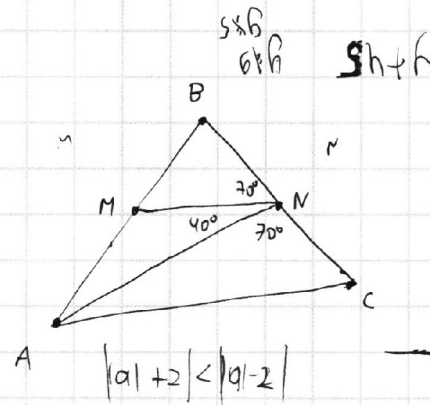
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{aligned} z &= sh+h \\ y &= sh-h \\ z &= sh-h \end{aligned}$$

$$x = p + x$$

$$\begin{aligned} \xi\xi &= 9 \cdot h + 6 = 0 \\ \frac{2}{-3 \pm \sqrt{33}} &= 10 \end{aligned}$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (n + n(n+1) + 1) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{2CN}{AM}$$

$$-|a| + 2 < |a| + 2 < |a| - 2$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\begin{aligned} y^2 - 4y - a \\ |a| - 2 < |a| + 2 \end{aligned}$$

$$-a \leq y \leq a$$

$$\frac{8 \pi}{2}$$

$$8h$$

$$sh - \xi h$$

$$8 \xi 1$$

$$sh - h$$

$$(sh - \xi h) / (sh + \xi h)$$

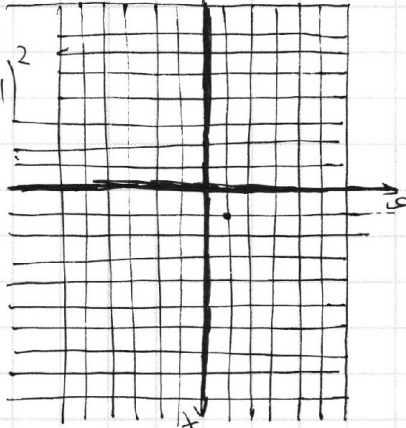
$$f(y) = y^2 - 4y - a \quad D(f) = \mathbb{R}, mo$$

$$\frac{26}{h \times \xi 2}$$

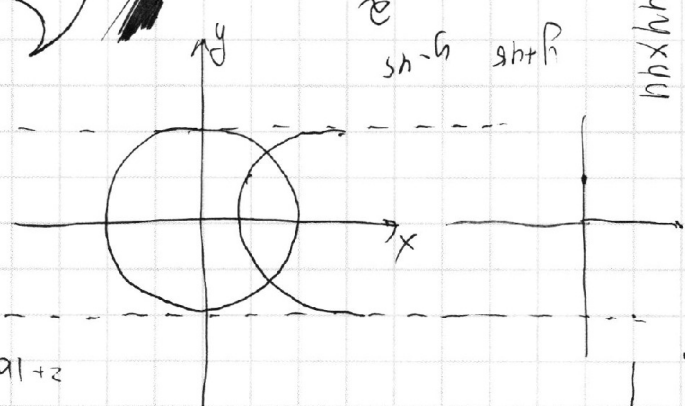
$$y - 45$$

$$b \xi + \xi b =$$

$$\begin{aligned} &= h - b - h + b h + \xi b = (h + b) - (z + a) \\ &= (h + b) - (z - x) \end{aligned}$$



$$n = 16$$



$$Q = 6$$

$$x^2 y^2 = 6^2$$

$$y^2 - 4y - a$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5^2 \\ 0 & 5 \end{aligned}$$

$$(sh - 16) / (sh + 16) = \frac{sh - 16}{sh + 16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 =$$

$$= 7n^2 + 2(1+4+9) = 7n^2 + 28$$

$$7n^2 = N^5$$

$$2^5 \cdot 7^5$$

$$2^5 \cdot 7$$

$$7^2$$

$$2^2 \cdot 7$$

$$7^{10}$$

$$2^{10} \cdot 7^5$$

$$7^{15}$$

$$7$$

$$y-45 \equiv 2 \pmod{23}$$

$$f = \frac{6.5}{2}$$

$$6068$$

у=1

$$y \equiv 1 \pmod{23}$$

$$y^2 - 45^2 = 23 \cdot 2^x$$

y-45-степень двойки

23

$$(y-45)(y+45) = 23$$



$$\begin{array}{r} 7 \ 1 \\ 3 \ y \mid 3 \ 7 \\ \times \\ \hline 1 \ 4 \ 8 \ 0 \\ 1 \ 5 \ 1 \ 7 \end{array}$$

$$y \equiv 1 \pmod{23}$$

$$\begin{aligned} y-45 &= 23 \cdot 2^k \\ y+45 &= 2^n \end{aligned}$$

$$(y-45; y+45) = \frac{y+45}{23}$$

$$(y-45)$$

$$(y-45; 90)$$

$$\begin{aligned} y-45 &= 2^k \\ y+45 &= 2^l \cdot 23 \end{aligned}$$

$$(91+45)(91-45)$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ 136 \ 23 \end{array}$$

$$\text{НОД}(y-45; y+45) = 2^{\min(k,l)}$$

$$(y-45; 90) = 2^p$$

$$90 : 2^p = 1$$

$$90 = 2 \cdot 45$$

$$n \geq 1$$

$$y+45 \leq 23y-23 \cdot 45$$

$$y+45 \leq 23y-23 \cdot 45$$

$$45 \cdot 24 \leq 22y$$

$$y \geq \frac{45 \cdot 24}{22} = \frac{45 \cdot 22 + 90}{22} = 45 + \frac{90}{22}$$

$$\begin{array}{r} 369 \\ \times 16 \\ \hline + 2214 \\ 3690 \\ \hline 5904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 1 \ 9 \mid 9 \ 0 \\ \times \ 1 \ 7 \ 0 \\ \hline 1 \ 5 \ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \ 7 \\ 3 \ 7 \mid 3 \ 7 \\ \times \ 2 \ 7 \ 3 \\ \hline + \ 1 \ 1 \ 7 \ 0 \\ \hline 1 \ 4 \ 4 \ 3 \end{array}$$

$$1443 \cdot 2 = 2886$$

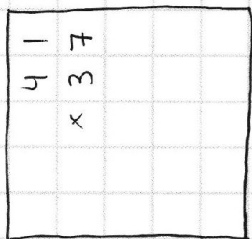


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

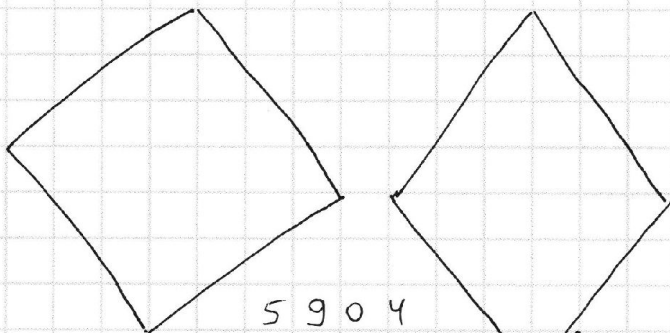
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



003. x



5904
+ 2886

8790

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

003: $x^2-x-2 \geq 0$ $(x-2)(x+1) \geq 0$ $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-120$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

при $x \geq 1$: $\sqrt{}$

при $x \leq 1$: $x^2-x-2 \geq 1-2x+x^2$

$$x \geq 3$$

20906

6068
+ 6048

12116
+ 8790

20906

20906
+ 1600

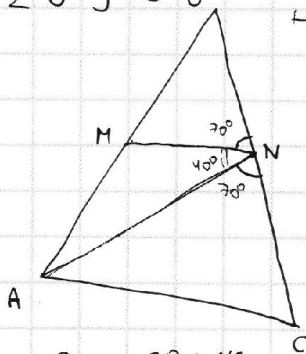
22506

$$\frac{BN}{BC-BN} = \frac{2BM}{AB-BM}$$

$$BN \cdot AB - BN \cdot BM = 2BM \cdot BC - 2BN \cdot BM$$

$$BM \cdot AB - BN \cdot BM = 2BM \cdot BC$$

$$BM(AB+BM) = 2BM \cdot BC$$

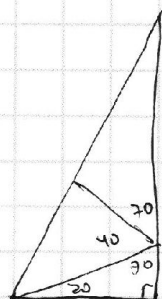
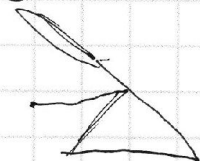


$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{AM}$$

$$CN = BC -$$

$$\angle MAC < 40^\circ \Rightarrow \angle A(N) > 70^\circ$$



44
15125
x

3048
3048

6

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{AM} \Rightarrow \frac{BM}{AM} < \frac{BN}{NC}$$

$$BM \cdot AM = AB \cdot BM$$

$$NC = BC - BM$$

42
x36

252
12360

10125