



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361? ТЧ (✓)

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N . ТЧ (✓)

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6}_{\geq 0} \geq \underbrace{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1}_{\geq 0} + |7 - 2x|.$$

ТЧ (✓)

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом. КОМБА (✓)

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

ТЧ (✓)

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8. ТЧ (✓)

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$. РЕЗУЛТАТ (✓)

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 47 \\ \hline 287 \\ + 1640 \\ \hline 1927 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221 \\ 2025 \\ + 5781 \\ \hline 5796 \\ 2696 \\ \hline 16258 \end{array}$$

$$\frac{11}{29} \quad \frac{14}{22} \quad + \frac{4}{6}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем делители числа 361: $361 = 19^2$

Далее преобразуем данное в условия выражение:

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) = n! (n+2 + n^2 + n + 2n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 = n! (n+2)(n+2)$$

Тогда, так как все это выражение должно быть кратно 19, то необходимо и достаточно того, чтобы два множителя были кратны 19 или одно было кратно 361. Разберем все случаи для нахождения наименьшего.

1) $n! : 361 \Rightarrow n \geq 2 \cdot 19 = 38$

2) $(n+2) : 361 \Rightarrow n \geq 359$

3) $n! : 19, (n+2) : 19 \Rightarrow$ из первой условия: $n \geq 19$, из второй: $n \geq 17$, то есть итог: $n \geq 19$

4) $(n+2) : 19$ и $(n+2) : 19 \Rightarrow n \geq 17$

Видим, что наименьший случай: $n \geq 17$. Ясно тогда, что минимальное значение хотя бы 17

А ответом является число 17 (меньше не может быть, как доказано в условии):

$$17! + 18! + 19! = 17! (1 + 18 + 18 \cdot 19) = 17! (19 + 18 \cdot 19) = 17! \cdot 19^2 = 17! \cdot 361, \text{ что очевидно кратно } 361.$$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть минимальное число в последовательности - $(m-2)$
Тогда запишем сумму квадратов пяти последоват. чисел.
 $(m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 = m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 = 5m^2 + 10$
Тогда, мы можем записать уравнение где N^3 :
 $N^3 = 5m^2$. Отсюда, понятно, что $N^3 : 5 \Rightarrow N : 5$, так как 5 - простое число. Значит в $N^3 : 5^3$ и следовательно $5m^2 : 5^3 \Rightarrow m^2 : 25$. Ясно, что минимальное N равно 5, но такой ответ противоречит условию. Тогда, мы должны увеличить N , а с ним и N^3 и m^2 . Так как $m^2 : 25$ - это доказанное выше про делиться на 5 верно, то для увеличения N мы должны "добавить" правую часть на какой-то куб $\rightarrow$ этот куб должен содержаться в m^2 , значит это будет уже не куб, а число в 6 степени (минимум в 6 степени). При этом это число должно быть минимальным (и obviously не 1). Ясно, что это число перемножив на миним. 2^6 . Тогда, m^2 представляет из себя $5^2 \cdot 2^6$. Найдем отсюда N :
 $N^3 = 5 \cdot 5^2 \cdot 2^6 = 5^3 \cdot 2^6 \Rightarrow N = 5 \cdot 2^2 = 20$

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

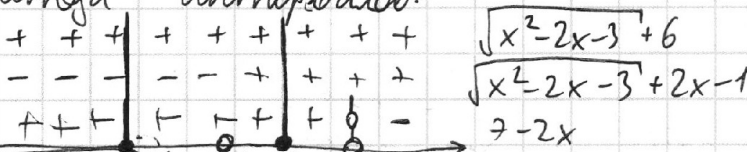
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала сразу обозначим направление для корня:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0. \text{ Решим это неравенство:}$$

Найдем: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow D = 4 + 3 \cdot 4 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$,
отсюда $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ (так как $a = 1, 1 > 0$, то ветви направлены вверх)

Теперь введем рассматриваемые промежутки с помощью метода интервалов:



1) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$; $6 \neq 0 \Rightarrow$ их сумма ~~не~~ > 0 всегда

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$, а $2x - 1$ не всегда. Найдем, когда функция становится отрицательной:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} < 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < (1 - 2x)^2 \\ 1 - 2x > 0 \Rightarrow x < 0.5 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 < 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0$$

ветви

$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$ нет корней, а $a = 3$, значит графика параболы направлены вверх и отсюда функция $y = 3x^2 - 2x + 4$ строго положительна, значит, при $x < 0.5$ выражение меньше 0.

3) Найдем момент, когда выражение меньше 0: $7 - 2x < 0 \Rightarrow 7 < 2x \Rightarrow x > 3.5$

Таким же образом "метод интервалов" обратим "ворота" $\Rightarrow$ значения в них дают отрицательное значение выражения $\Rightarrow$ внутри этих "ворот" промежутки не рассматриваются.

Теперь, по "методу" выделим интересные нас интервалы (интервалы с знаменитостями): $(-\infty; -1]$

1. Промежуток $(-\infty; -1]$. Раскроем модуль:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x. \text{ В этом промежутке } 2 - 4x > 0, \text{ поэтому:}$$

$$4x^2 - 4x - 6 \geq 4 - 16x + 16x^2$$

$$12x^2 - 12x + 10 \leq 0$$

$a = 12 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вверх

$$D = 144 - 4 \cdot 10 \cdot 12 = -336 < 0, \text{ следовательно функция}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

строю больше нуля и у неравенства нет решений.

2. Проинтервал $[3; 3,5]$. Расширим могут

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$6 \geq 6 \rightarrow$ верно, значит берем весь этот проинтервал.

3. Проинтервал $(3,5; +\infty)$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$6 \geq 4x - 8 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow x \leq 3,5$$

Противоречие с взятым проинтервалом, значит здесь нет решений.

Итого: подходит лишь проинтервал $[3; 3,5]$. Это и есть итоговый ответ

Ответ: $[3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

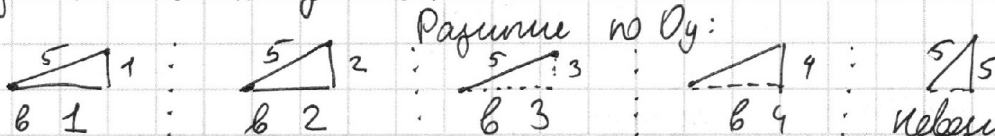
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим, как на координатной плоскости могут располагаться отрезки длиной 5.

1. Параллельно оси абсцисс или ординат
2. Теперь уже они наклонены. Будем смотреть разное раз-
личие в координатах по Oy и смотреть, возможно ли это в
целых числах для Ox

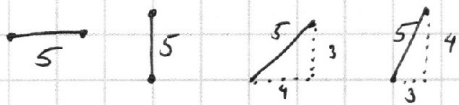


Будем находить различие по Ox как на- или равно 5, т.е. имеем
мет прямоугольного треугольника $\geq$ гипотенузы

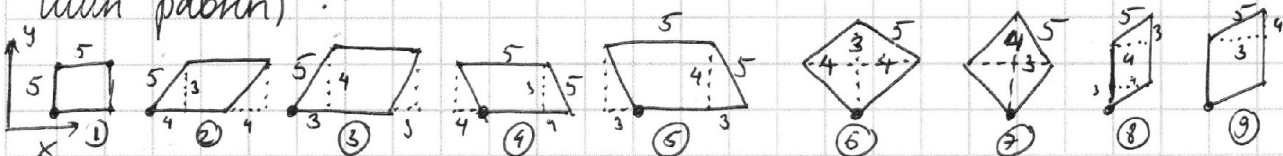
$$\Delta x^2 = 25 - 1 : \Delta x = \sqrt{25 - 4} = 3 : \Delta x = \sqrt{25 - 9} = 4 : \Delta x = \sqrt{25 - 16} = 3$$

Противоречие! Противоречие
 Δx - целое

Итого мы можем составить ряды:



Рассмотрим различные варианты ромбов, которых можно
составить: (учитывая то, что углы у противоположных вер-
шин равны).



Большее число так как будет нарушаться свойство
ромба (заметьте, что ② и ④, ③ и ⑤ - симметричны
друг другу. У ①, ⑥, ⑦ такой нет, потому что у них есть
все 4 стороны симметричны)

Рассмотрим, сколько на координатной плоскости можно
разместить каждой фигур (①, ②, ..., ⑨). В каждой фигуре
будем считать за левую нижнюю вершину, ведь задав
① ее задание все фигура типа.

① Куда можно поместить левую нижнюю вершину:
 $Ox: [1; 50 - 4.5] \Rightarrow [1; 45]$, $Oy: [1; 50 - 5] \Rightarrow [1; 45]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знаем всего вариантов: $45 \cdot 45 = 45^2$

② Аналогично, по $Ox: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$
 $Oy: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$

Знаем всего вариантов $41 \cdot 47$

③ Аналогично, по $Ox: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$ } Всего вариантов
 $Oy: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$ } $42 \cdot 46$

④ Аналогично, по $Ox: [1+4; 50-5] \Leftrightarrow [5; 45]$ } Вариантов: $41 \cdot 47$
по $Oy: [1; 50-3] \Leftrightarrow [1; 47]$ }

⑤ Аналогично, по $Ox: [1+3; 50-5] \Leftrightarrow [4; 45]$ } Вариантов: 45^2
 $Oy: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$ }

⑥ Аналогично, по $Ox: [1+4; 50-4] \Leftrightarrow [5; 46]$ } Вариантов $42 \cdot 44$
(Здесь не целые $Oy: [1; 50-6] \Leftrightarrow [1; 44]$)

⑦ Аналогично ⑥: $Ox: [1+3; 50-3] \Leftrightarrow [4; 47]$ } Вариантов $44 \cdot 42$
 $Oy: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$ }

⑧ Аналогично: $Ox: [1; 50-4] \Leftrightarrow [1; 46]$ } Вариантов $46 \cdot 42$
 $Oy: [1; 50-8] \Leftrightarrow [1; 42]$ }

⑨ Аналогично: $Ox: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$ } Вариантов $47 \cdot 41$
 $Oy: [1; 50-9] \Leftrightarrow [1; 41]$ }

Получно, что всего - общее количество равно сумме вариантов:

$$x = 45^2 + 41 \cdot 47 + 42 \cdot 46 + 41 \cdot 47 + 45^2 + 42 \cdot 44 + 44 \cdot 42 + 46 \cdot 42 + 47 \cdot 41 = 45^2 + 3 \cdot 41 \cdot 47 + 3 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 42 \cdot 44 = 2025 + 5781 + 5796 + 2696 = 16298$$

Ответ: 16298



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

Рассмотрим выражение по модулю 3:

$$2^x \equiv y^2 \pmod{3}$$

Какие остатки может давать y^2 :

$$\begin{array}{r|rr} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} y \\ y^2 \end{array}$$

Значит 2^x может давать такие остатки. Т.е. $2^x \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда какими может быть x ? Только четным, т.е. $2 \equiv 2, 2^2 \equiv 1, 2^3 \equiv 1 \cdot 2 = 2, 2^4 \equiv 2 \cdot 2 = 1$ и т.д.

(или рассматриваем натуральности x и y , так как если они будут ~~противоположными~~ целыми, но не натуральными, то выражение справа будет < 1 , а слева > 1 Противоречие)

Попробуем, что x — четное.

$$\text{Далее, } 19 \cdot 2^x \equiv 0 \pmod{2}, 2025 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{2}$$

Значит, y нечетное. Аналогично, y не кратно 3, 5, 19, так как $2025 = 45^2$ и не кратно 19.

Перенесем 2025 в другую часть, получим

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

Значит одна из скобок должна быть кратна 19.

А также, обе скобки кратны 2. Также, сумма степеней двоек, на которые кратны скобки равна x . Обе скобки могут быть кратны только 19 и 2.

$$1) \text{ Пусть } y-45: 19, \text{ тогда } \begin{cases} y-45 = 19 \cdot 2^a \\ y+45 = 2^b \end{cases}$$

Значит, $b > a$.

$$y = 2^b - 45$$

$$2^b - 45 - 45 = 19 \cdot 2^a$$

$$2^b - 90 = 19 \cdot 2^a$$

$$2^a(19 - 2^{b-a}) = -90$$

$$2^a(2^{b-a} - 19) = 90 = 45 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$$

$$\text{Отсюда, } a = 1, 2^{b-1} - 19 = 45$$

$$2^{b-1} = 64 \Rightarrow b-1 = 6 \Rightarrow b = 7$$

$$\text{Тогда, } x = a + b = 8, y = 128 - 45 = 83$$

Получаем (8; 83)

$$2) \text{ Пусть } y+45: 19, \text{ тогда } \begin{cases} y+45 = 19 \cdot 2^a \\ y-45 = 2^b \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 2^b + 45 \Rightarrow 2^b + 90 = 19 \cdot 2^a$$

~~или~~ $19 \cdot 2^a - 2^b = 90$

Пусть $a < b$, тогда: $2^a(19 - 2^{b-a}) = 5 \cdot 9 \cdot 2$

Отсюда $a = 1$, $19 - 2^{b-1} = 45$. Противоречие ($2^{b-1} > 0$)

Тогда $b < a$, тогда $2^b(19 \cdot 2^{a-b} - 1) = 90 = 5 \cdot 9 \cdot 2$

Отсюда, ~~то~~ $b = 1$, а $19 \cdot 2^{a-b} - 1 = 45$

$$19 \cdot 2^{a-b} = 46$$

46: 19, потому это уравнение не имеет решений.

Итого получаем один ответ: (8; 83)

Ответ: (8; 83)

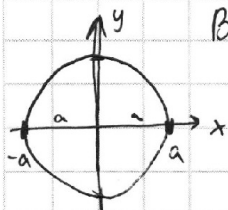


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ясно, что $x^2 + y^2 = a^2$ — это уравнение окружности с центром в точке O (начало координат) и с радиусом a . Отсюда очевидно, что $a \geq 0$ (иначе такая окружность не имеет смысла). Нарисуем схематично эту окружность.



Видно, что значение x принадлежит в пределах: $[-a; a]$.

Далее, решим второе уравнение:

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + (a - 8) \leq 0$$

$$D = 36 - 4(a - 8) = 68 - 4a = 4(17 - a)$$

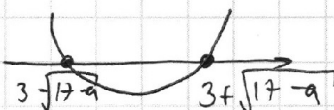
Нули функции при: $x = \frac{6 \pm \sqrt{4(17-a)}}{2}$ и $x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{17-a}}{2}$

или: $x_1 = 3 + \sqrt{17-a}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{17-a}$

Тогда решениями неравенства будут значения:

(ветви параболы вверх, т.е. $a = 1, 1 > 0$)

$$x \in [3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}]$$



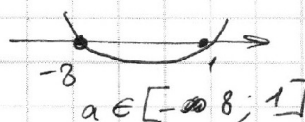
Отсюда понятно, что для выполнения условия необходимо, чтобы область $[3 - \sqrt{17-a}; 3 + \sqrt{17-a}]$ содержала в себе область $[-a; a]$. Отсюда получаем неравенства:

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{17-a} \leq -a \\ 3 + \sqrt{17-a} \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{17-a} \geq a+3 \\ \sqrt{17-a} \geq a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17-a \geq a^2+6a+9 \\ 17-a \geq a^2-6a+9 \\ 17-a \geq 0 \end{cases}$$

$$1) 17-a \geq a^2+6a+9$$

$$a^2 + 7a - 8 \leq 0, D = 49 + 4 \cdot 8 = 9^2$$

$$a_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -8$$

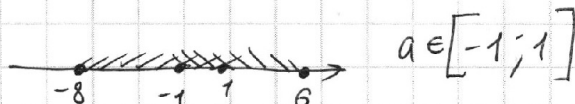


$$2) 17-a \geq a^2-6a+9 \Rightarrow a^2-5a-8 \leq 0 \Rightarrow D = 25 + 4 \cdot 8 = 7^2$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2}, a_1 = 6, a_2 = -1$$

$$3) 17-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 17$$

Объединяем



$$a \in [-1; 1]$$

Но также $a \geq 0 \Rightarrow a \in [0; 1]$

Ответ: $[0; 1]$

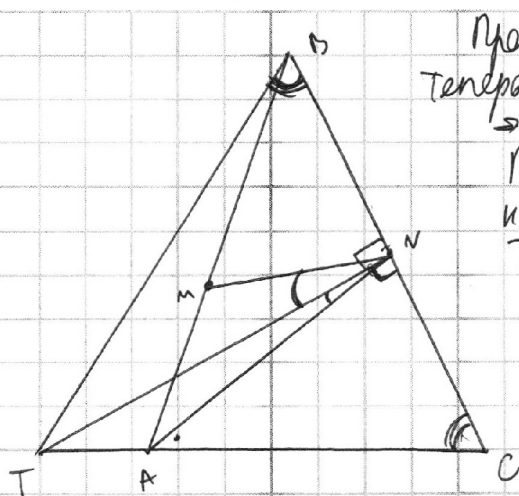


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Проведем биссектрису угла $\angle MNA$.
Теперь $\angle MNT = 10^\circ \Rightarrow \angle BNT = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle TMC = 90^\circ$

Пусть биссектриса угла пересекет AC в точке T.

Теперь у нас $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$$\frac{BN}{2BM} = \frac{NC}{MA}$$

В $\triangle BTC$ TN - высота, значит

$$\frac{BN}{BT} = \frac{NC}{TC}$$

$$\frac{BT}{2BM} = \frac{TC}{MA} \Rightarrow$$

Из этих двух выражений:
 $\operatorname{ctg} \angle C = NC/TC = \operatorname{ctg} \angle TBN \Rightarrow \angle C = \angle TBN$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

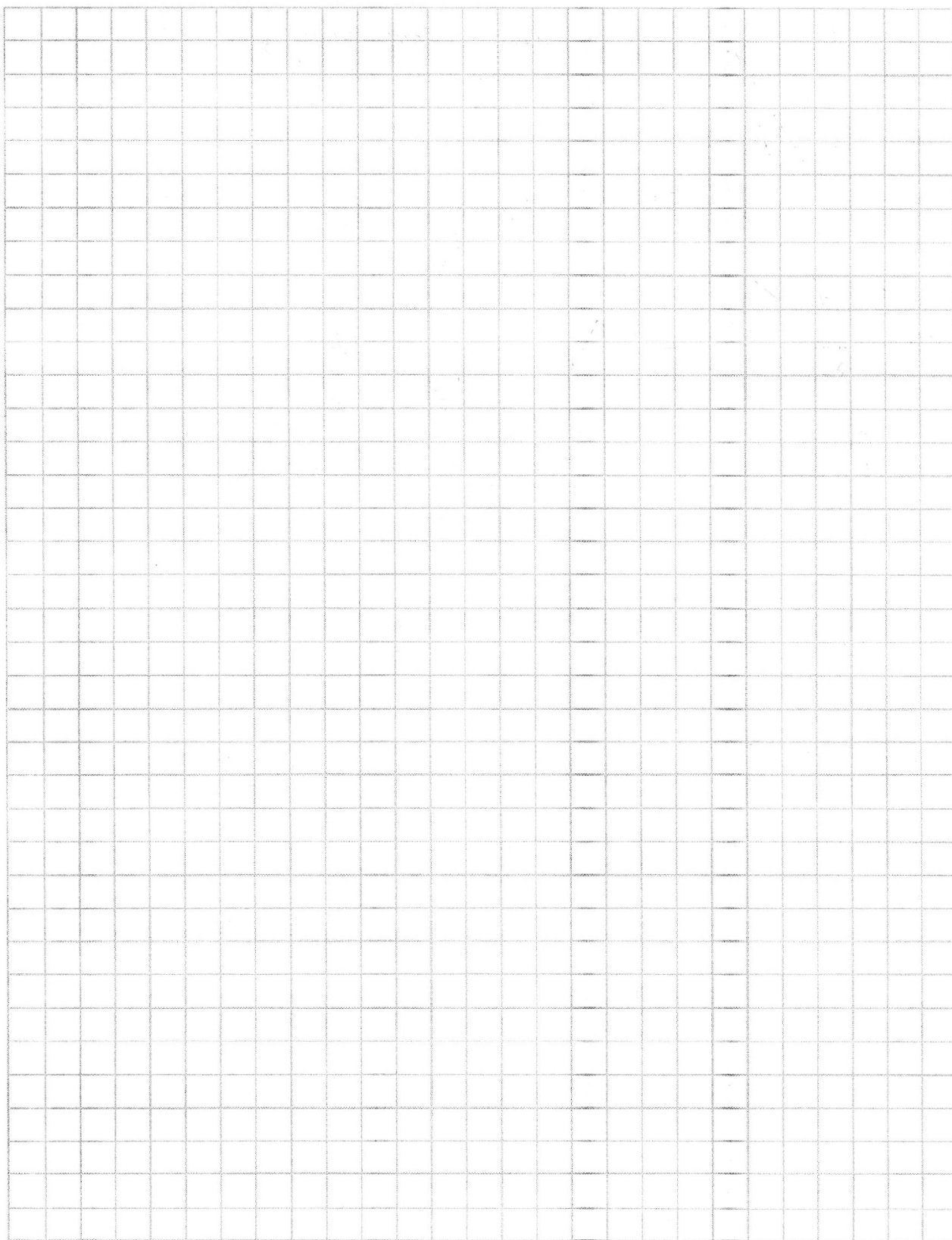
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Углы $\angle B = 15^\circ$ $\angle C = 20^\circ$ $\angle A = ?$

46

$BM \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$

$\frac{BM}{MA} = \frac{2 \cdot BM \cdot NC}{BM \cdot MA} = \frac{2 \cdot NC}{MA}$

$(BM + BM) \cdot NC = BM \cdot MA$

$BM \cdot NC + BM \cdot NC = BM \cdot MA$

Или 2^x y NC

$\frac{2}{2} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{16}{1} \quad \frac{32}{2}$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$

$2025 + 19 \cdot 4 + 76 + 76 + 76 \dots$

$2025 + 76 \cdot k = y^2$

$76k = (y - 45)(y + 45)$

$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$-2^x \equiv y^2 \pmod{5}$

$y \equiv \text{четный остаток по mod 5}$

$y < 90$

$2^x \equiv y^2 \pmod{9}$

$y^2 = 45^2 + 19 \cdot (2^k)^2$

$y^2 = 45^2 + 19 \cdot (2^k)^2$

$0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4$
 $0 \mid 1 \mid 4 \mid 4 \mid 1$

$0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7$
 $0 \mid 1 \mid 4 \mid 9 \mid 16 \mid 25 \mid 36 \mid 49$

45×47
 $1 \ 329$
 188
 2209

48×48
 $1 \ 84$
 2176
 -2025
 0091

$2 \ 48$
 $2 \ 1$

$(y - 45)(y + 45)$



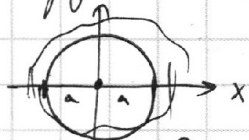
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Окружность с центром в O и радиусом a



$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + (a-8) \leq 0$$

$$D = 36 - 4(a-8) = 36 - 4a + 32 = 68 - 4a$$

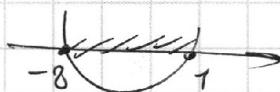
$$x \in (-a; 2a) \cap (2a; 4a) = 4(17-a)$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{17-a}}{2} = 3 \pm \sqrt{17-a}$$

$$x \in [2a-a; a]$$

$$\begin{cases} 3 + \sqrt{17-a} \geq a \\ 3 - \sqrt{17-a} \leq -a \end{cases}$$

$$a = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow a_1 = -8, a_2 = 1$$



$$[1; -8]$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$34 - 2a \geq 2a^2 + 18$$

$$34 - a \geq a^2 + 18$$

$$a^2 + a - 16 \leq 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 1$$

$$x^2 - 6x$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$1) y - 45 \div 19 \Rightarrow y = 19k + 45 \Rightarrow y \equiv 7 \pmod{19}$$

$$y_1 = 26, y_2 = 47, y_3 = 66, y_4 = 85, y_5 = 104, y_6 = 123, y_7 = 142, y_8 = 161, y_9 = 180, y_{10} = 199$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2^x$$

$$(64) \times 64$$

$$4056 - 2025$$

$$25600 - 2025$$

$$y \in 2, y \in 4, y \in 5$$

$$3 \times 19$$

$$153 - 153$$

$$23575$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

36! = ~~2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36~~ 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 113, 127, 131, 137, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 473, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 517, 521, 523, 527, 533, 541, 547, 557, 563, 569, 577, 581, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 683, 687, 691, 697, 701, 703, 707, 713, 719, 727, 731, 733, 737, 743, 749, 751, 757, 761, 763, 767, 773, 779, 781, 787, 791, 793, 797, 803, 809, 811, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 837, 841, 843, 847, 853, 857, 859, 863, 867, 871, 873, 877, 881, 883, 887, 893, 897, 901, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 927, 931, 937, 941, 943, 947, 953, 959, 961, 967, 971, 973, 977, 983, 989, 991, 993, 997, 1000

$36! \div 5 = 71$

$36! \div 11 = 31$

$36! \div 13 = 27$

$36! \div 17 = 21$

$36! \div 19 = 19$

$36! \div 23 = 15$

$36! \div 29 = 12$

$36! \div 31 = 11$

$36! \div 37 = 10$

$36! \div 41 = 9$

$36! \div 43 = 8$

$36! \div 47 = 7$

$36! \div 51 = 6$

$36! \div 53 = 5$

$36! \div 57 = 4$

$36! \div 61 = 3$

$36! \div 67 = 2$

$36! \div 71 = 1$

$36! \div 73 = 1$

$36! \div 79 = 1$

$36! \div 83 = 1$

$36! \div 89 = 1$

$36! \div 97 = 1$

$36! \div 101 = 1$

$36! \div 103 = 1$

$36! \div 107 = 1$

$36! \div 113 = 1$

$36! \div 127 = 1$

$36! \div 131 = 1$

$36! \div 137 = 1$

$36! \div 149 = 1$

$36! \div 151 = 1$

$36! \div 157 = 1$

$36! \div 163 = 1$

$36! \div 167 = 1$

$36! \div 173 = 1$

$36! \div 179 = 1$

$36! \div 181 = 1$

$36! \div 191 = 1$

$36! \div 193 = 1$

$36! \div 197 = 1$

$36! \div 199 = 1$

$36! \div 211 = 1$

$36! \div 223 = 1$

$36! \div 227 = 1$

$36! \div 229 = 1$

$36! \div 233 = 1$

$36! \div 239 = 1$

$36! \div 241 = 1$

$36! \div 251 = 1$

$36! \div 257 = 1$

$36! \div 263 = 1$

$36! \div 269 = 1$

$36! \div 271 = 1$

$36! \div 277 = 1$

$36! \div 281 = 1$

$36! \div 283 = 1$

$36! \div 293 = 1$

$36! \div 307 = 1$

$36! \div 311 = 1$

$36! \div 313 = 1$

$36! \div 317 = 1$

$36! \div 331 = 1$

$36! \div 337 = 1$

$36! \div 347 = 1$

$36! \div 353 = 1$

$36! \div 359 = 1$

$36! \div 367 = 1$

$36! \div 373 = 1$

$36! \div 379 = 1$

$36! \div 383 = 1$

$36! \div 389 = 1$

$36! \div 397 = 1$

$36! \div 401 = 1$

$36! \div 409 = 1$

$36! \div 419 = 1$

$36! \div 421 = 1$

$36! \div 431 = 1$

$36! \div 433 = 1$

$36! \div 437 = 1$

$36! \div 443 = 1$

$36! \div 449 = 1$

$36! \div 457 = 1$

$36! \div 461 = 1$

$36! \div 463 = 1$

$36! \div 467 = 1$

$36! \div 473 = 1$

$36! \div 479 = 1$

$36! \div 487 = 1$

$36! \div 491 = 1$

$36! \div 499 = 1$

$36! \div 503 = 1$

$36! \div 509 = 1$

$36! \div 517 = 1$

$36! \div 521 = 1$

$36! \div 523 = 1$

$36! \div 527 = 1$

$36! \div 533 = 1$

$36! \div 541 = 1$

$36! \div 547 = 1$

$36! \div 557 = 1$

$36! \div 563 = 1$

$36! \div 569 = 1$

$36! \div 577 = 1$

$36! \div 581 = 1$

$36! \div 587 = 1$

$36! \div 593 = 1$

$36! \div 599 = 1$

$36! \div 601 = 1$

$36! \div 607 = 1$

$36! \div 613 = 1$

$36! \div 617 = 1$

$36! \div 619 = 1$

$36! \div 623 = 1$

$36! \div 629 = 1$

$36! \div 631 = 1$

$36! \div 637 = 1$

$36! \div 641 = 1$

$36! \div 643 = 1$

$36! \div 647 = 1$

$36! \div 653 = 1$

$36! \div 659 = 1$

$36! \div 661 = 1$

$36! \div 667 = 1$

$36! \div 671 = 1$

$36! \div 673 = 1$

$36! \div 677 = 1$

$36! \div 683 = 1$

$36! \div 687 = 1$

$36! \div 691 = 1$

$36! \div 697 = 1$

$36! \div 701 = 1$

$36! \div 703 = 1$

$36! \div 707 = 1$

$36! \div 713 = 1$

$36! \div 719 = 1$

$36! \div 727 = 1$

$36! \div 731 = 1$

$36! \div 733 = 1$

$36! \div 737 = 1$

$36! \div 743 = 1$

$36! \div 749 = 1$

$36! \div 751 = 1$

$36! \div 757 = 1$

$36! \div 761 = 1$

$36! \div 763 = 1$

$36! \div 767 = 1$

$36! \div 773 = 1$

$36! \div 779 = 1$

$36! \div 781 = 1$

$36! \div 787 = 1$

$36! \div 791 = 1$

$36! \div 793 = 1$

$36! \div 797 = 1$

$36! \div 803 = 1$

$36! \div 809 = 1$

$36! \div 811 = 1$

$36! \div 817 = 1$

$36! \div 821 = 1$

$36! \div 823 = 1$

$36! \div 827 = 1$

$36! \div 829 = 1$

$36! \div 833 = 1$

$36! \div 837 = 1$

$36! \div 841 = 1$

$36! \div 843 = 1$

$36! \div 847 = 1$

$36! \div 853 = 1$

$36! \div 857 = 1$

$36! \div 859 = 1$

$36! \div 863 = 1$

$36! \div 867 = 1$

$36! \div 871 = 1$

$36! \div 873 = 1$

$36! \div 877 = 1$

$36! \div 881 = 1$

$36! \div 883 = 1$

$36! \div 887 = 1$

$36! \div 893 = 1$

$36! \div 897 = 1$

$36! \div 901 = 1$

$36! \div 907 = 1$

$36! \div 911 = 1$

$36! \div 913 = 1$

$36! \div 917 = 1$

$36! \div 919 = 1$

$36! \div 923 = 1$

$36! \div 927 = 1$

$36! \div 931 = 1$

$36! \div 937 = 1$

$36! \div 941 = 1$

$36! \div 943 = 1$

$36! \div 947 = 1$

$36! \div 953 = 1$

$36! \div 959 = 1$

$36! \div 961 = 1$

$36! \div 967 = 1$

$36! \div 971 = 1$

$36! \div 973 = 1$

$36! \div 977 = 1$

$36! \div 983 = 1$

$36! \div 989 = 1$

$36! \div 991 = 1$

$36! \div 993 = 1$

$36! \div 997 = 1$

$36! \div 1000 = 1$

$36! = 19^2$ и 19 - простое число

$n! + (n+1)! + (n+2)! : 19^2$ или $n : 19 \Rightarrow \checkmark$

$19(n! : 19 + (n+1)! : 19 + (n+2)! : 19)$

$19 \cdot (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) = 19 \cdot (1 + n+1 + n^2 + n+2n+2) = 19 \cdot (n^2 + 4n + 4) =$

$= 19 \cdot (n+2)^2 = 19 \cdot (n+2)(n+2)$ Необходимо и достаточно кратность 2

на 19: 1) $n! : 19$ и $(n+2) : 19 \Rightarrow \min : n=19$ и $n=17 \Rightarrow n=19$

2) $(n+2) : 19$ и $(n+2) : 19 \Rightarrow \min : n=17 \Rightarrow n=17$

Смешан, $\min n=17$: $n! \cdot (n+2)^2$ при $n=19$:

$17! + 18! + 19! = 17! (1 + 18 + 18 \cdot 19) = 17! (19 + 18 \cdot 19) = 17! \cdot 19 \cdot 19$

$N^2 (m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 =$

$= m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 =$

$= 5m^2 + 10 = 5m^2$ Вспомог 10: $N^2 = 5m^2$. Очевидно, что $\min$

N при $m=5$, но это противоречит в условию. Т.е. взять 5,

то $N:5 \Rightarrow$ в m есть 25. Далее для удобства в m вводим

куб $\Rightarrow \min 2^3 \Rightarrow N^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2^3 \Rightarrow N=10 \sim \min N$

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$

Кум: $x^2 - 2x - 3 = 0$: $D = 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 : x_1 = -1, x_2 = 3$

орб: $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$

x и $принимать: 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0,5 \Rightarrow x \geq 3$ но $\Rightarrow -2x \Rightarrow$

$+ \quad \text{Принимать: } (-\infty; 3], [3; 3,5], [3,5; +\infty) \geq 2x \Rightarrow x \leq 3,5$

$\text{Принимать: } (-\infty; -1] \cup [3; 3,5], [3,5; +\infty)$

1. $(-\infty; -1]$: $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$

$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$

$4x^2 - 4x - 6 \geq (2 - 4x)^2 \Rightarrow \dots$

2. $[3; 3,5]$: $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$

$6 \geq 6 \quad \checkmark$

3. $(3,5; +\infty)$: $6 \geq 2x - 1 + 7 - 2x \Rightarrow 6 \geq 6 \quad 2x - 1 - 7 + 2x = 4x - 8$

$4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow 3,5 \geq x$ противоречие не берем



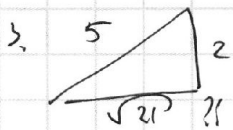
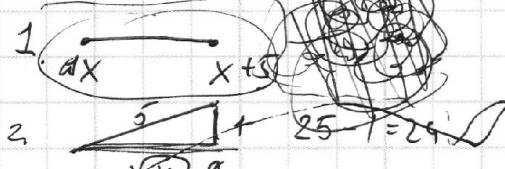
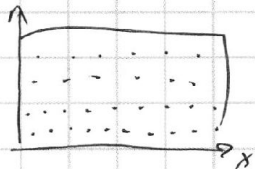
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

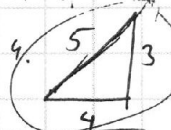
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

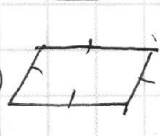
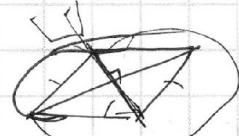
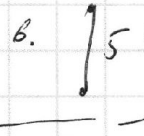
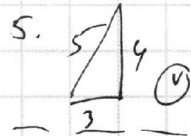
$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3} < 1-2x$ $\text{или } 1-2x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 2x \Rightarrow x \leq 0.5$
 $x^2-2x-3 < 1-4x+4x^2 \Rightarrow 3x^2-2x+4 > 0$ $D = 4-4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$, знаком не нулем
пусть и $a > 1 \rightarrow$ стандартно больше 0 $\text{или } x \leq 0.5$



$25-4=21$

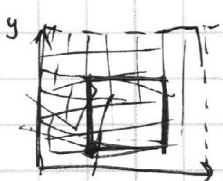


$25-9=16$



$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow (y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$

$x:2$



квадраты: $\text{крайнее левое: } [1; 15]$
Вариантов тогда: $45^2 = 2025$

левое $\text{или же: } [41; \text{по } O_x: [5; 45], O_y: [1; 47]$

Вариантов: $41 \cdot 47$

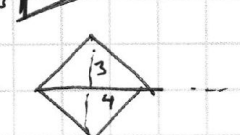
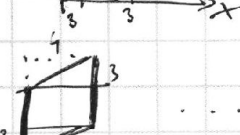
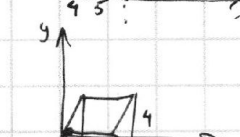
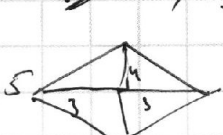
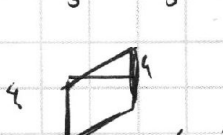
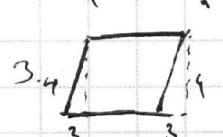
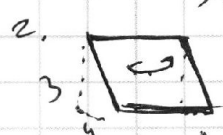
$O_x: [1; 41], O_y: [1; 47]$

Вариантов: $41 \cdot 47$

$2 \cdot 41 \cdot 47$

Вариантов: $O_x: [1; 42], O_y: [1; 46]$

Вариантов: $2 \cdot 42 \cdot 46$



$\oplus$