



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$289 = 17^2 \quad 17 - \text{простое число}$$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

$$\text{если } n=16, \text{ то } 17^2 \cdot 15! \stackrel{?}{:} 17^2 \quad (и)$$

если $n \leq 15$, то $(n-1)! \leq 15!$, но т.ч. 17 - простое \Rightarrow факториалы чисел меньших 17 $\not\vdots 17$ т.ч.

ни одно из чисел встречающихся в факториале не кратно 17;

$$(n+1)^2 \leq 16^2 \quad (\text{аналогично если } n \leq 15, \text{ то } n+1 \not\vdots 17 \Rightarrow)$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 \not\vdots 17 \Rightarrow \text{доказано, что } n \geq 16$$

Ответ: 16

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7 последовательных чисел (где $x \in \mathbb{N}_n$): (квадратов этих чисел)

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 =$$

$$= \underbrace{x^2 - 6x + 8x + x^2 + 9 + 9}_{(x-3)^2 + (x+3)^2} + \underbrace{x^2 + x^2 - 4x + 4x + 4 + 4}_{(x-2)^2 + (x+2)^2} + \underbrace{x^2 + x^2 - 2x + 2x + 1 + 1}_{(x+1)^2 + (x-1)^2} + x^2$$

$$= 7x^2 + 18 + 8 + 2 = 7x^2 + 28 \Rightarrow \text{когда вывели 28 осталось:}$$

$$7x^2 + 28 - 28 = N^5 \text{ (где } N > 8)$$

$$7x^2 = N^5 \text{ (} N > 8) \Rightarrow \begin{cases} N : 7 \\ N > 8 \end{cases} \Rightarrow N \geq 14, \text{ но}$$

если $N=14$, то $7x^2 = 14^5$

$$7x^2 = 7^5 \cdot 2^5$$

$$x^2 = 7^4 \cdot 2^5$$

$$x = \pm(7^2 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2}) \Rightarrow \text{не подходит т.к. } x \in \mathbb{N}_n \Rightarrow$$

$N : 7 \Rightarrow$ берём следующий N кратный 7 \Rightarrow

\Rightarrow если $N=21$, то $7x^2 = 21^5 \Rightarrow N \geq 21$

$$7x^2 = 7^5 \cdot 3^5$$

$$x^2 = 7^4 \cdot 3^5$$

$$x = \pm(7^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}) \Rightarrow$$

не подходит, т.к. $x \in \mathbb{N}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} N : 7 \\ N > 21 \end{cases} \Rightarrow$ берём следующий $\Rightarrow N \geq 28$

если $N=28$, то

$$7x^2 = 28^5$$

$$7 \cdot x^2 = 4^5 \cdot 7^5$$

$$x^2 = 7^4 \cdot 2^{10}$$

Пример: $\rightarrow x = 7^2 \cdot 2^5$ (т.к. точно не подходит)

Ответ: 28



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

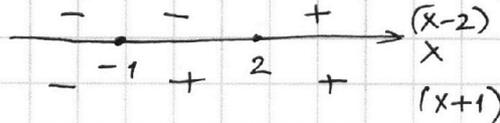
$$x^2-x-2 \text{ - под корнем} \Rightarrow x^2-x-2 \geq 0$$

$$x^2+x-2x-2 \geq 0$$

$$x(x+1)-2(x+1) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0 \quad x = -1, x = 2$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$



$$+ \quad - \quad + \quad (x-2)(x+1) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+5 > 0 \Rightarrow |\sqrt{x^2-x-2}+5| = \sqrt{x^2-x-2}+5$$

если $\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$ и $6-x \geq 0$, то

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x$$

$$5 \geq 5$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$x \leq 6$$

если $1-x > 0$

$$x < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1]$$

(условие корня)

$\sqrt{x^2-x-2} > 0$ отрицат \Rightarrow

$$x^2-x-2 \geq (1-x)^2$$

$\Rightarrow x$ - любое из допустимых \Rightarrow

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow x \in [2; 6]$$

$$\left. \begin{matrix} x \geq 3 \\ x < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{противоречие } \emptyset$$

2) если $\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$ и $6-x < 0$, то:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+x-6$$

$$-x < 6$$

$$x > 6$$

$$2x \leq 12$$

$$\left. \begin{matrix} x \leq 6 \\ x > 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{противоречие } \emptyset$$

\Rightarrow противоречие \emptyset

3) если $\sqrt{x^2-x-2}+x-1 < 0$ и $6-x \geq 0$, то:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 1-x-\sqrt{x^2-x-2}+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2}+2x-2 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$$

при этом условие:

$$\left. \begin{matrix} \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \\ \sqrt{x^2-x-2} < 1-x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{противоречие } \emptyset$$

$$\sqrt{x^2-x-2} < 1-x \text{ (в начале)}$$

4) если $\sqrt{x^2-x-2}+x-1 < 0$ и $6-x < 0$, то

$$\sqrt{x^2-x-2} < 1-x$$

$$x > 6$$

$$x > 6 \Rightarrow 1-x < -5, \text{ то}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при этом $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$ (т.ч. корень) $\} \Rightarrow$
 $\sqrt{x^2 - x - 2} < -5$

\Rightarrow противоречие \emptyset
Мы рассмотрим все 4 случая раскрытием
двух модулей (т.ч. $2 \times 2 = 4$ случаев) \Rightarrow
 \Rightarrow Ответ: $x \in [2; 6]$



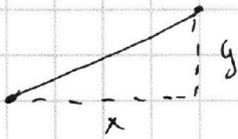
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.и. Вершины углы лежат, то если 2 вершины не лежат на одной абсциссе или ординате, то:



$$x^2 + y^2 = 5^2 = 25$$

$x, y \in \mathbb{N}$ (не нулевым)

если $x=1$, то $1^2 + y^2 = 25$

$$y^2 = 24 \Rightarrow y \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset$$

если $x=2$, то $2^2 + y^2 = 25$

$$y^2 = 21 \Rightarrow y \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset$$

если $x=3$, то $3^2 + y^2 = 25$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4 \quad \checkmark$$

если $x=4$, то $4^2 + y^2 = 25$

$$y^2 = 9$$

$$y = 3 \quad \checkmark$$

если $x \geq 5$, то $y^2 \leq 0 \Rightarrow$ не подходит

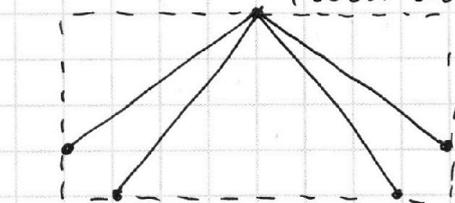
Значит рассмотрим вершину вершину ромба (сначала мы будем считать без идеальных марганов, которые $x_A = x_B, x_B = x_C$)



$$y_A = y_B, y_B = y_C$$

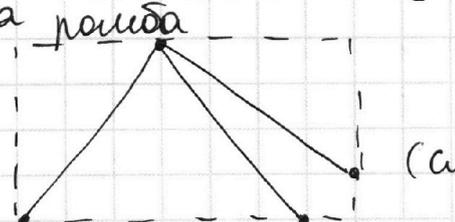
Будем считать верхней вершиной ромба вершину y которой x - наибольшее (мы считаем только те же две верхние вершины)

Значит у каждой такой вершины



те же две верхние вершины

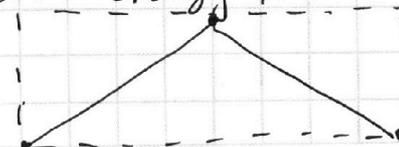
$2 \cdot 2 = 4$ варианта если край по (слева или справа без марганов т.к. автоматом)



у каждой вершины $1 \cdot 2 = 2$ варианта (случая) ма

если еще уменьшим прямоугольник, то $0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$ ромбов нет

если уменьшать снизу, то (будет марганца δ)



1 вариант



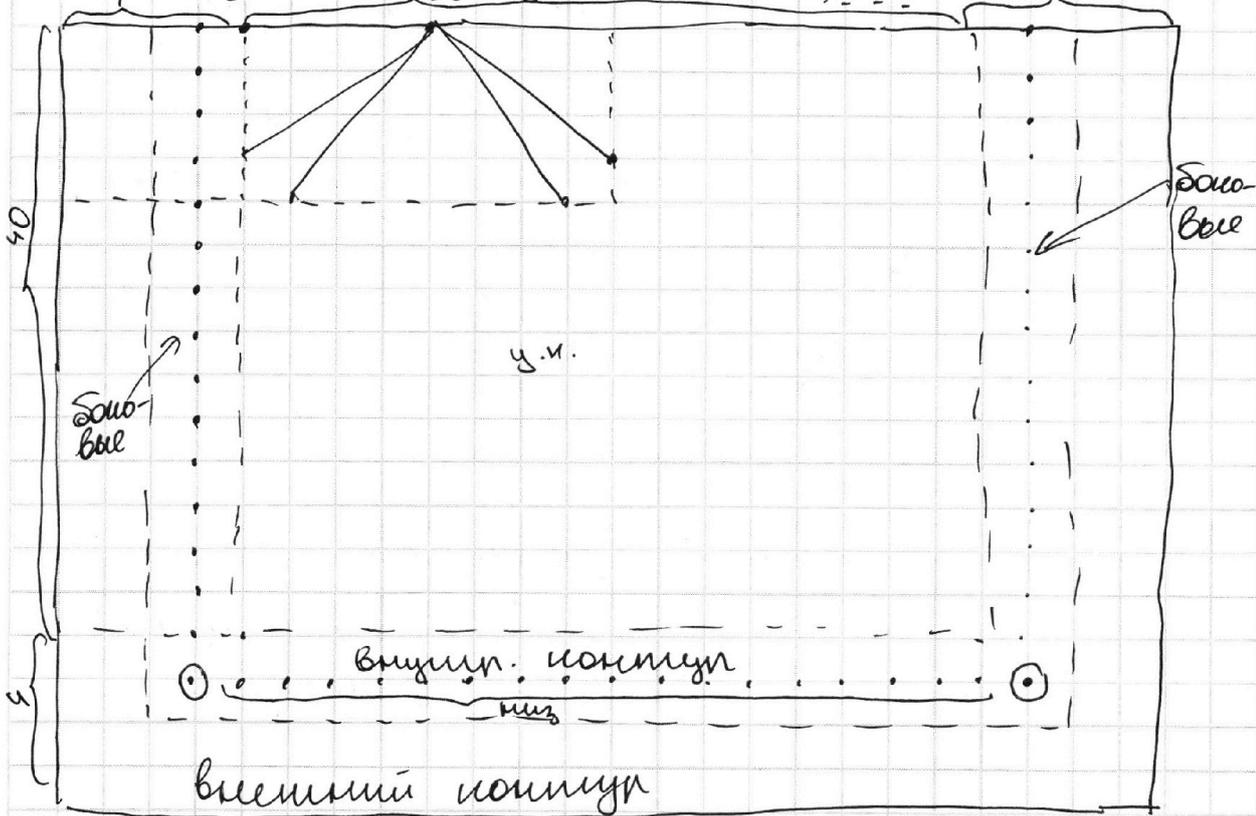
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если еще уменьшим, то вариантов нет
Рассмотрим наши ограничения $[1; 45] \Rightarrow$
 \Rightarrow получается квадрат 44 на 44



в у.и. $37 \cdot 41$ узлов из которых вариантов рамба:

$$37 \cdot 41 \cdot 2$$

во внешнем контуре не может быть ни одного рамба (из постановки на 1 сторону т.ч. там всего ≤ 2 от края)

во внутреннем контуре углы высоты (в кружках) т.ч. там 3 от обеих границ)

всего 37 точек из которых по формуле (т.ч. выходящая картинка без стр. 1) рамбу

базовые: $41 \cdot 2$ точек из которых по 2 рамбу (т.ч. случай а) $\Rightarrow 41 \cdot 2 \cdot 2$

Станем ^{стр. 1} рамбам закрывшим, теперь рамба у которых хотя бы 1 сторона || оси x или y



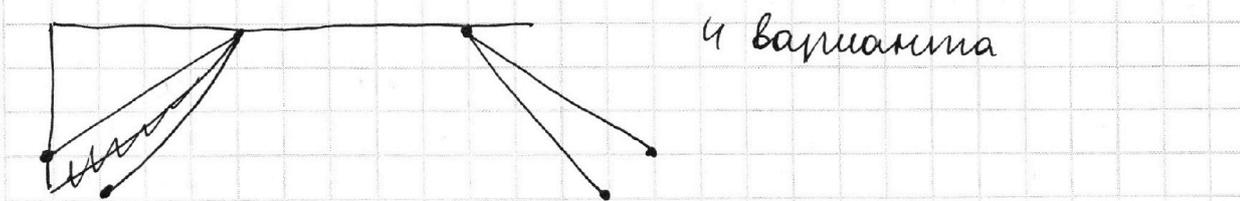
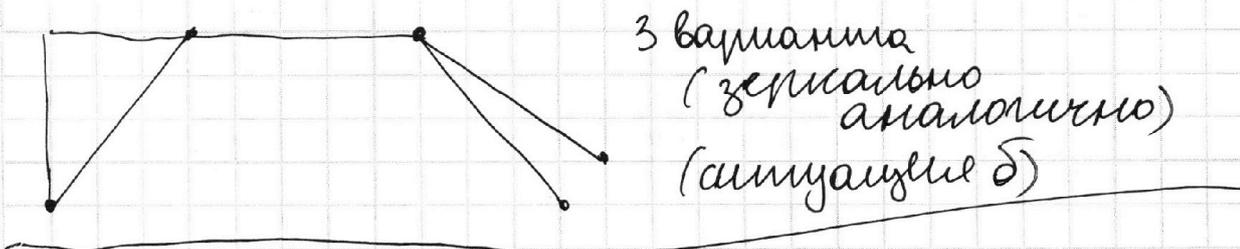
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

посчитаем рабды у которых
целиком оси X: нара-



Теперь посчитаем сколько
машин в нашем варианте 44 ма 44



если умень-
шится еще, то
о вариантов

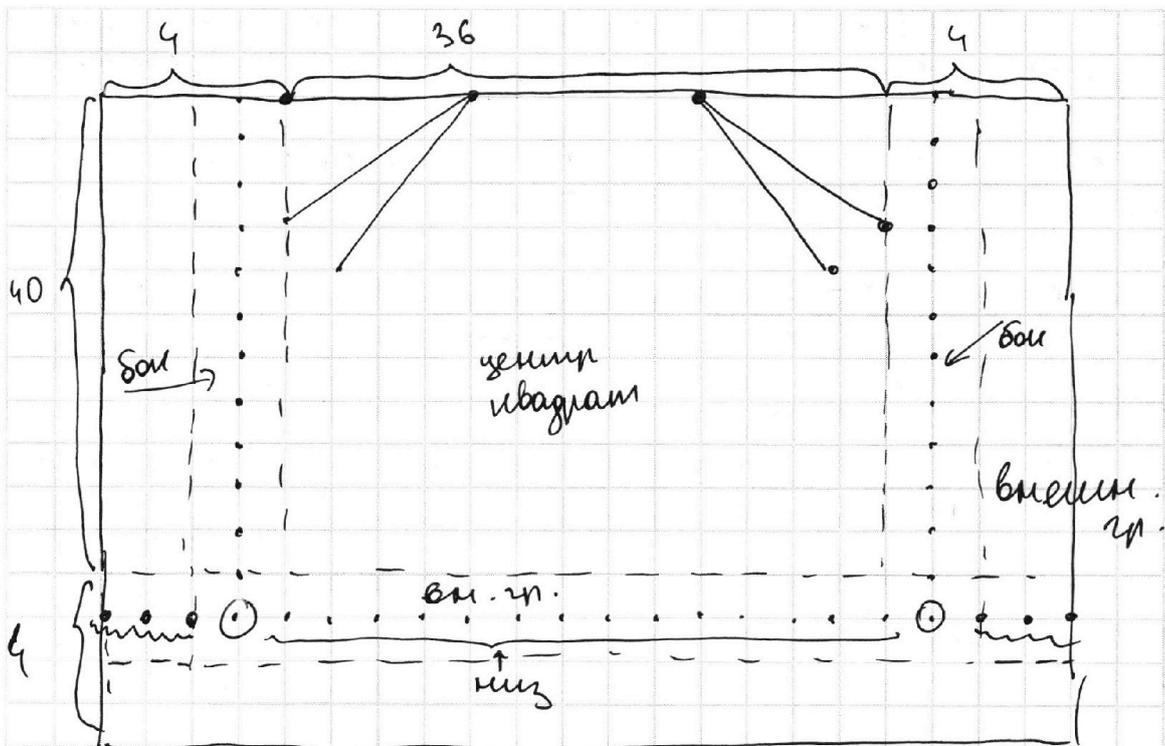


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



в центральном квадрате: \rightarrow 37 вершин и нулю
 полос 5 длины \Rightarrow проходят полосы: 32 (т.ч.
 или ≥ 33 уже не вылезет слева или справа)
 $32 \cdot 41 \cdot 4$ — вариант по лобов
~~во внешн. гр.: ничего не вылезет ни в левую ни в правую сторону до краев $\leq 2 \Rightarrow$ нет походов~~
 во вн. гр.: в углах тоже нет (обеденные
 т.ч. там всего 3 расстояние)
 внизу: случай $\rho \Rightarrow$ походов $32 \cdot 2$
 в боках: ситуация $\delta \Rightarrow 41 \cdot 2 \cdot 3$
 во внешн. гр.: ничего не вылезет (т.ч. расстояние вниз всего 2
 в полах τ , только 1 т.ч. вниз только \Rightarrow
 $\Rightarrow 6 \cdot 1 = 6$
 остальные: $41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$ \swarrow 2 варианта т.ч.
 закрыли только один бол

Теперь просиме квадраты



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вдоль можно: 40 (ширине правых пяти т.ч. не хватает)
Вниз можно: аналогично 40 =>

$$\Rightarrow 40 \cdot 40 = 1600$$

лабы и лапорок параллельно оси y
аналогично оси x =>

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Итого: } S &= 37 \cdot 41 \cdot 2 + 37 \cdot 1 + 41 \cdot 2 \cdot 2 + 40 \cdot 40 + \\ &+ 2 \cdot (32 \cdot 41 \cdot 4 + 32 \cdot 2 + 41 \cdot 2 \cdot 3 + 6 + 41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2) = \\ &= 41 \cdot (74 + 2 \cdot 2) + 37 + 1600 + 41 \cdot 8 \cdot 32 + 32 \cdot 4 + \\ &+ 41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 + 12 + 41 \cdot 8 \cdot 3 = 41 (78 + 32 \cdot 8 + 12 + 24) + \\ &+ 32 \cdot 4 + 37 + 1600 + 12 = 370 \cdot 41 + 1777 = 15170 + 1777 = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 8 \\ \hline 256 \end{array} \quad \begin{array}{r} 256 \\ + 24 \\ \hline 90 \\ + 340 \\ \hline 370 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1600 \\ 12 \\ \hline 128 \\ 37 \\ \hline 1777 \end{array} \quad \begin{array}{r} 370 \\ \times 41 \\ \hline 370 \\ 148 \\ \hline 15170 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 16947 \\ + 15170 \\ + 1777 \\ \hline 16947 \end{array}$$

Ответ: ~~16947~~ 16947



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x=3$, то

$$23 \cdot 2^3 + 2025 = y^2$$

$$2209 = y^2$$

$$y = \pm 47$$

Ответ: $(3; 47)$ и $(3; -47)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$\begin{matrix} 23 \cdot 2^x & + & 2025 & = & \text{неч} \\ \text{неч} & & \text{неч} & & \end{matrix} \Rightarrow y^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \text{ м.ч. } 2025 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 23 \cdot 2^x \equiv 0 \pmod{4}$$

если $x=2$, то

$$23 \cdot 4 + 2025 = y^2$$

$$92 + 2025 = y^2$$

$$y^2 = 2117 \Rightarrow$$

\Rightarrow не существует

$\Rightarrow x \geq 3$

$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ + 192 \\ \hline 2304 \end{array}$	$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ + 188 \\ \hline 2209 \end{array}$	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ + 184 \\ \hline 2116 \end{array}$
--	--	--

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

~~$y+45 : 23 \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{23}$~~

$$23 \cdot 2^x + 23 \cdot 88 + 1 = y^2$$

$$23(2^x + 88) = (y-1)(y+1) \Rightarrow y \equiv \pm 1 \pmod{23}$$

$$8 \cdot 23(2^{x-3} + 11) = (y-1)(y+1) \Rightarrow \text{пусть } y = 2k+1, \text{ тогда}$$

$$8 \cdot 23(2^{x-3} + 11) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$$

$$2 \cdot 23(2^{x-3} + 11) = k(k+1)$$

если $x > 3$, то $2^{x-3} + 11$ - нечетное \Rightarrow

$\Rightarrow k$ или $k+1 : 2$, но $\neq 4$

если $k \equiv 0 \pmod{23}$, то

$$k = 23t$$

$$23(2^{x-2} + 11) = k(k+1)$$

$$:23 \Rightarrow \frac{k(k+1)}{23} = 2^{x-2} + 11$$

$$t(23t+1) = 2^{x-2} + 11$$

$$23t^2 + t - 2^{x-2} - 11 = 0$$

$$D = 1 + 23 \cdot 4(2^{x-2} + 11)$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 23 \cdot 4(2^{x-2} + 11)}}{2 \cdot 23} \Rightarrow$$

вариант где
 $-\sqrt{\dots}$ не
 подходит т.ч. $\sqrt{\dots} \equiv 1$ или



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{2 \cdot NC}{MA} \Rightarrow$
 \Rightarrow по свойству дробей:
 $\frac{BN+2NC}{BM+MA} = \frac{BN}{BM} = \frac{BC+NC}{BA}$
 Пусть $NC = CX$
 тогда $BC+NC = BX$
 $\triangle ABX \sim \triangle MBN$
 (по 2 сторонам и углу между ними)
 (гол-гол) $\Rightarrow \angle AXN = 70^\circ$
 \Rightarrow в $\triangle ANX$: AC - медиана,
 $\angle N = \angle X \Rightarrow AN = AX$
 $\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ \Rightarrow \angle NAC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$
 Ответ: 20°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

если $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$ и $6 - x \geq 0$, то

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + 6 - x$$

$$5 \geq 5 \quad (*)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1 - x \quad \leftarrow \text{аналог}$$

$$6 \geq x$$

$x \in (-\infty; -1]$:

$$x^2 - x - 2 \geq (1 - x)^2$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 + x^2 - 2x$$

$$x \geq 3 \Rightarrow \emptyset$$

$x \in [2; 6]$
всегда

если $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$ и $6 - x < 0$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + x - 6 \quad | x \geq 6$$

$$5 \geq 2x - 7$$

$$2x \leq 12$$

3) если $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 < 0$ и $6 - x \geq 0$, то

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2-x-2} + 6 - x \quad (x \leq 6)$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 2x - 2 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + x - 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} \geq 2 - x & 1 - x > 2 - x \\ \sqrt{x^2-x-2} < 1 - x & 1 > 2 \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \overline{) 23} \\ 184 \\ \hline 185 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 8 \\ \hline 184 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2025 \\ 625 \\ \hline 1400 \end{array} + \begin{array}{r} 2025 \\ 184 \\ \hline 2209 \end{array}$$

4) если $\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 < 0$ и $6 - x < 0$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 1 - x - \sqrt{x^2-x-2} + x - 6 \quad x > 6$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 10 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 0 \quad (*)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} < 1 - x \quad x > 6 \Rightarrow 1 - x < -5 \Rightarrow \emptyset$$

$$23 \cdot 2^x = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$23 \cdot 2^x = (y - 25)(y + 25)$$

$$23 \cdot 2^x = t(t + 50)$$

$$t^2 + 50t - 23 \cdot 2^x = 0$$

$$D = 2500 + 2^{x+2} \cdot 23 - \text{точный квадрат} =$$

$$= 4(625 + 2^x \cdot 23)$$

$$t_{1/2} = \frac{-50 \pm \sqrt{625 + 2^x \cdot 23}}{2} = -25 \pm \sqrt{625 + 2^x \cdot 23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{625 + 2^x \cdot 23}$$

$$\sqrt{1400} \neq y^2$$

$$1400 = (y - 25)(y + 25)$$

Пусть $y - 25 = t$
 $y = t + 25$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

① $(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$

$(n-1)! + n! + (n+1)! : 17^2$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 17} \\ 17 \overline{) 17} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \overline{) 17} \\ 17 \\ \hline 0 \end{array}$$

② $(x+1)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x-2)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x-3)^2 - 28 = N^5$

$2x^2 + 2 + x^2 + x^2 + 8 + 2x^2 + 18 - 28 = N^5$

$7x^2 = N^5$

$x^2 = \frac{N^5}{7} \Rightarrow N^5 : 7 \Rightarrow N : 7 \Rightarrow N \geq 14$

$x^2 = \frac{14^5}{7} = 25 \cdot 7^4$ (X)

значит $7 \mid N \geq 21$, но

$x^2 = \frac{21^5}{7} = 7^4 \cdot 3^5$ (X)

$N \geq 28$

$x^2 = \frac{28^5}{7} = 7^5 \cdot 4^5 = 7^4 \cdot 2^{10} \Rightarrow x = 7 \cdot 2^5$

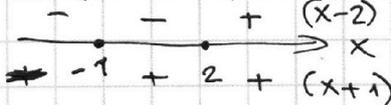
$2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2$

③ $x^2 - x - 2 \geq 0$

$x^2 + x - 2x - 2 \geq 0$

$x(x+1) - 2(x+1) \geq 0$

$(x-2)(x+1) \geq 0$



$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| = \sqrt{x^2 - x - 2} + 5$

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$x^2 + y^2 = a^2$

$y^2 - 4y - a \leq 6$

$y^2 - 4y - (a+6) \leq 0$

$\Delta = 16 - 4(a+6) = -4a - 8$

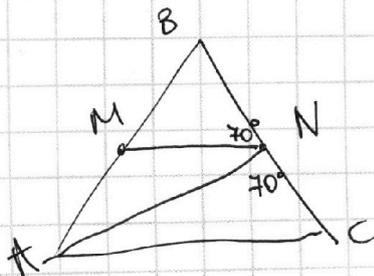
① $(n-1)! (1+n+n(n+1)) : 289$

$(n-1)! (n^2 + 2n + 1) : 289$

$(n-1)! (n+1)^2 : 289$

$n+1=17$

$n=16$



$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$\frac{BN}{NC} = 2 \cdot \frac{BM}{MA}$

$\frac{BN}{BM} = 2 \cdot \frac{NC}{MA} =$

$= \frac{BM + 2NC}{BM + MA} =$

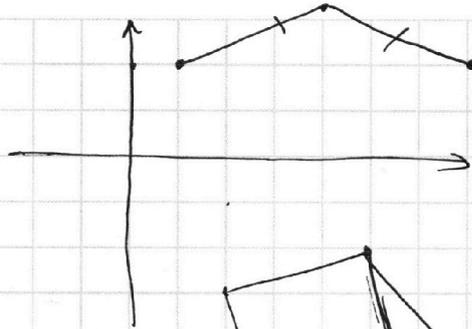
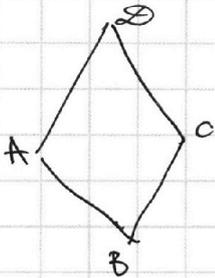
$= \frac{BC + NC}{BA}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = 5$$

$$\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = 5$$

$$\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 5$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 5$$

без иванданов
5 вариант

$(55 \cdot 4) \cdot 8$

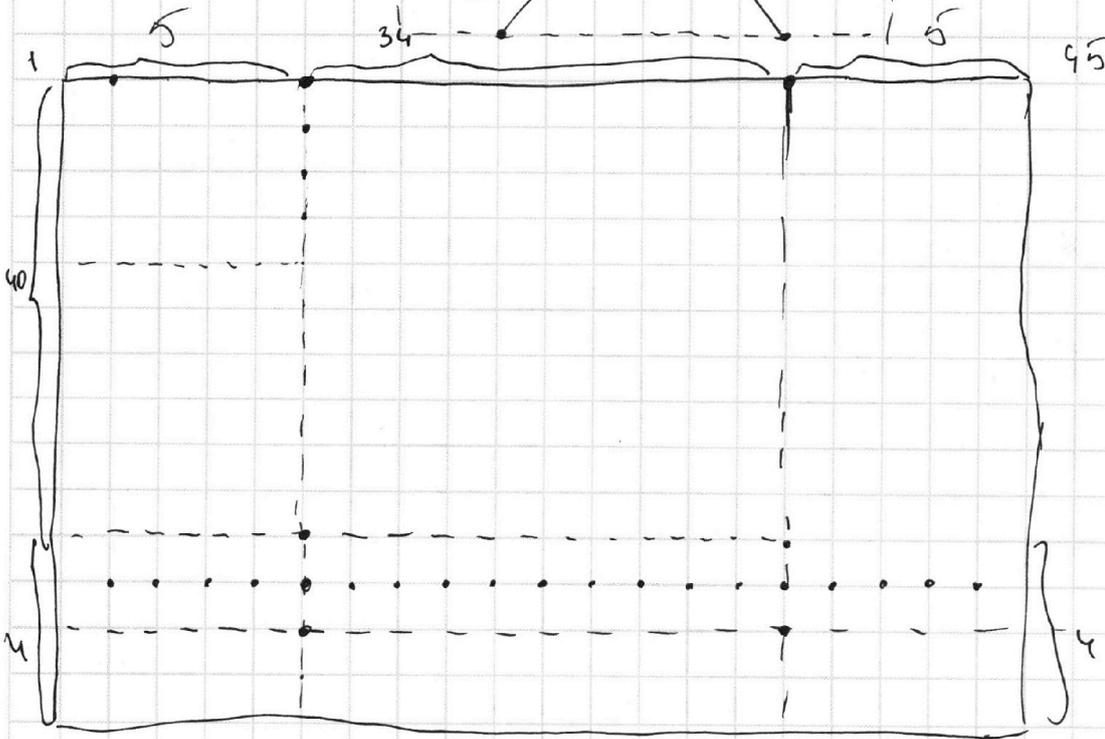
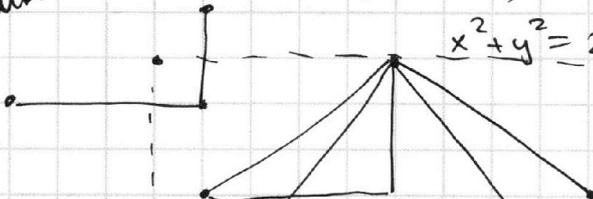
$$x_D^2 - 2x_D x_A + x_A^2 + y_D^2 - 2y_D y_A + y_A^2 = 25$$

$$x_D^2 - 2x_D x_C + y_D^2 + x_C^2 - 2y_D y_C + y_C^2 = 25$$

$$2x_D x_C - 2x_D x_A + x_A^2 - x_C^2 + 2y_D y_C - 2y_D y_A + y_A^2 - y_C^2 = 0$$

$$2x_D(x_C - x_A) + (x_A + x_C)(x_A - x_C)$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad 4^2 + 3^2 =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 6 \\ y^2 - 4y + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 6 \end{cases} \quad a = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y - 6 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ y^2 - 4y - 6 \leq -\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+2)^2 \leq 10 - \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\ (y-2)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$10 \geq \sqrt{x^2 + y^2} \quad a = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$100 \geq a^2 \quad a \leq 10$$

$$a \in [-10; 10]$$

или $y \geq 4$, но при \uparrow

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA} = \frac{AB+BM}{BC} \quad y_B = 4$$

$$\frac{MA}{NC} = \frac{2BM}{NB} = \frac{AB+BM}{BC}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad a = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 6 \\ y^2 - 4y + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 6 \end{cases}$$

$$D = 16 + 24 + 4\sqrt{x^2 + y^2} = 4(10 + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$y_{1,2} = 2 \pm (10 + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$D = 16 - 4(\sqrt{x^2 + y^2} - 6) = 40 - 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$a \in [0; 10]$$

если $a=0$ $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \emptyset$

если $a=1$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 - 4y - 1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$$y^2 - 4y + 1 \leq 6 \quad y \leq 1$$

$$y^2 - 4y - 5 \leq 0 \quad y+1$$

$$y^2 - 5y + y - 5 \leq 0$$

$$(y+1)(y-5) \leq 0$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6 \quad a > 6$$

$$y = a$$

$$a^2 - 5a \leq 6$$

$$y^2 - 4y - a = 0$$

$$D = 16 + 4a = 4(a+4)$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm 4(a+4)}{2} = 2 \pm 2(a+4)$$

$$2 + \sqrt{a+4} = a$$

$$2 - \sqrt{a+4} = -a$$

$$-\sqrt{a+4} = -a-2$$

$$\sqrt{a+4} = a+2$$

$$a+4 = a^2 + 2a + 4$$

$$a^2 = -a \quad a = -1$$