



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1} \quad (n-1)! + n! + (n+1)! = 289m$$

$$m \cdot n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow m \in \mathbb{N} \\ x - \text{часть } m \in \mathbb{N}$$

$$t = (n-1)! \quad \text{тогда } t + t \cdot n + t \cdot n(n+1) = 289m$$

$$t(n+1+n^2+n) = 289m$$

$$t(n+1)^2 = 289m$$

$$289 = 17^2$$

$$\text{при } n \leq 17 \\ t \not\equiv 17 \quad (m \cdot k \cdot 17 - \text{простое чис-} \\ \text{ло, а } t = (n-1)!) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } n \leq 17 \quad (n+1)^2 = 289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 16$$

$$\text{при } n \leq 16 \quad t(n+1)^2 \Rightarrow \neq 289m \\ \begin{matrix} 17 \\ 17 \end{matrix} \hat{=} 17^2$$

Ответ: 16



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

n - I послед. число $\in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n^2 + (n+1)^2 + \dots + (n+6)^2 = N^5$$

$$N > 8$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$4n^2 + 42n + 31 - 28 = N^5$$

$$4(n^2 + 6n + 9) = N^5$$

$$4(n+3)^2 = N^5$$

Квадрат числа способен создавать число строго с четными степенями

4^1 - нек. степ. $\Rightarrow$ для можем создавать 5 степ. или 4т

$$5 \text{ степени} = 4^5 = 4^1 \cdot 4^4 \text{ но тогда}$$

$$N = 4^1, \text{ а по усл. } N > 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{10} = 4^1 \cdot 4^9 - \text{ не можем сделать. т.к. } x^2 \neq 4^9 \Rightarrow \text{при } x \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 4^{15} = 4^1 \cdot 4^{14}, \text{ тогда } N = 4^3$$

$$\Rightarrow N \geq 4^3$$

Ответ: 343



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ Заметим, что $\frac{1}{3}$ неравенство уже встречалось ранее в этой задаче, с такими же номерами $x \in (-\infty; -1]$ $\Rightarrow$ не имеет действительных решений (т.к. выш. доп. $\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \\ x \geq 3 \end{cases}$ ~~не имеет~~ решений)

$\Rightarrow$ неравенство имеет вид:

$$\begin{cases} x \in [2; +\infty) \\ 6-x \geq |6-x| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [2; 6] \\ x \in (-\infty; +\infty) \\ x \in (6; +\infty) \\ 2x \leq 12 \end{cases}$$

Заметим, что $\frac{1}{3}$ неравенство не имеет действительных решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Решением неравенства является: $\begin{cases} x \in [2; 6] \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 6]$

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad d \in \mathbb{Z}$$

$$m.k. \quad 2025 = 45^2 \Rightarrow 23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45) \Rightarrow$$

$$m.k. \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 45 = 23 \cdot 2^d \\ y + 45 = 2^{x-d} \\ y - 45 = 2^d \\ y + 45 = 23 \cdot 2^{x-d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x-d} - 23 \cdot 2^d = 90 \\ 23 \cdot 2^{x-d} - 2^d = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$m.k. \quad x, y, d \in \mathbb{Z}$$

$$m.k. \quad 90 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^d (2^{x-2d} - 23) = 90 \\ 2^{x-d} (1 - 23 \cdot 2^{2d-x}) = 90 \\ 2^d (23 \cdot 2^{x-2d} - 1) = 90 \\ 2^{x-d} (23 - 2^{2d-x}) = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^d = 2 \\ 2^{x-2d} - 23 = 45 \\ 23 \cdot 2^{x-2d} - 1 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^d = 2^1 \\ 2^{x-2d} = 68 \\ 2^{x-2d} = 2^1 \end{cases} m.k. \quad x, y, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2^{x-d} = 2 \\ 1 - 23 \cdot 2^{2d-x} = 45 \\ 23 - 2^{2d-x} = 45 \end{cases} \Rightarrow \emptyset m.k. \quad 23 \cdot 2^{2d-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^d = 2^1 \\ 2^{x-2d} = 2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: (3; 44)
 (3; -44)

$$\Rightarrow y^2 = 23 \cdot 8 + 2025 = 2209 = 47^2, (-47)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

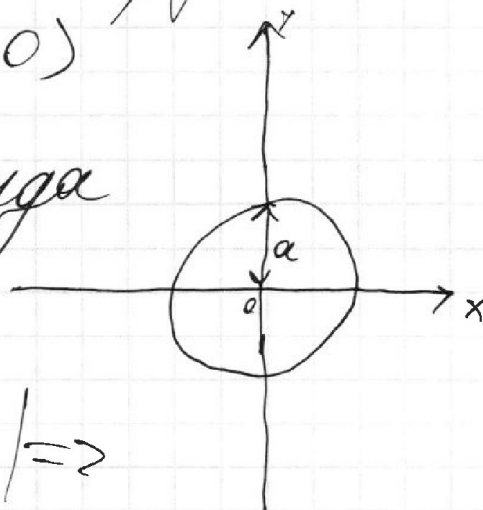
7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$ график - окружность
с центром в т. (0; 0)

Заметим, что тогда
 $y \in [-a; a]$



$$x^2 - 4y - a \leq a^2 + 4a - a \quad | \Rightarrow$$

при $a \geq 0$

$$\Rightarrow a^2 - 3a = 6 \text{ (у.у.с.)}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \Rightarrow \notin \emptyset \text{ т.к. меньше } 0$$

$$a_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

при $a < 0$

$$y^2 - 4y - a \leq a^2 - 4a - a \Rightarrow a^2 - 5a = 6 \text{ у.у.с.}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a_1 = \frac{5 - 7}{2} = -1 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$a_2 = \frac{5 + 7}{2} = 6 \Rightarrow \notin \emptyset \text{ т.к. } < 0$$

Ответ:
 $\frac{-3 + \sqrt{33}}{2};$
-1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^d \\ y+45 = 2^{x-d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^d \\ y+45 = 23 \cdot 2^{x-d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^d \\ y+45 = 23 \cdot 2^{x-d} \end{cases}$$

$$2^{x-d} - 23 \cdot 2^d = 90$$

$$23 \cdot 2^{x-d} - 2^d = 90$$

$$2^d (2^{x-2d} - 23) = 90$$

$$2^{x-d} (23 - 2^{2d-x}) = 90$$

$$2^d (23 \cdot 2^{x-2d} - 1) = 90$$

$$\begin{cases} 2^d = 2 \\ 2^{x-d} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x-2d} - 23 = 45 \\ 23 - 2^{2d-x} = 45 \\ 23 \cdot 2^{x-2d} - 1 = 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2^{x-2d} = 2 \\ 2^{2d-x} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 8 \\ \hline 184 \\ + 2025 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 6329 \\ + 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$y = 47$$



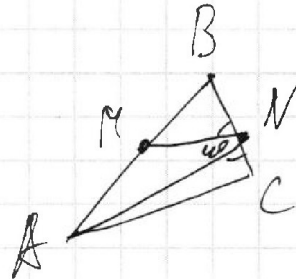
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in [-a; a]$$



$$(-a)^2 + 4a - a$$

$$(-a)^2 + 3a$$

$$a^2 + 3a = 6$$

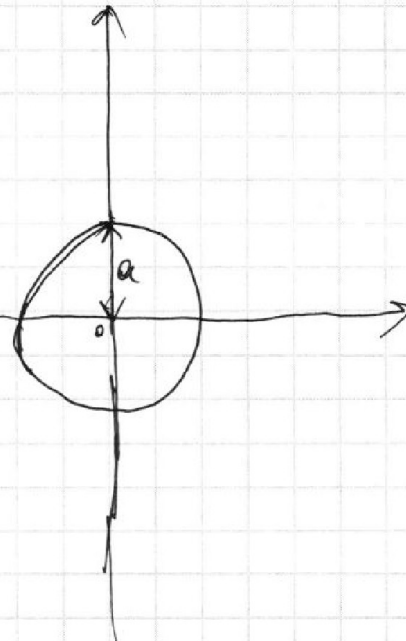
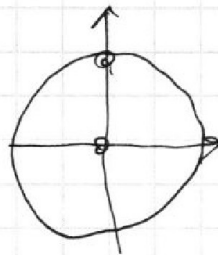
$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$9 + 24 = 33$$

$$\frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \quad \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$a = R$$



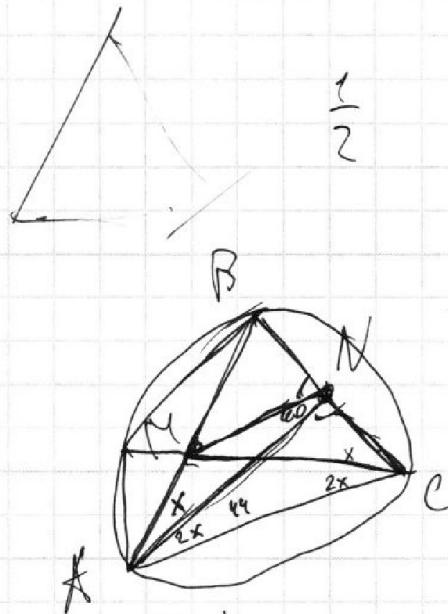


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos \alpha \\ MN^2 &= BA^2 + BN^2 - 2 \cdot BM \cdot BN \cdot \cos \alpha \\ \frac{AC^2}{MN^2} &= \frac{BA^2 + BN^2}{BA^2 + BN^2} \end{aligned}$$

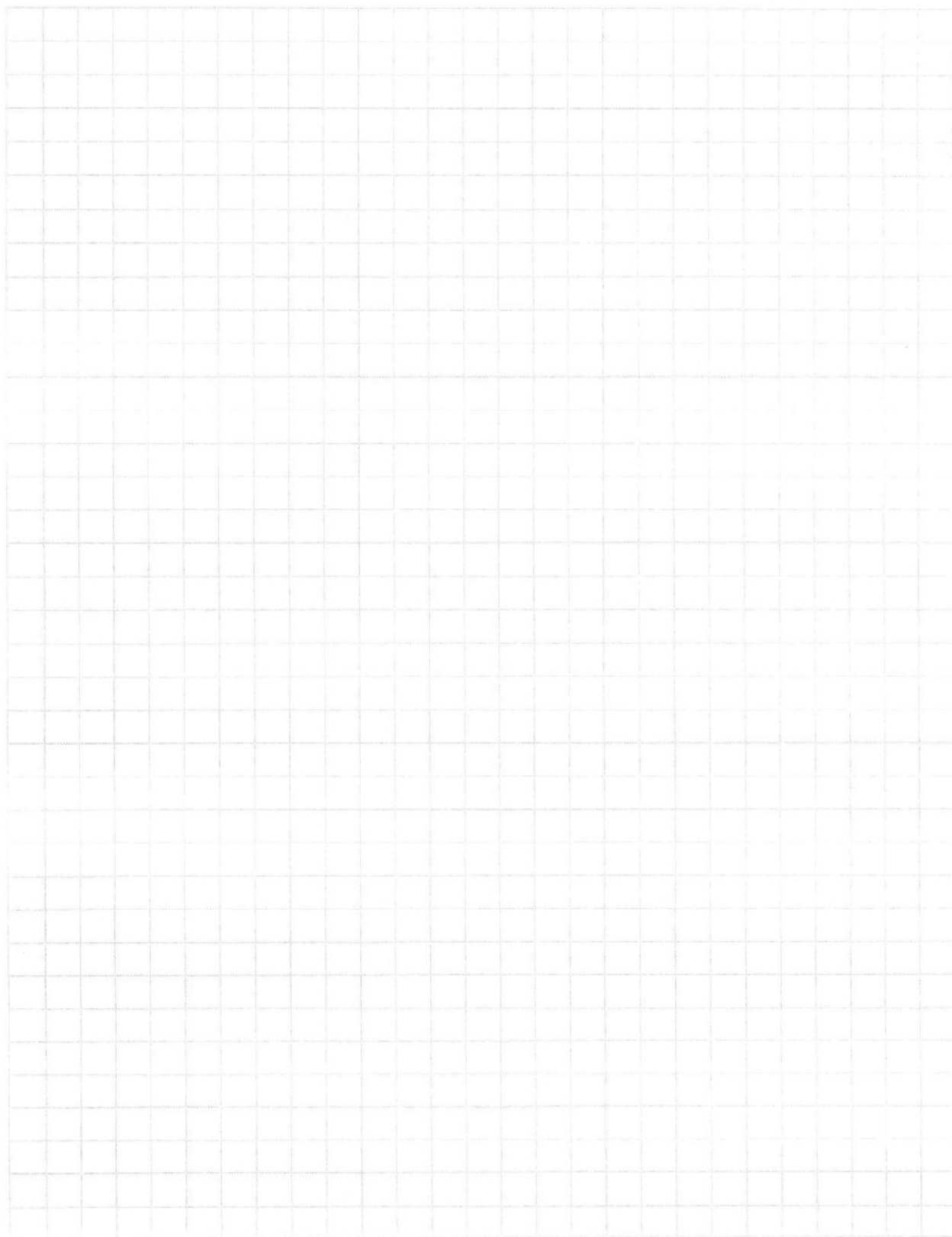


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение имеет смысл.
при $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$$\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq |\sqrt{x^2-x-2} + 1| + |6-x|$$

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$x^2-x-2 \geq x^2+1-2x$$

$$x \geq 3$$

$$\sqrt{x^2-x-2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$x^2-x-2 \geq 1+x^2-2x$$

$$x \geq 3$$

$$x \in (-\infty; -1]$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq 1-x+6-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + 5 \geq \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + |6-x|$$

$$x \in [2; +\infty)$$

$$x \in (6; +\infty)$$

$$6 \geq x - 6 + x$$

$$x \in$$

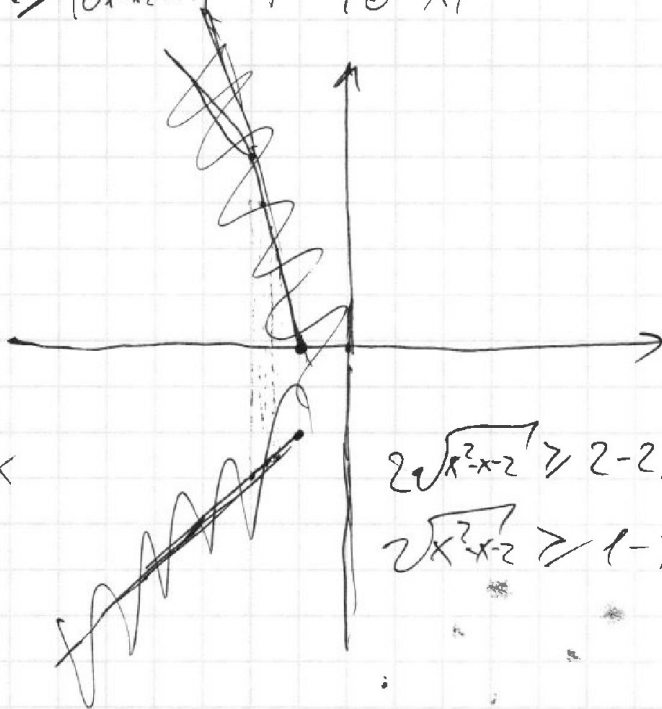
$$2x \leq 6$$

$$\Rightarrow x \leq 3$$

$$x \in [2; 6]$$

$$0 \geq 0_x$$

$$\Rightarrow x \in [2; 6]$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

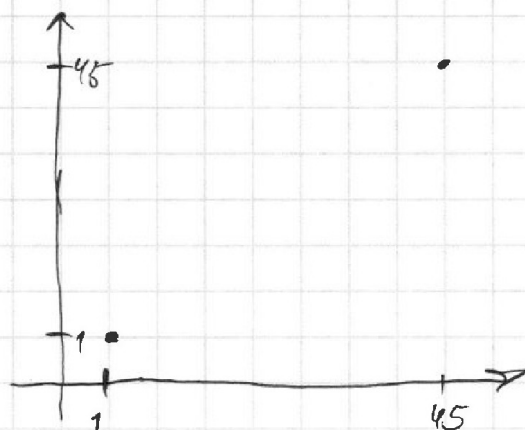
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$



$$n^2 + (n+1)^2 + \dots + (n+6)^2 = N^5$$

$$N > 8$$

$$4(n^2 + 6n + 4) = N^5$$

$$4(n+3)^2 = N^5$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 4 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$N = 4$$

$$(n+3)^2 = 4$$

$$4^9 \neq m^2 \Rightarrow (n+3)^2 = 4^{14}$$

$$N > 8 \Rightarrow (n+3)^2 \neq 4^4$$

$$N = 4^n$$

$$N^5 = 4^{15}$$

$$N = 4^3 \Rightarrow N \geq 343$$

Ответ: 343

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$2^d \leq x$$

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^d \\ y+45 = 23 \cdot 2^{x-d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^d(2^{x-d} - 23) = 90 \\ 2^{x-d}(1 - 23 \cdot 2^{d-x}) = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 = 2^d \\ y+45 = 23 \cdot 2^{x-d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^d(23 \cdot 2^{x-d} - 2^d) = 90 \\ 2^{x-d}(23 \cdot 2^{d-x} - 1) = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 = 23 \cdot 2^{x-d} \\ y+45 = 23 \cdot 2^d \end{cases}$$

$$2^d - 23 \cdot 2^{x-d} = 90$$

$$2^d(1 - 23 \cdot 2^{x-d}) = 90$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+6)^2 - 28 = N^5$$

$$N > 8$$

$$4n^2 + 42n + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = N^5$$

$$4n^2 + 42n + 81 = N^5$$

$$4(n^2 + 6n + 13) = N^5 \Rightarrow N \geq 4^5$$

$$n^2 + 6n + 13 = 4^4$$

$$n^2 + 6n - 2388$$

$$36 +$$

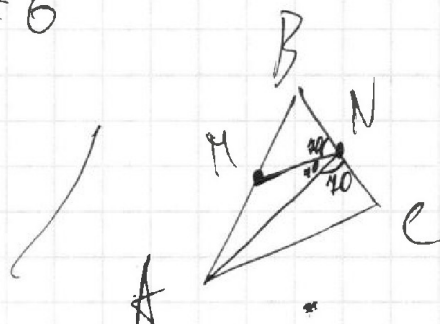
$$4(n^2 + 6n + 13) = N^5 \Rightarrow N \geq 4^5$$

$$m.r. N > 8 \Rightarrow \Pi\Pi$$

$$m.m. \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + 6 - x$$

$$\text{если } \sqrt{x^2 - x - 2} + x \geq 1$$

$$2x \leq 6$$



$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA} = \frac{26,25}{26}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~289! 16! 16!~~

$$(n-1)!(1+n+n+1) = 289m$$

$$(n-1)!(2n+2)$$

$$2(n+1)(n-1)! = 289m$$

$$t = (n-1)!$$

$$t + tn + t(n+1) = 289m$$

$$t(1+n+n(n+1)) = 289m$$

$$t(n^2 + 2n + 1) = 289m$$

$$t(n+1)^2 = 289m$$

т.к. 17-число простое $\Rightarrow$ при $n=16$

т.к. до 17 не годится!

Ответ: $n=16$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$-1; 2$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$\frac{90 \sqrt{5}}{16}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x$$

$$x \geq 3$$

$$2^{x-4}(23-2^4) = 90$$

$$x \leq 4 \quad \neq 4 \quad \neq 3$$

2

$$1) \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \end{cases}$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$[23 \cdot 2^d]$$

$$\begin{cases} 2^{x-d} - 23 \cdot 2^d = 90 \\ 2^{x-d} \cdot 23 - 2^d = 90 \end{cases}$$