МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1;50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19\cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения x^2-6x+a равно 8.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA = 2BM\cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! + n!\cdot(n+1) + n!\cdot(n+1)(n+2) =$

$= n!(1+n+1+n^2+3n+2) = n!(n^2+4n+4) = n!(n+2)^2$

Заметим, что $361 = 19^2$. Если $n \leq 16$, то каждый из множителей $1, 2, 3, \dots, n, n+2$ меньше 19 (при этом все $\in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ $n!(n+2)^2$ не делится на 19. (19 - простое число)

Значит, наименьшее n, при котором $n!(n+2)^2$ может делиться на 19, хотя бы 17.

При $n=17$ $n!(n+2)^2 = 17!\cdot 19^2 \vdots 19^2$

Ответ: $n=17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

Пусть, наименьшее из пяти последовательных натуральных чисел n. Тогда:

$-10+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2 = N^3$, где $N \in \mathbb{N}$ $\quad N \geq 7$

$-10+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2 = n^2 + (n^2+2n+1)+(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)+$

$+(n^2+8n+16) - 10 = 5n^2+20n+20 = 5(n^2+4n+4) = 5(n+2)^2 = N^3$

$\Rightarrow N^3 \vdots 5 \Rightarrow N \vdots 5 \Rightarrow N^3 \vdots 5^3 \Rightarrow (n+2)^2 \vdots 5^2 \Rightarrow n+2 \vdots 5$

Пусть, $n+2=5k$, где $k \in \mathbb{N}$. $\quad 5\cdot(5k)^2 = 5^3k^2 = N^3$

$k^2 = \left(\frac{N}{5}\right)^3$. Если k не является кубом натурального числа, то при извлечении $\sqrt[3]{\ }$ из обеих частей получим что $\frac{N}{5} \in \mathbb{N}$ равно $\sqrt[3]{k^2} = (\sqrt[3]{k})^2 \notin \mathbb{N}$. Противоречие.

Значит, k – куб натурального числа. Переберём k:

$k=1=1^3$: $N=\sqrt[3]{k^2}\cdot 5 = 5 < 7$

$k=8=2^3$: $N=\sqrt[3]{k^2}\cdot 5 = 20 \geq 7$

Заметим, что чем больше k, тем больше N. Для наим. $k=1^3$ $\quad N=5<7$ не подошло по условию.

Следующее $k=2^3$ $\quad N=20 \geq 7$ подошло $\Rightarrow$ наим. $N=20$

Ответ: $N=20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

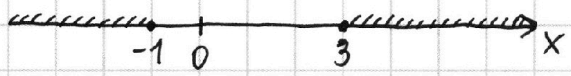
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geq \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|$

ОДЗ: $x^2-2x-3\geq 0$ $\quad (x+1)(x-3)\geq 0 \quad x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$



Заметим, что $\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| = \sqrt{x^2-2x-3}+6$ и $|7-2x|=|2x-7|$

$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |2x-7|$

Посмотрим, когда $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\geq 0$

$\sqrt{x^2-2x-3}\geq 1-2x$

Если $1-2x<0$, то нер-во выполнено, т.к. корень больше отрицательного числа. ($x>0{,}5$) или $x\in[3;+\infty)$ с учётом ОДЗ)

Иначе (если $x\leq 0{,}5$, или, с учётом ОДЗ, $x\in(-\infty;-1]$) можно возвести обе части в квадрат:

$x^2-2x-3\geq 1-4x+4x^2 \qquad 3x^2-2x+4\leq 0$

$\qquad D=4-4\cdot4\cdot3<0$

$3x^2-2x+4$ – парабола ветвями вверх, не пересекающая ось абсцисс (т.к. $D<0$), значит она никогда не бывает ≤ 0. Итого получили, что $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\geq 0$ при $x\in[3;+\infty)$.

Раскроем модули для интервалов x:

1) $x\in(-\infty;-1]$

$\sqrt{x^2-2x-3}+6\geq -\sqrt{x^2-2x-3}-2x+1-2x+7$

$2\sqrt{x^2-2x-3}\geq -4x+2 \qquad \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\geq 0$

Как мы доказали ранее, это нер-во выполняется при $x\in[3;+\infty)$. $\quad [-\infty;1]\cap[3;+\infty)=\varnothing$

2) $x\in[3;3{,}5)$:

$\cancel{\sqrt{x^2-2x-3}}+6\geq \cancel{\sqrt{x^2-2x-3}}+\cancel{2x}-1-\cancel{2x}+7 \qquad 6\geq 6$ – выполнено для всех $x\in[3;3{,}5)$

3) $x\in[3{,}5;+\infty)$: $\quad 6\geq 2x-1+2x-7 \qquad 4x\leq 14 \qquad x\leq 3{,}5$

$x=3{,}5$ – тоже подходит

Ответ: $x\in[3;3{,}5]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

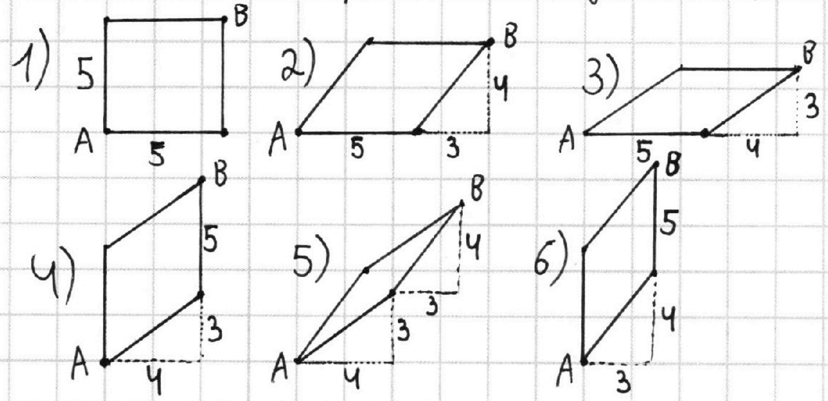
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты вершин одного ромба, лежащих на 1 стороне. Тогда, $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5^2$

Т.к. $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{N}$, $\overset{=\Delta x}{x_1-x_2}$ и $\overset{=\Delta y}{y_1-y_2} \in \mathbb{Z}$. В целых числах у этого уравнения решения $(\pm5;0)$, $(0;\pm5)$, $(\pm3;\pm4)$, $(\pm4;\pm3)$ – это скобки вида $(\Delta x; \Delta y)$. Тогда, всего есть 6 видов различных ромбов:

($\forall$ ромб со сторонами 5 и целыми коорд. вершин при параллельном переносе совпадёт с одним из следующих)



Для подсчёта количества ромбов каждого вида, для каждого вида ромба посмотрим на координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(x_0, y_0) \Rightarrow$ кол-во ромбов этого вида $(50-x_0)(50-y_0)=50^2-(x_0+y_0)+x_0y_0$

1) $x_0=5$, $y_0=5$, $x_0+y_0=10$, $x_0y_0=25$
2) $x_0=8$, $y_0=4$, $x_0+y_0=12$, $x_0y_0=32$
3) $x_0=9$, $y_0=3$, $x_0+y_0=12$, $x_0y_0=27$
4) $x_0=4$, $y_0=8$, $x_0+y_0=12$, $x_0y_0=32$
5) $x_0=7$, $y_0=7$, $x_0+y_0=14$, $x_0y_0=49$
6) $x_0=3$, $y_0=9$, $x_0+y_0=12$, $x_0y_0=27$

$\Sigma = 6\cdot50^2-72+192=15120$ – всего ромбов

Ответ: 15120

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$19\cdot 2^x + 2025 = y^2 \qquad 19\cdot 2^x = y^2 - 2025$

При всех $x\in\mathbb{Z}$ $\; 19\cdot 2^x > 0 \Rightarrow y^2 > 2025 \quad |y| > 45$

и т.к. $y\in\mathbb{Z}$ $\; |y|\geq 46$

$19\cdot 2^x = y^2 - 2025 = |y|^2 - 2025 \geq 46^2 - 45^2 = 91$

Если ~~19~~ $x\leq 0$, то $19\cdot 2^x \leq 19$, чего быть не может, т.к. $19\cdot 2^x \geq 91 \Rightarrow x\in\mathbb{N}$

$19\cdot 2^x = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45)$

$K\in\mathbb{Z}$ $\; 0\leq K\leq x$. Возможно 2 случая:

1) $\begin{cases} y-45 = 2^K & (1)\\ y+45 = 2^{x-K}\cdot 19 & (2)\end{cases}$

(2)−(1): $90 = 2^{x-K}\cdot 19 + 2^K$. Заметим, что если $\begin{cases} K\geq 2\\ x-K\geq 2\end{cases}$, то левая часть $\not\vdots\, 4$, а правая $\vdots\, 4$. Значит, $\left[\begin{array}{l} K\in\{0;1\}\\ x-K\in\{0;1\}\end{array}\right.$

$K=0$	$K=1$	$x-K=0$	$x-K=1$
$y=46$	$y=47$	$y=19-45$	$y=38-45$
~~91~~ $91=2^{x-K}\cdot 19$,	$92=2^{x-K}\cdot 19$	$\lvert y\rvert<46$	$\lvert y\rvert<46$
но $91\not\vdots\, 19$ $\varnothing$	$92\not\vdots\, 19$ $\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

2) $\begin{cases} y-45 = 2^{x-K}\cdot 19\\ y+45 = 2^K\end{cases}$ Получаем условие, как и в п. 1 $\left[\begin{array}{l} K\in\{0;1\}\\ x-K\in\{0;1\}\end{array}\right.$

$K=0$	$K=1$	$x-K=0$	$x-K=1$
$y=-44$	$y=-43$	$y=45+19=64$	$y=45+38=83$
$\lvert y\rvert<46$	$\lvert y\rvert<46$	$y+45=64+45\not\vdots\, 2$	$y+45=128=2^7=2^K$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$K=7 \quad x=8$ $(x-K=1)$
			$(8;83)$

Ответ: $(8;83)$

№6

Ур-ие $x^2+y^2=a^2$ задаёт на плоскости Oxy

Окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $|a|$.

$\Rightarrow x \in [-|a|; |a|]$

$f(x)=x^2-6x+a$ – парабола ветвями вверх. Её

наибольшее значение на промежутке $x \in [-|a|;|a|]$

равно $\max(f(|a|), f(-|a|)) = \max(a^2-6|a|+a,$

$a^2+6|a|+a) = a^2+6|a|+a=8$

1) $a \geq 0$: $a^2+7a-8=0$ $\quad D=49+32=81=9^2$

$a=\frac{-7\pm 9}{2}=\left[\begin{array}{l}1 \\ -8<0 \text{ – не подходит}\end{array}\right.$

$a=1$

2) $a<0$: $a^2-5a-8=0$ $\quad D=25+32=57$

$a=\frac{5\pm\sqrt{57}}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{5+\sqrt{57}}{2}>0 \text{ – не подходит} \\ \frac{5-\sqrt{57}}{2}<0\end{array}\right.$

$a=\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

Ответ: $a=1; \frac{5-\sqrt{57}}{2}$

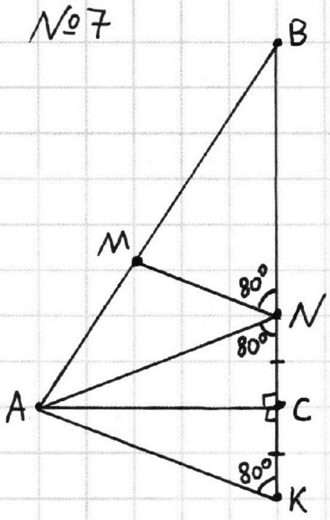
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7



Продлим NC за точку C на свою длину. Получим точку K ($NK = 2NC$)

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC = BM \cdot 2NC = BM \cdot NK$

$\frac{MA}{BM} = \frac{NK}{BN} \quad |+1$

$\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BN} \qquad \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BK}$

$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BK}$ и $\angle MBN = \angle ABK \Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle ABK$

$\Rightarrow \angle AKB = \angle MNB = 80^\circ \Rightarrow \triangle ANK$ – равнобедренный и

т.к. AC – его медиана, она и высота $\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$

$\angle CAN = 180^\circ - \angle ANC - \angle ACN = 10^\circ$

Ответ: $\angle CAN = 10^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(1) $n!+(n+1)!+(n+2)! \vdots 361$

$n!\,(1+n+1+(n+2)(n+1)) = n!\,(1+n+1+n^2+3n+2) = n!\,(n^2+4n+4) =$

$= n!\,(n+2)^2 \vdots 361$ $\quad 361 = 19^2$ $\quad \sqrt{361}$

$n = 17$

$19 \cdot 19 = 171 + 19 = 361$; $\quad 18 \cdot 18 = 144 + 18 = 324$; $\quad 19 \cdot 19 = 171 + 19 = 361$

(2) $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2-10 =$

$= N^3 \qquad N \geq 7$

$n^2+(n^2+2n+1)+(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)+(n^2+8n+16)-10 =$

$= 5n^2+20n+30-10 = 5n^2+20n+20 = 5(n^2+4n+4) = 5(n+2)^2$

$n+2 \vdots 5 \qquad n+2=5k \qquad n \equiv_5 3$

$5^3 \cdot k^2$

$k=1: n=3: \quad N=5<6$

$k=2: n=8: \quad 5 \cdot 10^2$ - не куб $\qquad N_{min} = 20$

$k=3: n=13: \quad 5 \cdot 5 \cdot 3^2$

$\dots$

$k=8 \quad n=38 \qquad 5^3 \cdot 8^2 = 5^3 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2^2)^3 = 20^3$

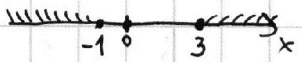
$25+32=57$; $57+27=84$; $84+32=116$; $116+49=165$; $165+27=192$; $192-72=120$

(3) $\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geq \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|$

$|2x-7|$ $\quad x=3,5$

ОДЗ: $x^2-\cancel{3x}-2x-3 \geq 0$

$(x-3)(x+1) \geq 0$



$x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$

$2x-1 \geq 0$ $\quad x \geq$

$2500 \cdot 6 = 15000$

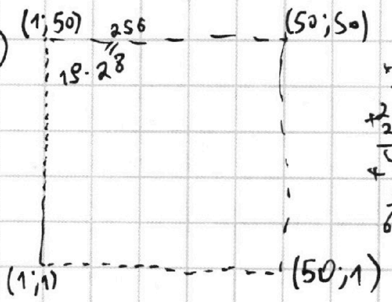
$y-45 = 2^k$

$y+45 = 2^{x-k} \cdot 19$

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45) > 0$

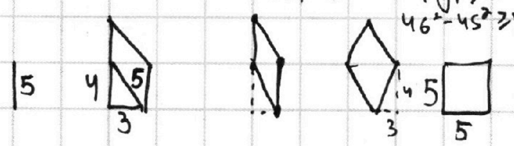
$x \in \mathbb{N}$ $\quad |y| > 45$ $\quad |y| \geq 46$ $\quad 46^2-45^2 \geq 91$

(4)



$55 \cdot 256$; $19 \cdot 256 = 2304 + 256 = 4864$; $4864 + 2025 = 6889$

$19 \cdot 2^8$



$2025 - 18 = 2006$; $2025 : 11$; $2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$

$83 \cdot 83 = 249 + 664 = 6889$

y	$y^2 \bmod 11$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	5
5	3

$-5 \equiv 6$

$81 - 76 = 5$

(5) $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$x=4$ $\qquad x \geq 2$

x - чёт $\quad x=2k$ $\qquad$ mod 4: $0+2025=y^2$

$19 \cdot 4^k + 2025 = y^2$

mod 5: $(-1)^k = y^2$

mod 7: $-2 \cdot 2^x + 2 \equiv_7 y^2$

$2(1-2^x) \to 0 \quad x \vdots 3$

$2^3 \equiv_7 1$ $\qquad -2 \quad x \equiv_3 1$

$-6 \quad x \equiv_3 2$

$y^2 \equiv_{19} 11$; $\quad 2025 : 7 = 289$; $\quad 2025 : 19$

$\boxed{y \equiv_{19} \pm 7}$ $\qquad \boxed{y^2 \equiv_{19} 11}$ $\qquad \boxed{y \equiv_{11} \pm 1}$ $\qquad y^2 \equiv_{11} 1$

$y^2 \bmod 7$

y	$y^2 \bmod 7$
0	0
1	1
2	4
3	2

$-3 \equiv 4$, $-2 \equiv 5$, $-1 \equiv 6$

$0,1,2,4$

y	$y^2 \bmod 19$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	6
6	17
7	11
8	7
9	5

$20 \equiv 3$; $\quad a^3+2$; $\quad 36-19=17$; $\quad 49-38=11$

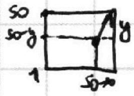
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(5) $19\cdot 2^x = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45) > 0$

$|y| \geq 46 \quad x \in \mathbb{N}$



Если $K \geq 2$ и $x-K \geq 2$, то ∅

1) $\begin{cases} y-45 = 2^K \\ y+45 = 2^{x-K}\cdot 19 \end{cases}$ $\quad 90 = 19\cdot 2^{x-K} - 2^K$

$K > x-K \quad 90 = 2^{x-K}\cdot(19-2$ $\quad K \leq x-K \quad 90 = 2^{\cancel{x-K}}($

$K = 1 \quad y = 47 \quad 92 = 2^{x-1}\cdot 19$

$x-K=1 \quad y+45 = 38$ ∅

2) $\begin{cases} y-45 = \cancel{2^K}\ 2^{x-K}\cdot 19 \\ y+45 = \cancel{2^{x-K}\cdot 19}\ 2^K \end{cases}$ $\quad K=1 \quad y+45=2$ ∅ $\quad x-K=1 \quad y-45=38 \quad y=83$

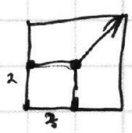
$\cancel{x-K}\ K = 7$

$x = 8$

$(8; 83)$

$10 + 12\cdot 4 + 14 =$

$= 72 - 0 = 72$



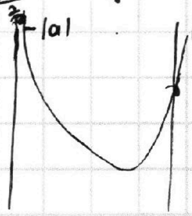
(6) $x^2+y^2=a^2$

$x^2 - 6x + a$ $\quad x_0 = \frac{6}{2} = 3$

$max = 8$

$x \in [-|a|, |a|]$

$25+32+27+45+27$



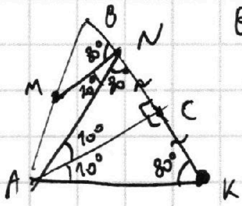
$x = |a|$

$\max(a^2 - 6|a| + a,\ a^2 + 6|a| + a) = 8$

$a^2 + 6|a| + a > a^2 - 6|a| + a$

$a^2 + 6|a| + a = 8$

(7)



$BN\cdot MA = 2BM\cdot NC$

$\frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{MA}$ $\quad \frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$

$\frac{BK}{BN} = \frac{AB}{BM}$

$\frac{BN}{BK} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \triangle BMN \sim \triangle BAK$

$10°$

(6) $a^2 + 6|a| + a = 8$

$a \geq 0$: $a^2 + 7a - 8 = 0$, $D = 49 + 4\cdot 8 = 81$, $a = \frac{-7\pm 9}{2} = \left[\begin{array}{l} 1 > 0 \\ -8 < 0 \end{array}\right.$

$a < 0$: $a^2 - 5a - 8 = 0$, $D = 25 + 4\cdot 8 = 57$, $a = \frac{5\pm\sqrt{57}}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{5+\sqrt{57}}{2} > 0 \\ \frac{5-\sqrt{57}}{2} < 0 \end{array}\right.$

$\boxed{\text{при } a = 1;\ \frac{5-\sqrt{57}}{2}}$

$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$

$D = 4 - 4\cdot 4\cdot 3 < 0$

$= |2x-7|$

(3) $|\sqrt{x^2-2x-3} + 6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1| + |7-2x|$

$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1| + |2x-7|$

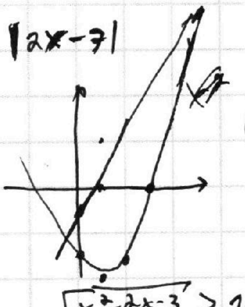
$x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$(x+1)(x-3) \geq 0$

$x \in [3; 3{,}5)$ $\quad x \in [3{,}5; +\infty)$

$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{\ } + 2x - 1 - 2x + 7$ $\quad 6 \geq 2x - 1 + 2x - 7$

$6 \geq 6$ верно. $\quad 4x \leq 14 \quad x \leq 3{,}5 \quad x = 3{,}5$



$(x-1)^2 - 4$

$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq 0$

$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$

$\cancel{D = 4 - 4\cdot 4\cdot 3 < 0}$

$\boxed{x \in [3; 3{,}5]}$

$-4x + 2$

$x \leq -1 \quad -4x + 2 \geq 4 + 2 \geq 6$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1 - 2x$

если $1 - 2x < 0$, то $\forall x$ – верно

$x \in (-\infty; -1)$: $\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 2x + 1 - 2x + 7$

$2\sqrt{x^2-2x-3} \geq -2x + 1 - 2x + 7 - 6 = -4x + 2$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geq -2x + 1\ |\ ()^2$

$x > 0{,}5$

иначе $3x^2 - 2x + 4 \leq 0$ неверно $\quad D = 4 - 4\cdot 4\cdot 3$