

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №1. $289 = 17^2$

$$\begin{aligned}(n-1)! + n! + (n+1)! &= (n-1)! \cdot (1 + n + n(n+1)) = \\ &= (n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2 = f(n)\end{aligned}$$

Заметим, что при $n=16$, $f(n) \div 289$, а если $n < 16$, то $f(n) \nmid 289$, ведь $a! \div b$ только если $a \geq b$ (b — простое) 17 — простое ведь $(n-1)!$ не содержит делителя 17 при $n < 16$, а $(n+1)^2 \div 17$ только если $n+1 \div 17 \Rightarrow n \geq 16$. Используя факт, что если $a \div b^2$, то $a \div b$.

Ответ: 16.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №2.

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 =$$
$$= 7n^2 + 28 \rightarrow \text{7 послед. чисел.}$$

$$7n^2 + 28 - 28 = 7n^2$$

$$7n^2 = N^5 \Rightarrow N:7 \Rightarrow n:7$$

~~Пусть $n=7b$, $N=7c$.~~

~~$7 \cdot b^2 = 7^5 \cdot c^5$ $b^2 = 7^4 \cdot c^5 \Rightarrow b:7$ Пусть $b=7a$~~

~~$7^2 \cdot a^2 = 7^2 \cdot c^5$ $a^2 = c^5$ Пусть $c=d^2$, тогда~~

~~$N=7d^2$ Пусть $N=7b$~~

$$7n^2 = 7^5 \cdot b^5$$

$$n^2 = 7^4 \cdot b^5 \Rightarrow b = 7^c$$

При $c=0$ $N \leq 8 \ominus$ При $c=1$, $n^2 = 7^9 \ominus$

При $c=2$ $n^2 = 7^{14}$ $n = 7^7 \oplus$

$$N = 7 \cdot 7^2 = 343 \text{ меньше быть не может.}$$

ОТВЕТ: 343.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №3. ОДЗ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

Пусть $x > 6$, тогда (1) > 0 (2) > 0 (3) < 0

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+x-6$$

$$2x \leq 12 \quad x \leq 6 \Rightarrow x \notin (6; +\infty)$$

Пусть $2 \leq x \leq 6$, тогда (1) > 0 (2) > 0 (3) ≥ 0

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x$$

$$5 \geq 5 \Rightarrow x \in [2; 6]$$

Пусть $x \leq -1$, тогда (1) > 0 (2) < 0 (3) ≥ 0

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 1-x-\sqrt{x^2-x-2}+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \quad \text{или} \quad \text{Пусть } 1-x < 0, \text{ то } \textcircled{+}$$

$$\text{или } 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x \notin (-\infty; -1] \quad (\text{это служит док-вом,}$$

что при $x < -1$ (2) < 0 .)

ОТВЕТ: $x \in [2; 6]$.

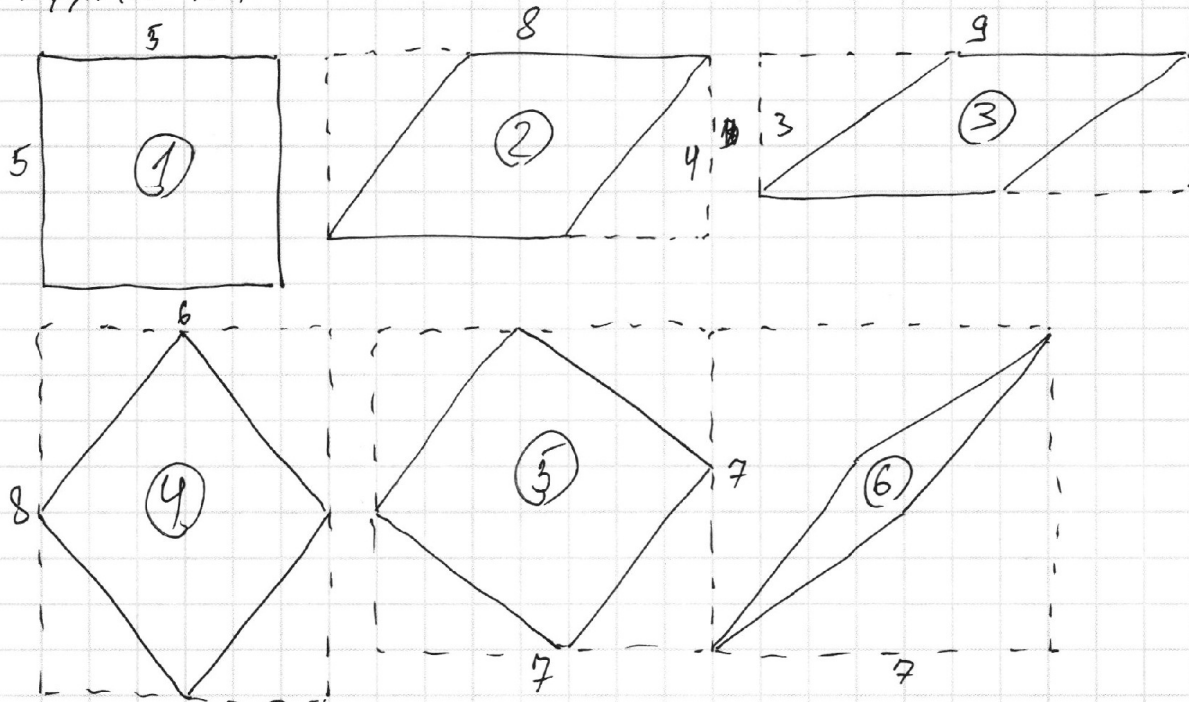


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №4



Возможно 6 видов ромбов (см. рис.)

На рисунке указаны размеры прямоугольников описанных около ромбов.

у ромба ① при повороте на $90^\circ \cdot n$ ($n \in \mathbb{N}$)^{или повороте}
форма не меняется, у ромбов ④, ⑤, ⑥

сущ. 2 ориентации, а у ②, ③ — 4 ориент.

Возможностей разместить прямоугольникам в поле 44×44 (следует из заданного промежутка) $K_m^n = (45-n)(45-m)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит всего способов существует.

$$\begin{aligned} & K_5^5 + K_8^4 \cdot 4 + K_9^3 \cdot 4 + K_8^6 \cdot 2 + K_4^7 \cdot 2 + K_4^7 \cdot 2 = \\ & = 40 \cdot 40 + 41 \cdot 37 \cdot 4 + 42 \cdot 36 \cdot 4 + 39 \cdot 37 \cdot 2 + 38^2 \cdot 4 = \\ & = 1600 + 6068 + 6048 + 2886 + 5776 = \\ & = 1600 + 12116 + 8662 = 1600 + 20778 = 22378 \end{aligned}$$

Ответ: 22378.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

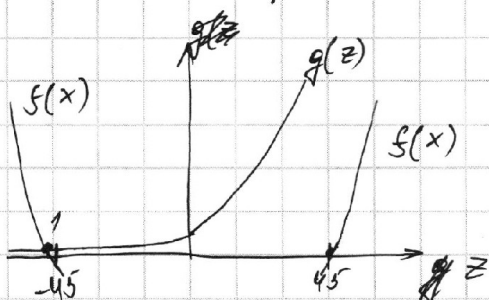
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №5.

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

Пусто $f(z) = 23 \cdot 2^z$, $g(z) = z^2 - 2025$.



т. пересечения 1 не имеет целых координат, ведь

$$23 \cdot 2^{-a} (a > 0) \notin \mathbb{Z}$$

При $z = 45$ скорость роста $f(z)$:

$$(46^2 - 2025) - (45^2 - 2025) = 91, \text{ а } g(z):$$

$$23 \cdot 2^{46} - 23 \cdot 2^{45} = 23 \cdot 2^{45} > 91, \text{ причём раз}$$

$g(z)$ — экспоненциальная, а $f(z)$ — квадратичная, то пер. $g(z)$ растёт быстрее $f(z)$ $z \geq 45$, а значит $g(z)$ и $f(z)$ имеют лишь одну общ.

точку (1), ведь $g(z)$ всегда выше абсциссы, а $f(z) \geq 0$ при $z \in (-\infty; -45] \cup [45; +\infty)$ (см. рис.)

ОТВЕТ: ТАКИХ ПАР НЕТ.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

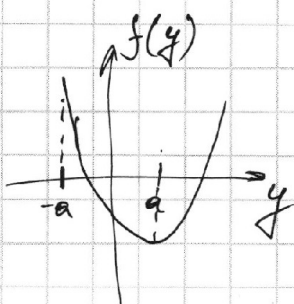
ЗАДАЧА №6.

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y \in [-a; a]$$

$$f(y) = y^2 - 4y - a$$

Наибольшее $f(y)$ при ~~наимень~~

$$y = \min(a; -a). \text{ (см. рис.)}$$



Пусть $a > -a \Rightarrow a > 0$, тогда $f(y)$ - макс при $y = -a < 0$

$$f(y) = a^2 + 4a - a = 6$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{2433}}{2} = \cancel{-3 \pm 385} \quad a > 0 \Rightarrow a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} > 0$$

Пусть $a < -a (\Rightarrow a < 0)$, тогда $f(y)$ - макс при

$$y = a < 0$$

$$f(y) = a^2 - 4a - a = 6$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}; \quad a < 0 \Rightarrow a = -1 > 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } a = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}; -1 \right\}$$



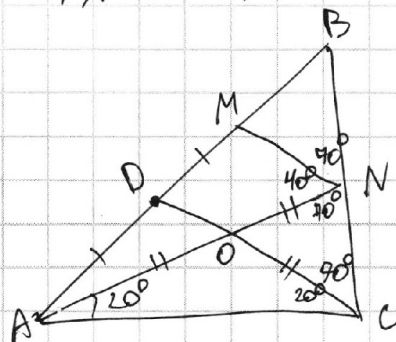
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №4



Пусть D — середина AM,
тогда раз $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$,

$$\text{то } BN \cdot DM = BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{DM} \Rightarrow \triangle DBC \sim \triangle MBN$$

$$\Rightarrow DC \parallel MN \Rightarrow \angle ANC = 70^\circ$$

(как соотв. $\angle MNC$) $\Rightarrow \triangle NOC$ — равнобед., (см. рис.)

$\angle AOC = 140^\circ$ (как внешний) $DO \parallel MN \Rightarrow \triangle ADO \sim$

$\triangle AMN \Rightarrow$ раз $AD = DM \Rightarrow AO = ON$ и $ON = OC \Rightarrow$

$OC = OA \Rightarrow \triangle AOC$ — равнобед., $\Rightarrow$ раз $\angle AOC = 140^\circ$

то $\angle ACO = \angle CAO = 20^\circ \Rightarrow \angle ACN = 20^\circ$

Ответ: 20° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

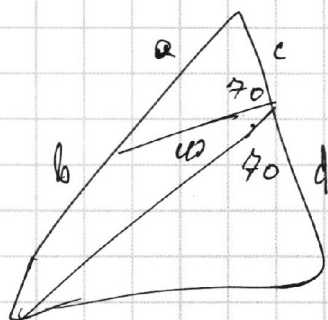
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

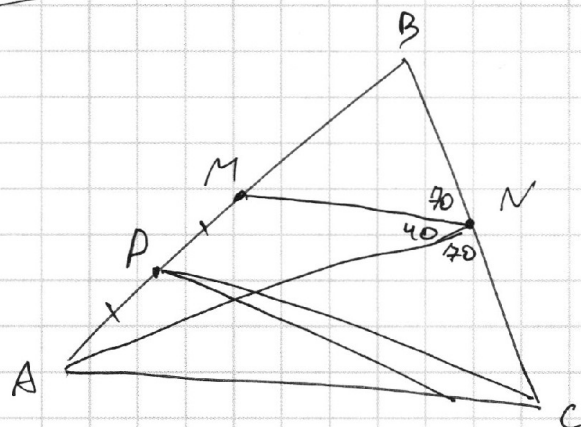
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №1.

$$(n-1)! + n! + (n+1)!$$



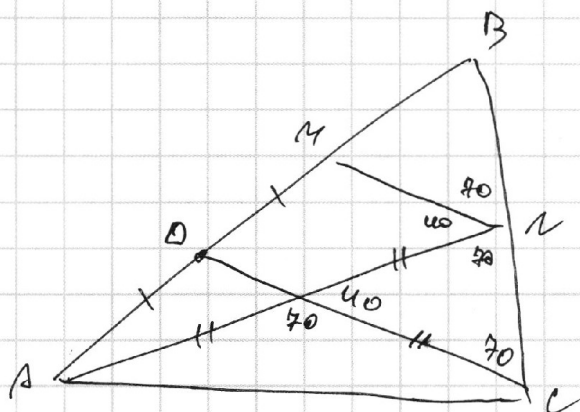
$$c.b = 2ad$$



$$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA}$$

$$MN \parallel DC$$



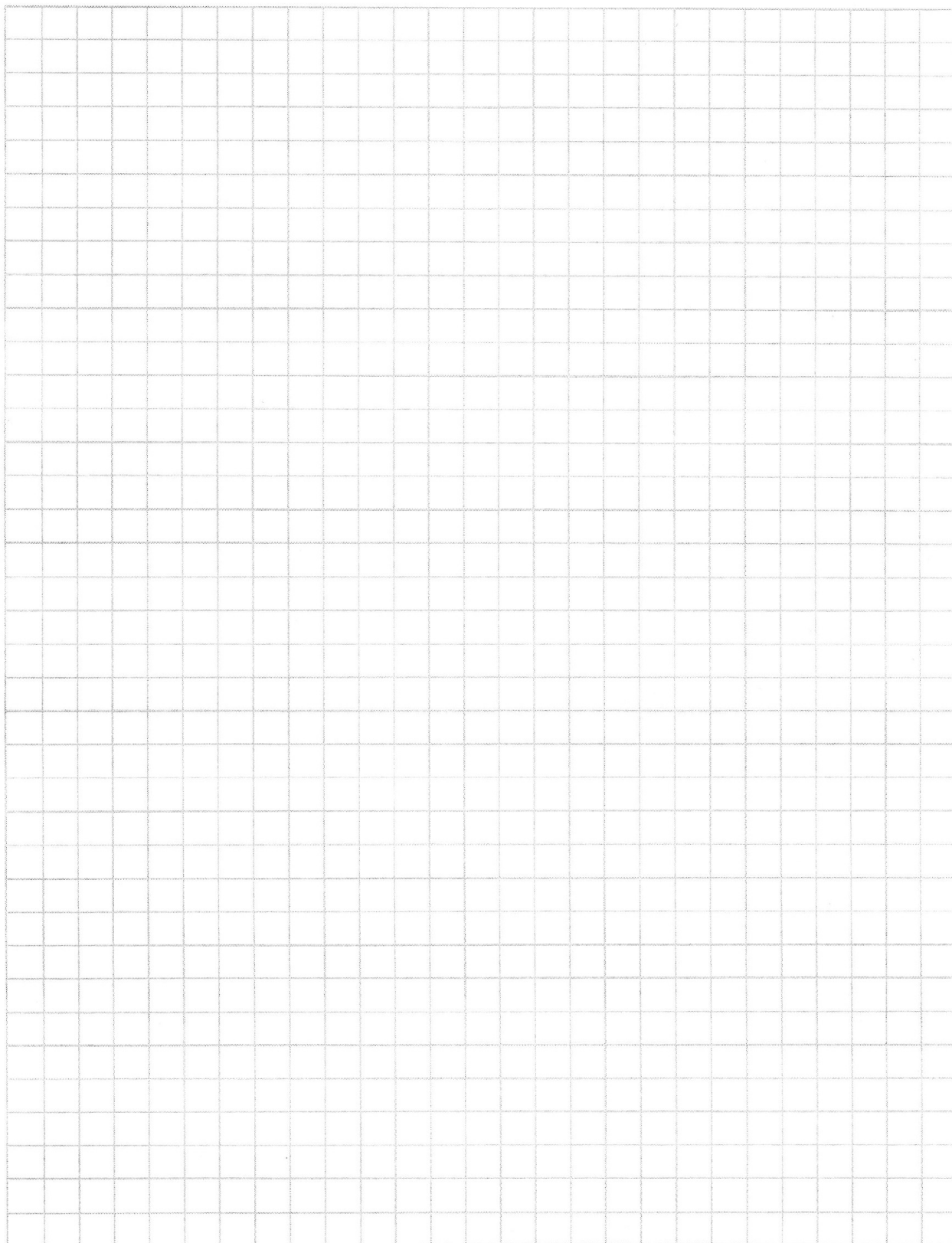


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)!$$

$$(n-1)! (1 + n + n(n+1)) : 289 = \frac{119}{14} \cdot 17^2$$

$$1 + n + n^2 + n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$(n-1)! (n+1)^2 : 17^2$$

$$n = 16$$

$$n = 18$$

$$n = 16 - 15! \cdot 17^2$$

$$(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 =$$

$$= 7a^2 + (9+4+1)2 = 7a^2 + 28 = \sum$$

$$\sum - 28 = 7a^2 =$$

$$7a^2 = N^5 = 7^5 \cdot n^5$$

$$a^2 = 7^4 \cdot n^5$$

$$n = 7^{3/2}$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$|\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1| + |6 - x| \quad x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x \quad x \leq -1$$

$$x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$x \geq 3$$

$$x > 6$$

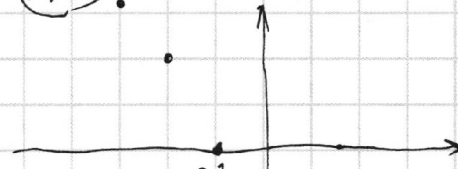
$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + x - 6$$

$$2x \leq 12 \quad x \leq 6$$

$$x: 2-6$$

$$5 \geq x - 1 + 6 - x$$

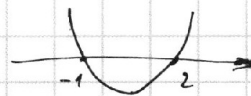
$$5 \geq 5$$



10000
10098

$$x^2 - x - 2 \quad x < 3$$

$$x^2 - 2x + 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - x + 6 - x \quad x \leq -2$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; 6].$$

$(x; y+5) 5$ $(x+5; y+5)$

5 $(x; y)$ $(x+5; y)$

5 $(x; y)$

$(x+8; y+4)$

$x+3y+9$

$x y+8$

5 5

$x+3 y+4$

$x y$

$x=1$

$x+5=45$

$x=40$

40

$x+3y+9$

$x y$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$2^x \ln 2$$

$$23 \ln 2 \cdot 2^x$$

$$2y$$

$$2y$$

$$\frac{2^{x+dx} - 2^x}{dx} = \frac{2^x (2^{dx} - 1)}{dx}$$

$$23$$

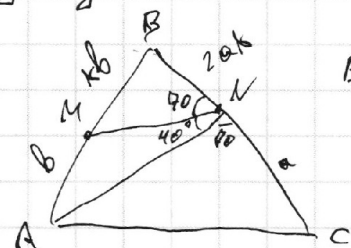
$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$31$$

$$y^2 - 4y - a \quad \text{MAX} = -\frac{D}{4a} = -\frac{16 + 4a}{4} = -4 - a = 6$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA} = 2x$$

$$NC = a$$

$$a = -60$$



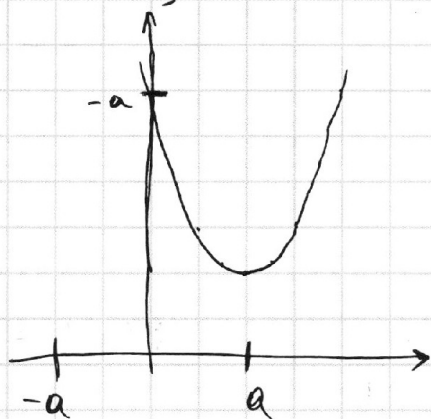
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - 4y - a = (y-2)^2 - 4 - a = f(y)$$



$$a^2 = c^5$$

$$c = d^2$$

$$N = 7d^2$$

$$7^3 \cdot b^2$$

$$\begin{array}{r} 164 \\ \times 37 \\ \hline 1148 \\ 492 \\ \hline 6068 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times 36 \\ \hline 1008 \\ + 504 \\ \hline 6048 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 37 \\ \hline 546 \\ + 234 \\ \hline 2886 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 76 \\ \hline 456 \\ 532 \\ \hline 5746 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 2886 \\ + 5776 \\ + 8662 \\ \hline 12116 \\ 20978 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20978 \\ + 1600 \\ \hline 22378 \end{array}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a = \{6; -1\}$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$a^2$$

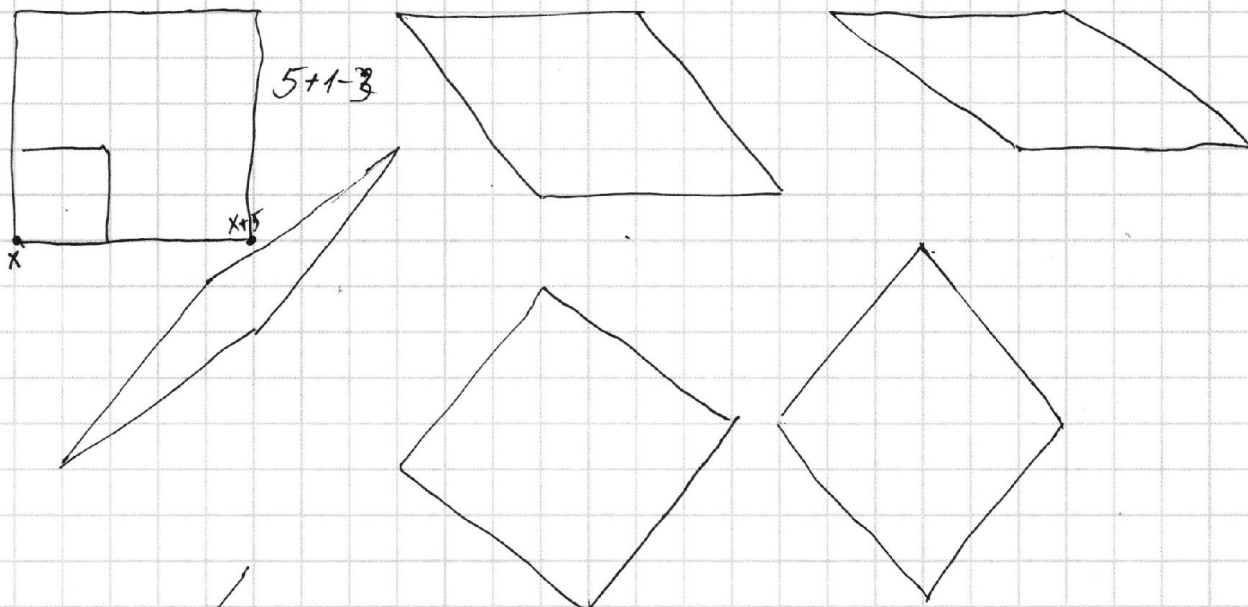


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

$23 \cdot 2^{46} - 23 \cdot 2^{45} = 23 \cdot 2^{45}$

$46^2 - 45^2 = 91$

$y^2 - 4y - a = (y-2)^2 - 4 - a$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{16+4a}}{2} = 2 \pm \sqrt{4+a}$

$a \leq 2 \pm \sqrt{4+a}$

$a^2 - 4a - a = 6$

$a^2 - 5a - 6 = 0$

$a = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$

$a = 6$ or $a = -1$

$x^2 + y^2 = a^2$

$y \in [-a; a]$