

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! + (n+2)! &= n! (1 + (n+1) + (n+2)(n+1)) = \\ &= n! (n+2 + n^2 + 3n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 \end{aligned}$$

(27)

Видим, что при $n=17$ выражение делится на 361
(т.к. $(n+2)^2 = (17+2)^2 = 19^2 = 361$)

Заметим также, что при $n < 17$ каждое из чисел

$(n+2); n; (n-1); (n-2); \dots; 2$ меньше 19, а значит,

не делится на 19. И так как число 19 простое,

то и произведение $n! (n+2)^2$ не делится на 19.

Раз оно не делится на 19, то на $361 = 19^2$ тоже не делится.

Следовательно, $n=17$ — наименьшее подходящее n .

Ответ: $n=17$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a — меньшее из пяти последовательных натур. чисел (N2)

Тогда $a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 - 10 = N^3$ $N > 6$

$$5a^2 + (2+4+6+8)a + 1+4+9+16-10 = N^3$$

$$5a^2 + 20a + 20 = N^3$$

$$5(a^2 + 4a + 4) = N^3$$

$$5(a+2)^2 = N^3$$

Видим, что $(a+2) : 5$, но если $a+2=5$, то $N=5 < 6$. Нам не подходит.
Значит, число $(a+2)$ должно содержать ещё какой-то множитель в третьей степени.*
Меньший из таких множителей — 2^3 .

Тогда $a+2 = 5 \cdot 2^3$; $N^3 = 5 (5 \cdot 2^3)^2 = 5^3 2^6$

$$N = 5 \cdot 2^2 = 20$$

Получается, наименьшее $N=20$ достигается при $a = 5 \cdot 2^3 - 2 = 38$

Ответ: $N=20$

(*) Отличный от единицы

(*) если степень этого множителя не будет кратна 3, то N не будет натур.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13 продолжение

(I) $x \leq -1$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 1 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \quad 1 - 2x \geq 0 \text{ при } x \leq 0,5$$

Значит, в правой части положит. число

Возведём обе части в квадрат

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = -44 < 0, a = 3 > 0 \text{ ветви п. вверх}$$

$$x \in \emptyset$$

(II)

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$6 \geq 6$$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

$$x \in [3; 3,5]$$

$$3 \leq x \leq 3,5$$

(III)

$$x > 3,5$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 2x - 7$$

$$4x \leq 14$$

$$x \leq 3,5$$

$$x \in \emptyset$$

Из всех трёх случаев нам подходит $x \in [3; 3,5]$

Ответ: $x \in [3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

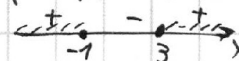
23

$$|\sqrt{x^2-2x-3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7-2x|$$

① $\sqrt{x^2-2x-3}+6 > 0$ при любом x (неотриц. + полож.)

② $x^2-2x-3 \geq 0$ (*)

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

(*) подкоренное выражение неотрицательно

$\Rightarrow$ неравенство имеет смысл при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

② $|7-2x| = \begin{cases} 7-2x & \text{при } x \leq 3,5 \\ 2x-7 & \text{при } x > 3,5 \end{cases}$

③ Решим нер-во:

$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x$$

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 & \text{при } x \leq 0,5 \\ 1-2x < 0 & \text{при } x > 0,5 \end{cases}$$

при $x \in [3; +\infty)$ неравенство выполняется т.к. в правой части отрицательное число, а в левой — неотрицательное

Рассмотрим теперь $x \in (-\infty; -1]$:

Тогда справа положительное число, и мы можем возвести обе части в квадрат

$$x^2-2x-3 \geq 4x^2-4x+1$$

$$3x^2-2x+4 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -44 < 0, a = 3 > 0 \text{ ветви параболы вверх}$$

Значит, неравенство неверно при любом $x \in (-\infty; -1]$

$$|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| = \begin{cases} \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 & \text{при } x \geq 3 \\ 1-2x-\sqrt{x^2-2x-3} & \text{при } x \leq -1 \end{cases}$$

④ Раскроем все модули в зависимости от значения x :

$$\sqrt{x^2-2x-3}+6$$

$$1-2x-\sqrt{x^2-2x-3}$$

$$7-2x$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}+6$$

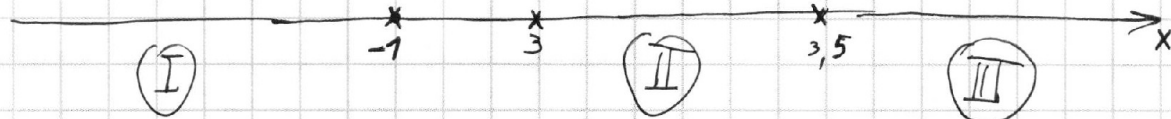
$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1$$

$$7-2x$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}+6$$

$$-1+2x+\sqrt{x^2-2x-3}$$

$$2x-7$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☒

5 ☐

6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

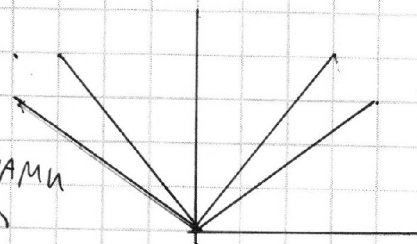
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(~4)

Рассмотрим вершину ромба с ~~мин~~ наименьшей ординатой, если такая вершина не одна, то рассматриваем из них вершину с меньшей абсциссой.

Из неё могут быть проведены такие отрезки:

Ромб однозначно задаётся двумя сторонами проведёнными



~~Тогда~~ Если из вершины можно провести ^{отрезков} ~~и~~ ~~так~~ так, что ромб, построенный на любых двух из них, подходит, то существует C_n^2 ромбов с этой вершиной.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

Замена $t = y - 45$

$$t(t+90) = 19 \cdot 2^x$$

(N5)

~~t и $t+90$ — числа одинаковой чётности
значит, t должно быть чётным~~

...

подходит ~~$t=38$, тогда~~ $t=38$ и $x=8$, тогда $y=83$ и $x=8$
— одно решение.
Если подходит $(8; 83)$, то подходит и $(8; -83)$

Ответ: $(8; 83)$
 $(8; -83)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N 6)

Уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ задаётся окружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$, (либо точка $(0;0)$, если $a=0$)
Значит, x принимает все значения, ~~а не на отрезке $[-a; a]$~~
~~от $-a$ до a~~ . модуль которых не больше $|a|$.

Пар. Вершина параболы $y = x^2 - 6x + a$ имеет абсциссу
 $x_B = -\frac{b}{2a} = 3$.

т.к. ветви параболы смотрят вверх, то эта функция убывает на $(-\infty; 3]$ и возрастает на $[3; +\infty)$

Если $a \geq 0$ ^(*), то ~~максимум~~ наибольшее значение выражения достигается при $x = -a$, т.к. расстояние от x_B до $-a$ по оси x больше, чем расстояние до любого другого значения в промежутке $[-a; a]$

Можем записать:

$$a^2 + 6a + a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2}$$

$$a = 1$$

$$a = -8 \text{ не подходит, т.к. } a \geq 0 \text{ (*)}$$

Если $a < 0$ ^(**), то наибольшее значение выражения достигается при $x = a$ по той же причине

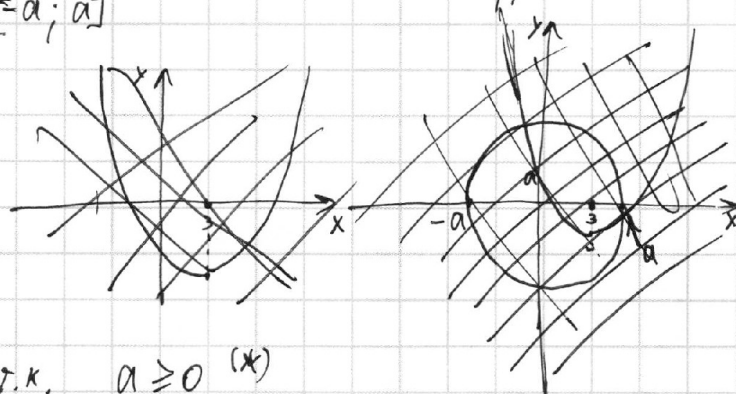
$$a^2 - 6a + a = 8$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2}$$

$$a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \text{ не подходит, т.к. } a < 0 \text{ (**)}$$

$$a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} \quad \sqrt{57} > \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{57}}{2} < 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

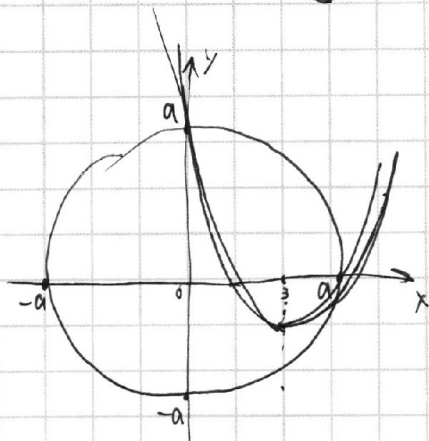
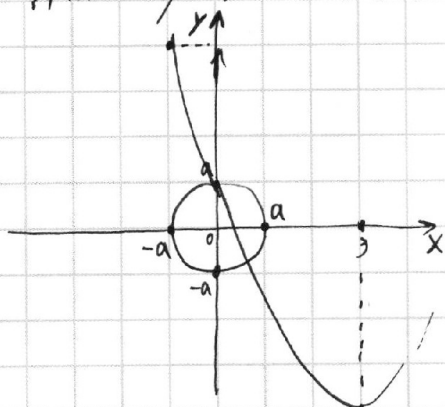
№6 продолжение

Из двух случаев подходят значения $a=1$ и $a=\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

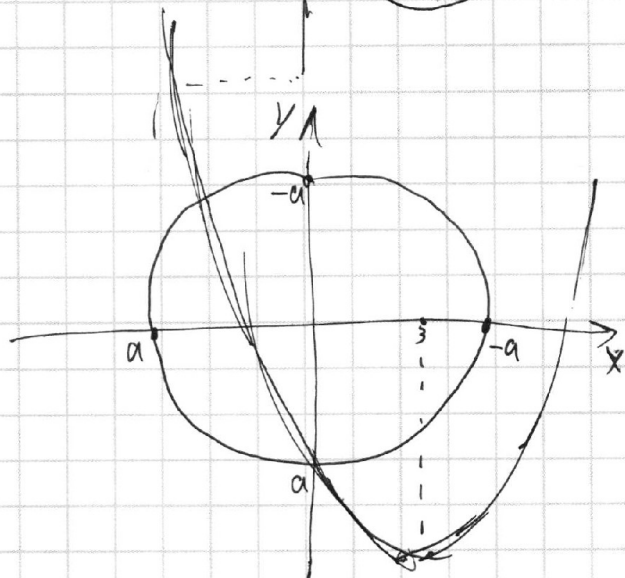
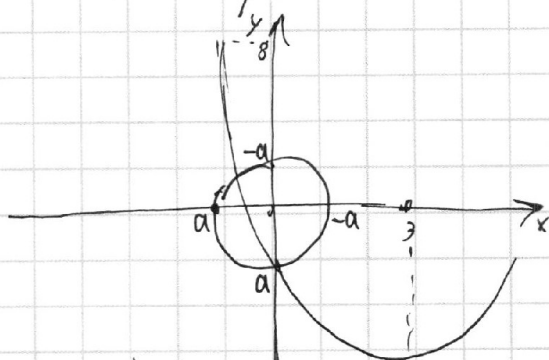
Ответ: 1 ; $\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

~~иллюстрация для случая~~

для случая $a \geq 0$



для случая $a < 0$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

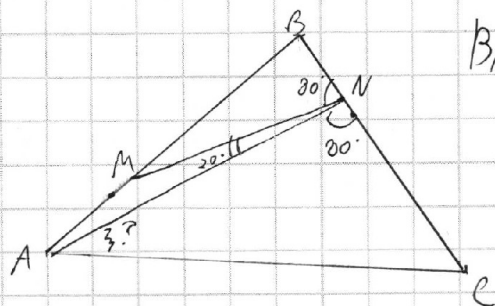
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$N > 6$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 - 10 = N^3$$

$$5a^2 + (2+4+6+8)a + \cancel{4} + \cancel{4} + 16 - \cancel{4} = N^3$$

$$5a^2 + 20a + 20 = N^3$$

$$5(a^2 + 4a + 4) = N^3$$

$$5(a+2)^2 = N^3$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 - 10$$

$$\cancel{2} + \cancel{16} + 25 + 36 + 49 - \cancel{4}$$

10

3 4

$$5 \cdot 5^2 \cdot 2^6$$

$$5 \cdot 2^3 = 40$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 190 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$1+2+6$$

$$2+6+26$$

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! + (n+2)! &= n! (1 + n+1 + (n+2)(n+1)) = \\ &= n! (n+2 + n^2 + 3n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) = n! (n+2)^2 \end{aligned}$$

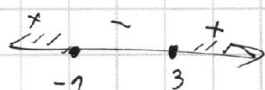
$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$

$$8 = 4$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$$

$$x \leq 3.5$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \\ x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$1+2-3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$t(t-90)$

$19m$

$19m-90$

38

4

t^2-90

19

2^{25}

$t^2 = 19 \cdot 2^x - 90$

$t^2 + 90 = 19 \cdot 2^x$

$t = -45 \pm \sqrt{2025 + 19 \cdot 2^x}$

$19m-90$

$38 \cdot 128 = 19 \cdot 2 \cdot 2^7 = 19 \cdot 2^8$

$a^2 - 6a + a = 8$

$a^2 - 5a - 8 = 0$

$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$19 \cdot 2^x + 45^2$

46^2

$19 \cdot 2 + 90 = 128$

$38 = k = y - 45$

$y = 83$

$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x - 17$

$k(k+90) = 19 \cdot 2^x$

$19 \cdot 2^n = k$

$19 \cdot 2^{x-n} = k+90$

$2^n = k$

$19 \cdot 2^{x-n} = k+90$

$19 \cdot 2^{x-n} - 2^n = 90$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$

$x \in [a; a]$

$a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2}$

$a = \frac{-7 \pm 9}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}$

$19 \cdot 4 = 76$

14



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

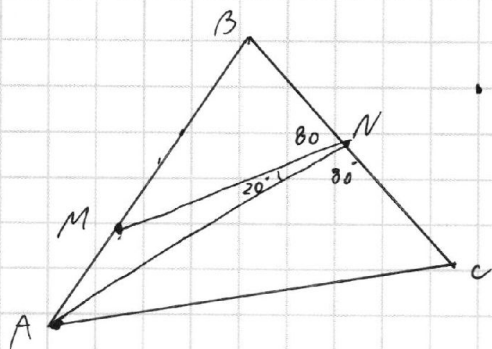
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(Черновик)



$$BN \cdot MA = 2 BM \cdot NC$$

