

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $361 = 19^2$ 19 - простое
$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(1 + n+1 + (n+2)(n+1)) =$$
$$= n!(n^2 + 3n + 2 + n + 2) = n!(n^2 + 4n + 4) =$$
$$= n!(n+2)^2, \text{ тогда при } n=17$$
$$17! \cdot (19)^2 \div 361, \text{ ну а при мень-}$$

ших n $n! \div 19$ и $n+2 \div 19$, т.к ни одно из чисел от 1 до $n+2$ при $n < 17$ не делится на 19, т.к. все они < 19 , а 19 простое, то и $n!(n+2)^2 \div 19$, т.к 19 - простое.

Ответ: $n = 17$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наименьшее из чисел это a
тогда $a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = 10 =$
 $= 5a^2 + 20a + 20 = 5(4 + 4a + a^2) =$
 $= 5(a+2)(a+2)$, т.к. $N^3 > 6^3$ и $a > 3$ и
 $(a+2)^2 = 5^2 \cdot x^3 \Rightarrow a+2 = 5 \cdot x^3$ где $x > 1$,
т.к. $x^3 \geq 8$, т.к. $x > 1$ и $a+2 =$
 $= 8 \cdot 5 = 40$, $a = 38$, $a N^3 = 5 \cdot 40^2 =$
 $8^2 = 2^6 \cdot 5^3 = 20^3 = N = 20$
Ответ: $N = 20$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2} = 9 \text{ либо } -4 \Rightarrow$$

(~~корни~~ ветви вверх)
 $\Rightarrow x < 9$ не подходит

левая часть неравенства $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$ и без
модуля всегда > 0 , а правая
часть при $x < -4$ раскрывается
так: $-\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x + 1$ (т.к. $|2x| >$
 $> \sqrt{x^2 - 2x - 3}$) $+ 4 - 2x =$

$$= -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 4x + 8 \leq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

т.к. $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \cdot 2 > 0$ возведем в 2

$$2x^2 - 4x - 3 \geq 16x^2 - 8x + 4$$

$-14x^2 + 4x + 7 \geq 0$, но при $x \leq 0$ это
не верно $\Rightarrow$ мы раскроем скобки
при $x \geq 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $x \geq 9$ она раскрывается так:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 4 + 2x$$

$$14 \geq 4x$$

$$7 \geq 2x$$

$$3,5 \geq x$$

$$\text{, но } x \geq 9$$

⇓

решений нет

Ответ: решений нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

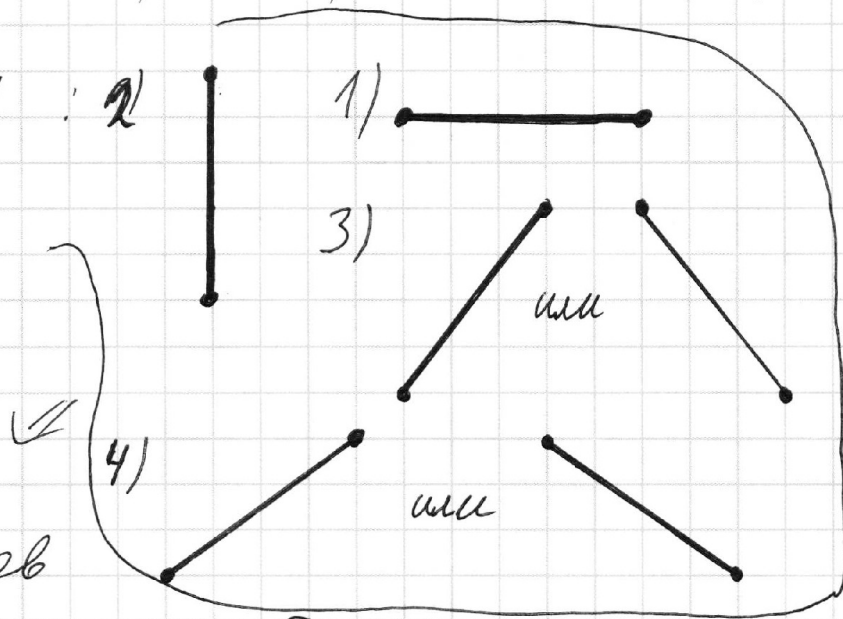
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы координаты были целыми
у отрезка АВ длины 5 должно
выполняться: $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 5$,
эти разности должны быть целыми
и равняться выполнимо это
только в 4-х вариантах:

$$\begin{array}{lll} 1) |x_A - x_B| = 5 & 2) |x_A - x_B| = 0 & 3) |x_A - x_B| = 3 \\ |y_A - y_B| = 0 & |y_A - y_B| = 5 & |y_A - y_B| = 4 \end{array}$$

$$4) |x_A - x_B| = 3 \\ |y_A - y_B| = 4$$



у нас
6 вариантов

сторон для ромба и кол-во видов
ромбов $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

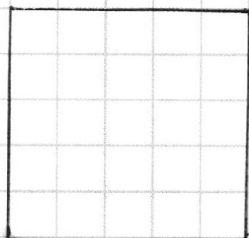
6
☐

7
☐

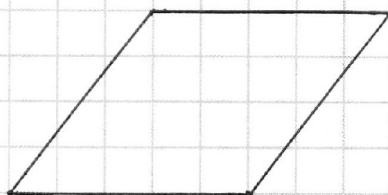
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

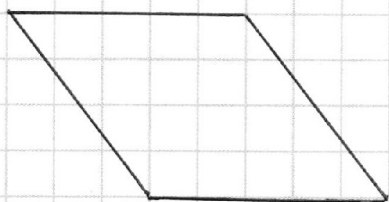
Вот виды: 1)



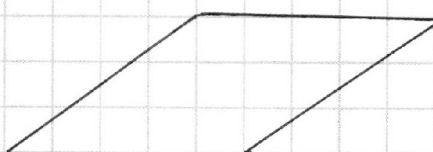
2)



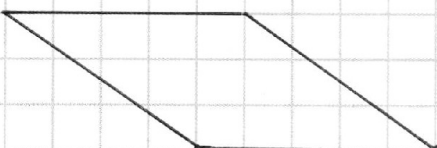
3)



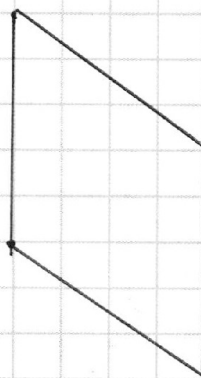
4)



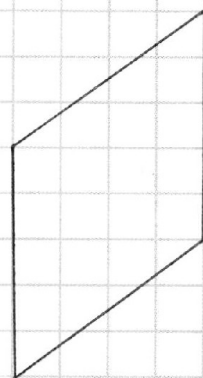
5)



6)



7)



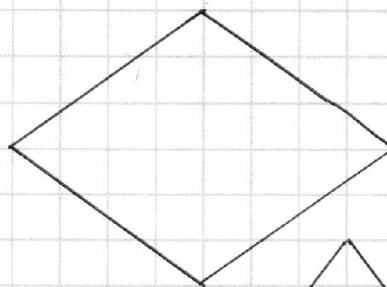
8)



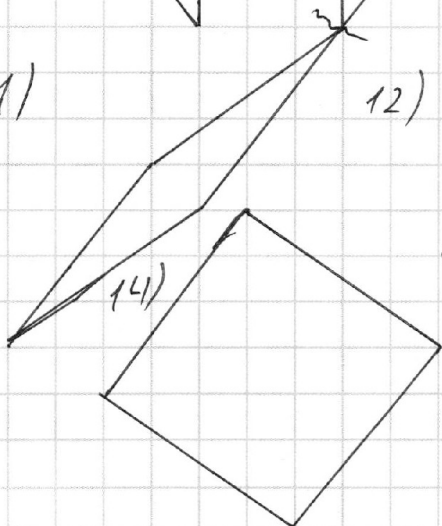
9)



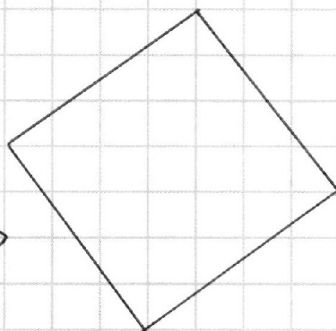
10)



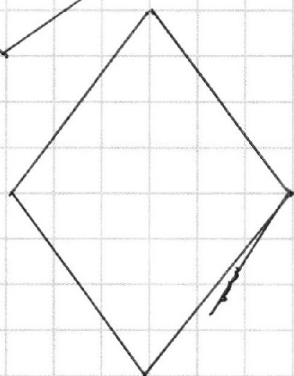
11)



12)



13)



14)

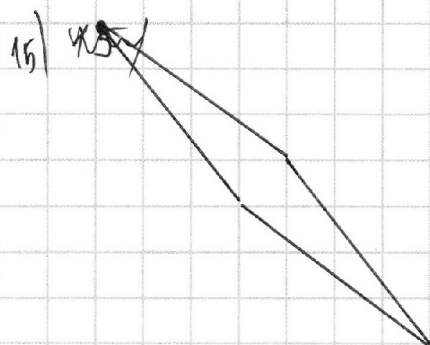


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



каждый из них имеет
высоту h_x по x и длину по
 h_y y и их кол-во
в промежутке

$$\text{от } 1 \text{ до } 50 = (50 - h_x + 1) \cdot (50 - h_y + 1) = (51 - h_x)(51 - h_y)$$

для этих видов параметры: (слева h_y)

5, 5 / 4, 8 / 4, 8 / 3, 9 / 3, 9 / 8, 4 / 8, 4 /
9, 3 / 9, 3 / 6, 8 / 7, 7 / 7, 7 / 8, 6 / 7, 7 /
7, 7 /

$$\begin{aligned} & \text{просуммируем } 4 \cdot (51 - 7)^2 + 4(51 - 9)(51 - 3) + (46)^2 + 2(51 - 6)(51 - 8) + 4(51 - 8)(51 - 4) = \\ & = 4 \cdot 44^2 + 4 \cdot 42 \cdot 48 + 46^2 + 2 \cdot 45 \cdot 43 + \\ & + 4 \cdot 43 \cdot 47 = 7744 + 8056 + 2116 + \\ & + 3840 + 7904 = 15800 + 3840 + 10020 = \\ & = 25820 + 3840 = 29690 \end{aligned}$$

Ответ: 29690



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y+45)(y-45), \text{ замечим, что}$$

$$(y+45, y-45) = (90, y-45) \Rightarrow$$

исс НОД ^{степень 2} ~~т.к.~~

$$19 \cdot 2^x \stackrel{45}{\cdot 3} \stackrel{15}{\cdot 3} \stackrel{5}{\cdot 3}$$

д.р. это значит, что $y+45$ ^{одна из} ~~степень 2~~, а другое 19 ~~степень 2 и 19~~

$y+45$ ~~при~~ $y-45$ ~~находят~~ ^{степ. 2 и находит 19} ~~степ. 2 и находит 19~~

тогда пусть $y = 45 = z$

$$19 \cdot 2^x = z(z+90) \Rightarrow \text{либо } z, \text{ либо } 90+z - \text{степень 2, другое -}$$

степень 2 $\cdot 19$

$$19 \cdot 2^x = 19 \cdot 2^k \cdot 2^e = 19 \cdot 2^k (2^e)$$

$$16 \cdot 2^k < 19 \cdot 2^k < 32 \cdot 2^k \Rightarrow \text{разности}$$

между степен. 2 выше

$$18 \cdot 2^k, 17 \cdot 2^k, 15 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 13 \cdot 2^k, \text{ (45} \cdot 2^k \text{)}$$

из этого всего, только $45 \cdot 2^k$ $\Rightarrow k=90 \Rightarrow e=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \text{ тогда } 1 + 7 = 8, \text{ а } y = 38 + 45 = 83$$

$$\text{Ответ: } x = 8, y = 83$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$ - уравнение окружности с радиусом a

$-a \leq x \leq a$, а $x^2 - 6x + a$ - параб. а - параб. с ветвями вверх $\Rightarrow$ её макс. значение либо в

a , либо в $-a$:

либо $1/a^2 - 5a = 8$, либо $2/a^2 + 7a = 8$

~~корни 0 и 5~~ ~~21~~ корни 0 и -7

$$a^2 + 4a - 8 = 0$$

$$D = 16 + 32 = 48$$

$$\pm \sqrt{48}$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = 1 \text{ или } -8$$

при $a = -8$ $x = 8$ $64 + 48 - 8$ (не подходит)

при $a = 1$ $x = 1$ $1 - 6 + 1 = -4$
 $x = -1$ $1 + 6 + 1 = 8$ (подходит)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дано уравнение $a^2 + 5a - 8 = 0$

$$D = 25 + 4 \cdot 8 = 25 + 32 = 57$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

проверим и эти корни

$$e = \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right)^2 + \frac{25 + 5\sqrt{57}}{2} - 8$$

$$\sqrt{57} > 7$$

$$e \Rightarrow 6^2 + 6 \cdot 5 - 8 > 8$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 + 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) - 8 \Rightarrow$$

$$> \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 + 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) - 8, \text{ т.к. } 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) < 0$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 - 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) - 8 \stackrel{?}{=} 8$$

$$(5 - \sqrt{57})^2 - 10(5 - \sqrt{57}) \stackrel{?}{=} 64 \stackrel{?}{=} 25 + 57 - 10\sqrt{57} - 50 + 10\sqrt{57} = 64$$

ответ: $a = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

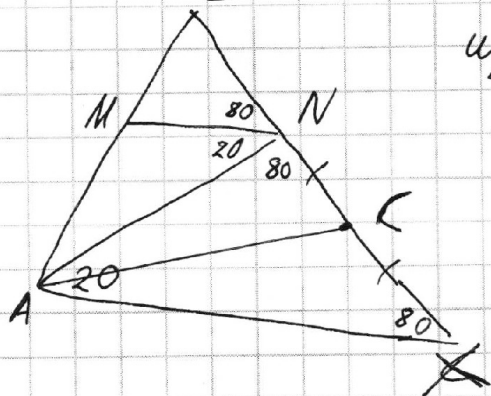
☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте проведем $||MN$ через A
пересекает BC в X , тогда
 $NX \cdot MB = BN \cdot MA$, т.к. $MNB \sim AXB$,
значит C - середина NX



из параллельности
 MN и AX $\angle MNA =$
 $= \angle XAN = 180 - 80 : 2 =$
 $= 20^\circ$, т.к. $\angle ANX =$
 80° $\triangle ANX$ - р/б $\Rightarrow$

AC и медиана и
бис-са $\Rightarrow \angle NAC = \frac{20^\circ}{2} =$

$$= 10^\circ$$

Ответ: $\angle NAC = 10^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

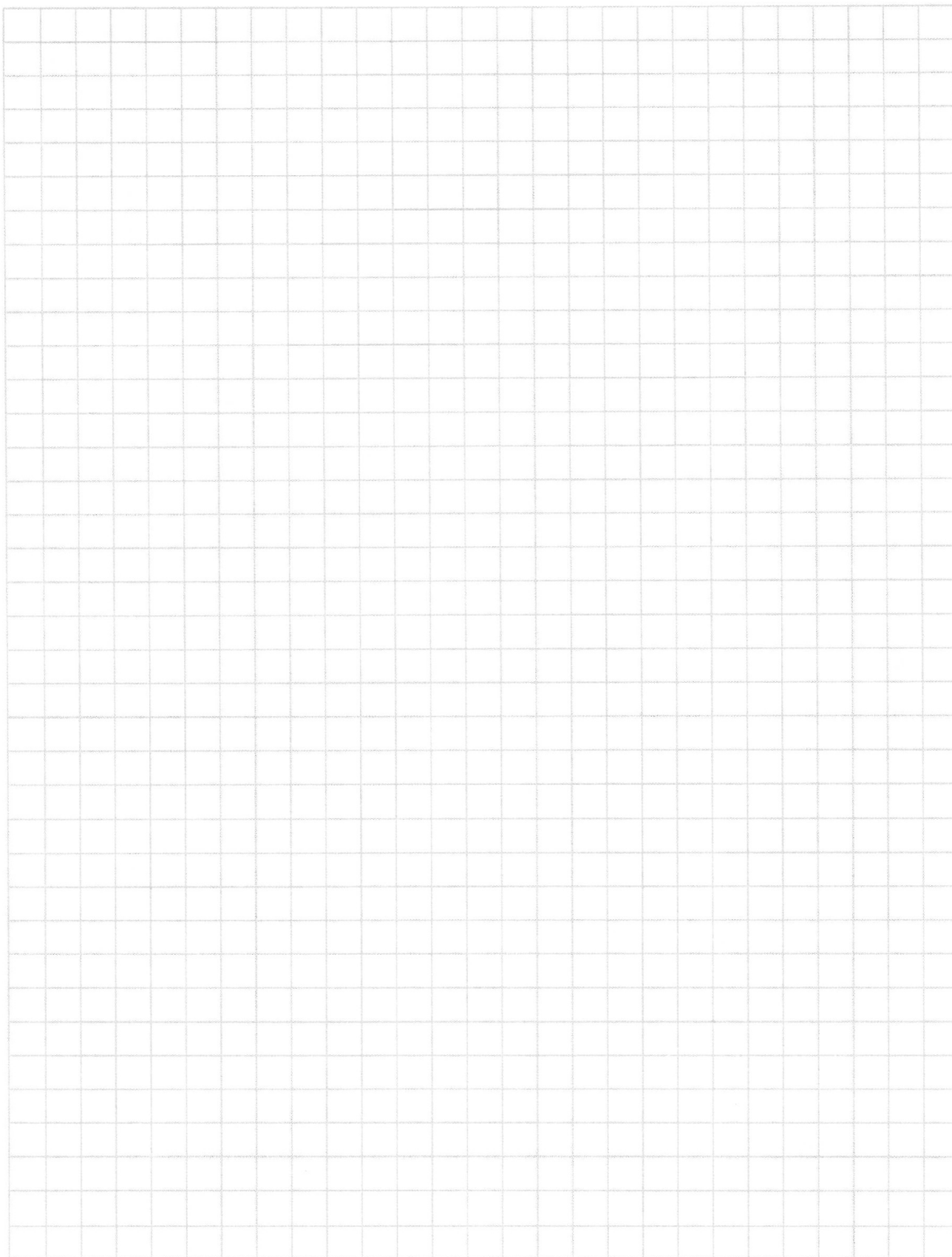
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

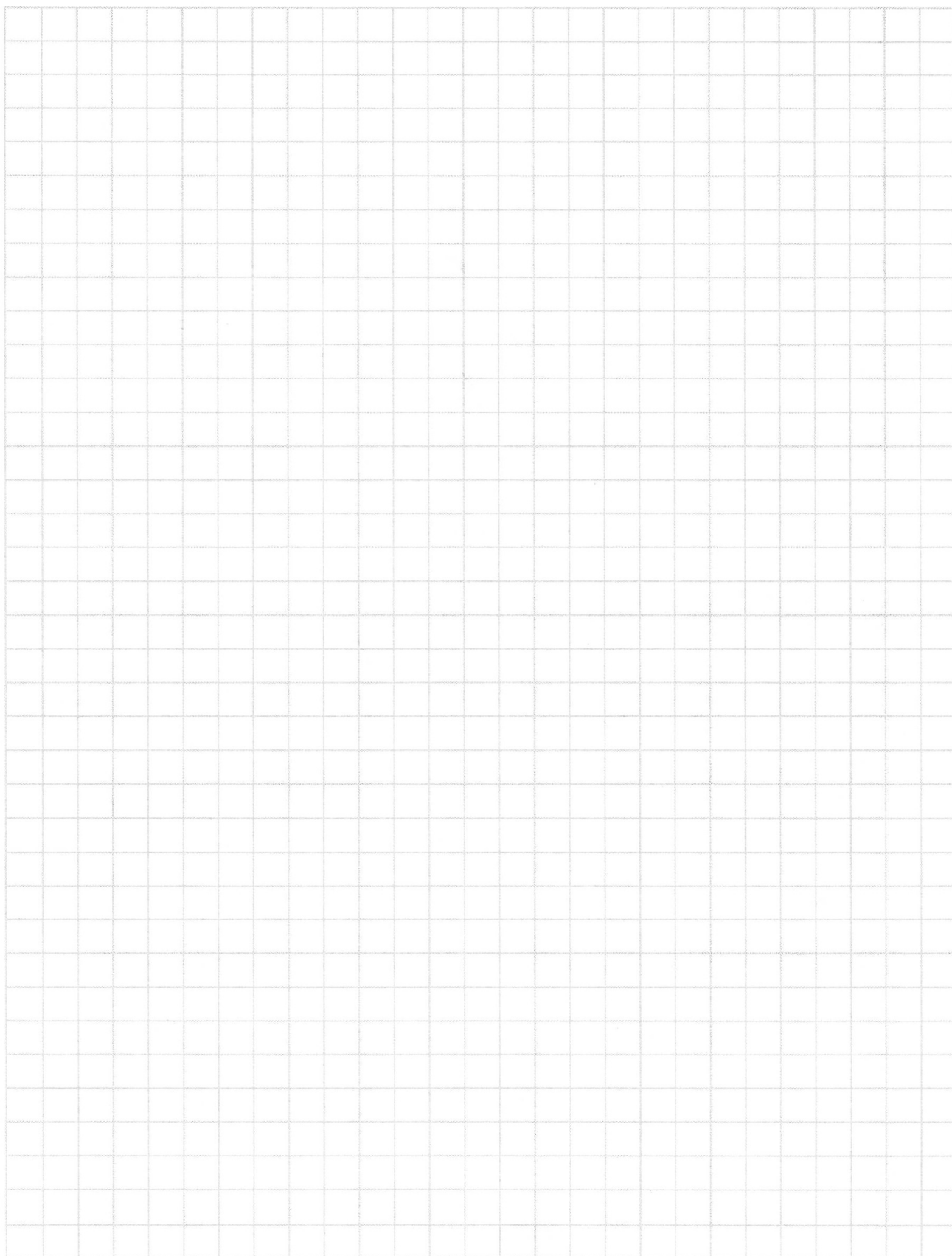
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





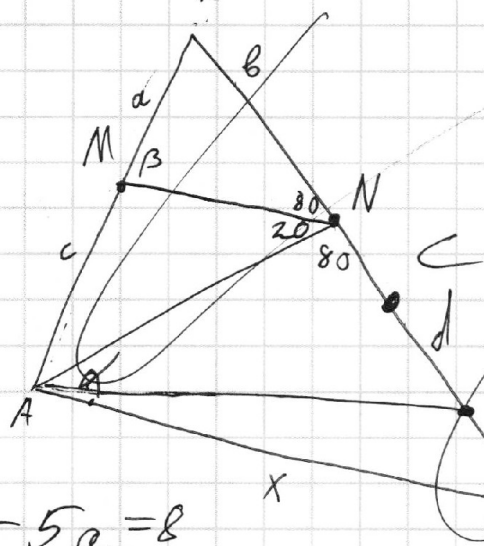
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5a^2 + 22a + 29$$
$$20 + 44 + 29$$



$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$2ad = bc$$

$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 80^\circ}$$

$$\frac{a}{\sin 80^\circ}$$

$$a^2 - 5a = 8$$

$$a(a-5)$$

$$45 + 66 + 26$$

$$16 \cdot 2^k$$

$$32 \cdot 2^k$$

$$a^2 + 7a$$

2

4

8

16

13

7

14

$$-9 \cdot 9 \quad 81$$

38

5

76

