

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = \cancel{(n-1)! + n! + (n+1)!}$$

$$= (n-1)! + (n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! \cdot (1 + n + n^2 + n) =$$

$$= (n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289 = 17^2 \Rightarrow (n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } 17 - \text{простое число} \begin{cases} (n-1)! : 17 \\ (n+1)^2 : 17 \end{cases} \text{ Если } n < 16, \text{ то}$$

$n+1 < 17$ и $n-1 < 15 < 17 \Rightarrow$ ни $(n-1)!$, ни $(n+1)^2$ не делится на 17. Значит $n \geq 16$. Убедимся, что $n=16$ подходит:

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2 = 15! \cdot 17^2 : 17^2 \quad \checkmark$$

Ответ: ~~15~~, 16.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 =$$

$$= (n^2 - 6n + 9) + (n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 2n + 1) + n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) =$$

$$= 7n^2 + 28$$

Из условия $7n^2 + 28 - 28 = N^5$

$$7n^2 = N^5, N > 8$$

$7n^2 : 7 \Rightarrow N^5 : 7$, а т.к. 7- простое число, $N^5 : 7 \Rightarrow$ ~~$N^5 = 7^5$~~

~~$7n^2 = 7^5 \Rightarrow n^2 = 7^4 \Rightarrow n = 7^2$~~ $\Rightarrow N : 7 \Rightarrow N = 7k, \Rightarrow$
 ~~$n = 49$ подходит. $N^5 = 7^5 \cdot 4^5 = 7^5 \Rightarrow N = 7$~~ $k > 1$ т.к. $N > 8$

$\Rightarrow 7n^2 = 7^5 \cdot k^5 \Rightarrow \left(\frac{n}{49}\right)^2 = k^5$, однако число является одновременно квадратом и пятой степенью только если это число - десятая степень: $k^5 = x^{10} \geq 2^{10} \Rightarrow k \geq 4$.

Убедимся, что $k = 4$; ~~$n = 49$~~ $N = 7k = 28$ подходит.

$N^5 = 28^5 = \cancel{2^5 \cdot 7^5} (2^2 \cdot 7)^5 = 2^{10} \cdot 7^5 = 7 \cdot (2^5 \cdot 7^2)^2 = 7 \cdot n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 2^5 \cdot 7^2$.

Ответ: 28.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

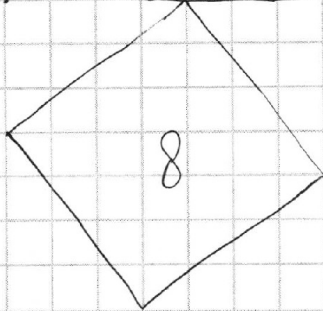
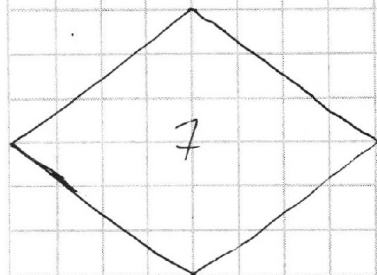
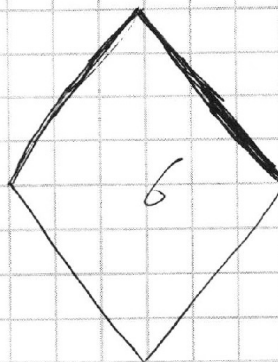
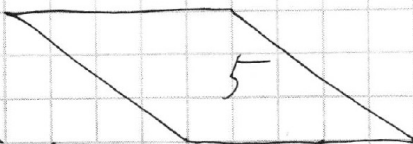
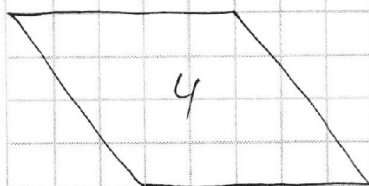
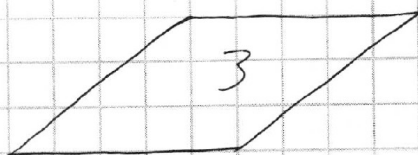
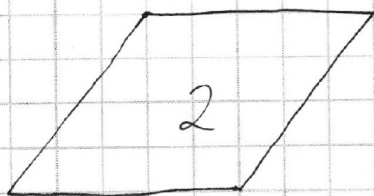
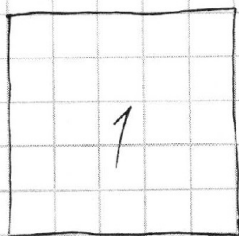
7
☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего на координатной плоскости отрезок длины 5 с
вершинами ~~в точках с целыми~~ в точках с целыми
координатами можно получить 4-мя способами:
вектор с координатами $(5; 0)$, с коорд. $(0; 5)$,
с коорд $(3; 4)$ и с коорд. $(4; 3)$. Больше их
быть не может, так как ~~по т. Пифагора~~ по т. Пифагора не 3
гипот. с целыми сторонами, гипотенузой 5 и катетом
1 или 4. Отсюда перебором можно получить
все виды ромбов со стороной длины 5:





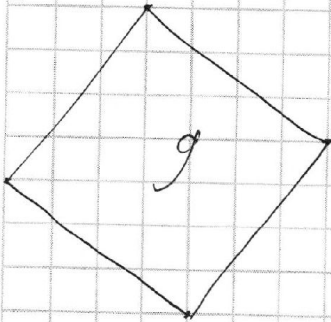
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Типов 2 и 4; 3 и 5; 6 и 7; 8 и 9
на плоскости одинаковое количество,
потому что их можно перевести
друг друга преобразованием движения.
Ромбов типа 1 на плоскости будет

$86^2 - 4$, потому что его центр может находиться в
4 клетке ~~внутренней квадрата~~ 86×86 , но там не помещаются 4
ромба, ~~вер~~ одна из вершин которого — начало
координат. Аналогично типа 2: ~~$83 \cdot 87 - 4$~~

$83 \cdot 87 - 4$; типа 3: $82 \cdot 88 - 4$; типа 4: $83 \cdot 87 - 4$;

тип 5: $82 \cdot 88 - 4$; типа 6: $85 \cdot 83 - 4$; типа 7:

$85 \cdot 83 - 4$; типа 8: $84^2 - 4$; типа 9: $84^2 - 4$

Ответ: $86^2 + 2 \cdot 83 \cdot 87 + 2 \cdot 82 \cdot 88 + 2 \cdot 85 \cdot 83 + 2 \cdot 84^2 -$
 $- 4 \cdot 9$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$y^2 - 45^2 = 23 \cdot 2^x$$

$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x; \quad 23 - \text{простое число} \Rightarrow y-45:23 \text{ или } y+45:23$$

$$\textcircled{1}: y-45:23: \quad y-45 = 23k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow y+45 = 23k+90:$$

$$23k \cdot (23k+90) = 23 \cdot 2^x$$

$$k(23k+90) = 2^x, \quad \text{тогда } k = \pm 2^a; \quad 23k+90 = 2^b:$$

$$\pm 2^a \cdot 2^b + 90 = 2^b, \quad \forall k, k \in \mathbb{Z}; \quad 2^a, 2^b \in \mathbb{Z}.$$

$$\pm 2^a \cdot 2^b + 90 = 2^b, \quad \text{левая часть нечетная} \Rightarrow \text{правая}$$

$$\pm 2^a \cdot 2^b + 90 = 2^b, \quad \text{левая часть нечетная} \Rightarrow \text{правая}$$

$$\text{Если } a=0, \text{ то } 2^b = 113, \text{ не возм.}$$

$$\text{Если } b=0, \text{ то } \pm 2^a = -\frac{89}{23}, \text{ не возм.}$$

$$\Rightarrow a, b \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{a-1}, 2^{b-1} \in \mathbb{Z}$$

$$2(\pm 23 \cdot 2^{a-1} + 45) = 2^b$$

$$\pm 23 \cdot 2^{a-1} + 45 = 2^{b-1}, \quad \text{левая часть нечетная} \Rightarrow \text{правая}$$

$$\text{тогда } \Rightarrow 2^{b-1} = 1 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm 2^a = \frac{2-90}{\pm 23} = \mp$$

$$\text{тогда } \textcircled{1} k = 2^a; \quad 23k+90 = 2^b \text{ или } \textcircled{2} k = -2^a; \quad 23k+90 = -2^b$$

$$\textcircled{1}: 23 \cdot 2^a + 90 = 2^b$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^a, 2^b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a, b \geq 0$$

$$\text{Если } a=0, \text{ то } 2^b = 113, \text{ не возм.}$$

$$\text{Если } b=0, \text{ то } 2^a = -\frac{88}{23}, \text{ не возм.}$$

$$\Rightarrow 2^{a-1}, 2^{b-1} \in \mathbb{Z}$$

$$2(23 \cdot 2^{a-1} + 45) = 2^b$$

$$23 \cdot 2^{a-1} + 45 = 2^{b-1} \quad \text{левая часть нечетная} \Rightarrow 2^{b-1} - \text{нечет.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{b-1} = 1 \Rightarrow 2^{a-1} = \frac{-44}{23} \text{ не возм.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в случае ② аналогично $2, \beta \geq 0$, если $2=0$, то $2^\beta = 67$

не подх.; если $\beta=0$, то $2^2 = \frac{91}{23}$ не подх. $\Rightarrow 2^{2-1}, 2^{\beta-1} \in \mathbb{Z}$:

$$2(-23 \cdot 2^{2-1} + 45) = -2^\beta$$

$$-23 \cdot 2^{2-1} + 45 = -2^{\beta-1}, \text{ левая часть нечёт. } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2^{\beta-1} - \text{нечёт.} \Rightarrow 2^{\beta-1} = 1 \Rightarrow 2^{2-1} = \frac{-46}{-23} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2 = 4 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow y - 45 = 23 \cdot (-4) = -92 \Rightarrow \boxed{y = -47} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{или } 2^x = \frac{-92 \cdot (-2)}{23} = 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Второй случай ②, если $y+45:23$, аналогично первому, если

вместо y заменим на $-y$, значит в нём мы найдем

тот же ответ, заменив y будем и противоложным:

$$\boxed{x = 3; y = 47}$$

Ответ: $(3; -47); (3; 47)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем функцию $f(y) = y^2 - 4y + \alpha$.

Т.к. для $\forall y$ точки на окруж. $x^2 + y^2 = \alpha^2$ ордината $\in [-|\alpha|; |\alpha|]$,

будем искать максимум функции на этом ~~отрезке~~ отрезке.

~~Функция~~ $f(y)$ - парабола ветвями вверх.

Её минимум находится в вершине: $y_0 = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$. Значит

эта парабола симметрична относительно $f(y) = y^2$,

значит ясно, что её максимум на отрезке $[-|\alpha|; |\alpha|]$ достигается

в точке $-|\alpha|$:

$f(-|\alpha|)$ по условию $= 6$.

$$|\alpha|^2 + 4|\alpha| + \alpha = 6$$

1) Если $\alpha \geq 0$:

$$\alpha^2 + 5\alpha = 6$$

$$(\alpha - 1)(\alpha + 6) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ или } \alpha = -6 \text{ не подх.}$$

2) Если $\alpha < 0$:

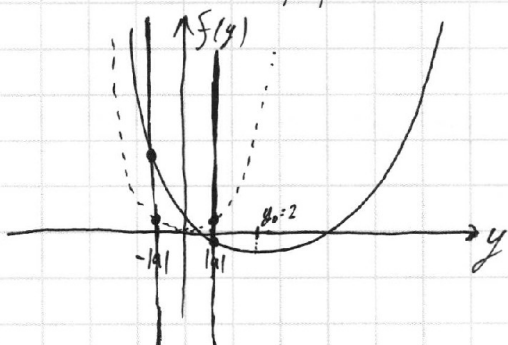
$$\alpha^2 - 3\alpha - 6 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 6 = 33$$

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}. \quad \alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} > 0 \text{ не подх.}$$

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} < \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 < 0 \text{ подходит}$$

Ответ: $\alpha = 1$ или $\alpha = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$.



у параболы $f(y) = y^2$: $f(-|\alpha|) = f(|\alpha|)$,

а у нашей $f(-|\alpha|) > f(|\alpha|)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

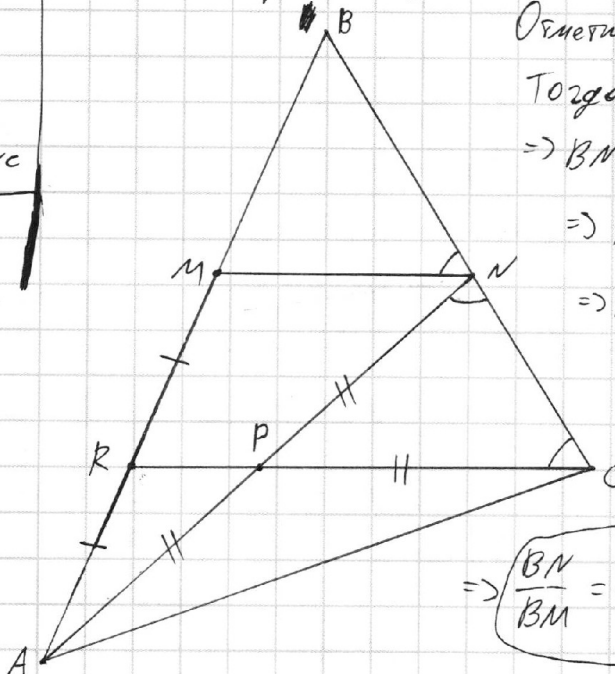
$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

~~Вывести~~

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\angle CAN = ?$$

Решение:



Ометим т. R - сеп. AM.

$$\text{Тогда } BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot \frac{MA}{2} = BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot MR = BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot MR + BM \cdot BN = BM \cdot NC + BM \cdot BN \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot (BM + MR) =$$

$$= BM \cdot (BN + NC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{BN + NC}{BM + MR} = \frac{BC}{BR}, \text{ так как}$$

этом $\angle RBC$ и $\angle MBN$ общий угол при верш. B $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle RBC \sim \triangle MBN$ по двум ст. и углу при верш. B $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCR = \angle BNM \Rightarrow MN \parallel RC \Rightarrow$ по т. Фалеса $AP = PN$

(т. Р - т. пересек. CR и AN).

$\angle PNC = \angle MNB = \angle NCP \Rightarrow \triangle NPC - \text{р/б} \Rightarrow \underline{CP = NP} \Rightarrow$

$\Rightarrow CP = NP = PA \Rightarrow \triangle APC - \text{р/б} \Rightarrow \angle CAP =$

$$= \angle ACP \Rightarrow \angle CAP = \frac{180^\circ - \angle APC}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \angle CPN)}{2} =$$

$$= \frac{180^\circ - \angle PNC - \angle PCN}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ - 70^\circ}{2} = 20^\circ$$

Ответ: 20° .



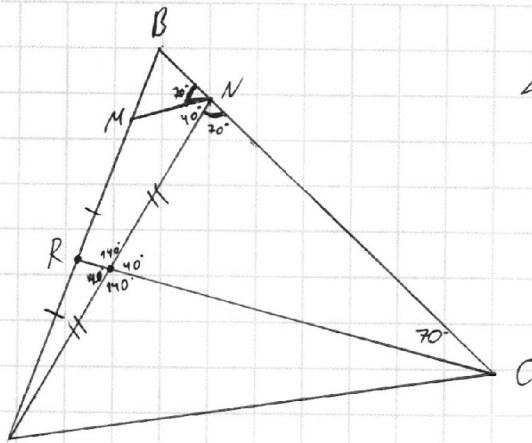
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

[1; 45]. A



$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MNA = 70^\circ$$

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\angle CAN - ?$$

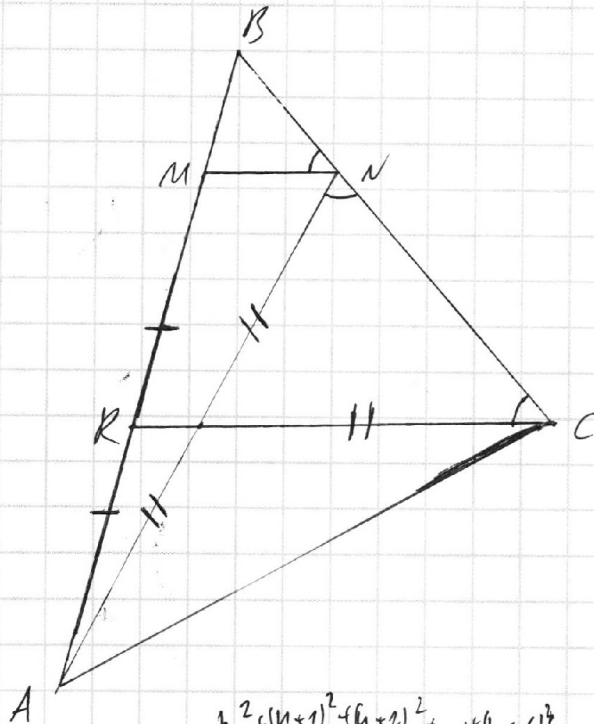
$$\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN \parallel RC$$

$$BN \cdot MR = BM \cdot NC$$

$$(1): \frac{BN}{BN+NC} = \frac{BM}{BM+MR}$$

$$(1): \frac{BM \cdot BN}{BN+NC} = \frac{BM \cdot BM}{BN+NC}$$

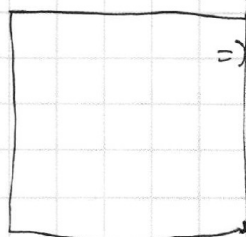
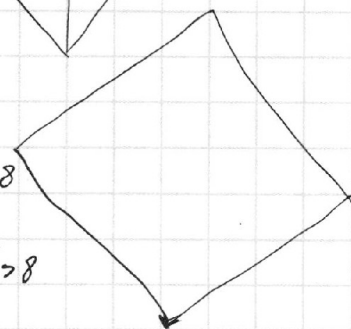
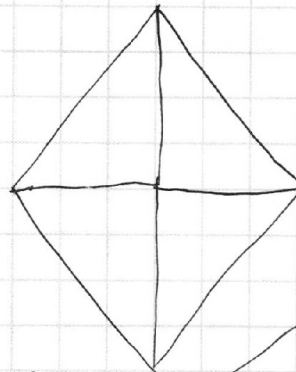


$$h^2 + (h+1)^2 + (h+2)^2 + \dots + (h+6)^2$$

$$(h-3)^2 + (h-2)^2 + (h-1)^2 + h^2 + (h+1)^2 + (h+2)^2 + (h+3)^2$$

$$= 7h^2 + 9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 = 7h^2 + 28$$

$$\Rightarrow 7h^2 = N^5, N \geq 8$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! \cdot (1+n+\cancel{u^2+u}) = (n+1)^2 \cdot (n-1)! \Rightarrow \cancel{u^2+u} = (n+1)^2$$

$$289 = 17^2$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 1190 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \right| + |6-x|$$

$$|a| + |b| \geq |a+b| \Rightarrow \left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \right| + |6-x| \geq \left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + 5 \right|$$

$$\Rightarrow a \text{ и } b \text{ одного знака: } \left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \right| + |6-x| = |4+5|$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \leq 0 \\ 6-x \leq 0 \end{cases}$$

$$1) a \geq 0 \quad 2) a \leq 0$$

$$f(y) = y^2 - 4y - a \quad f(a) = a^2 - 4a - a = a^2 - 5a = 6$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$f(-a) = a^2 + 4a - a = a^2 + 3a = 6$$

$$\begin{aligned} D &= 9 + 24 = 33 \\ a &= \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{27}{4}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 3^4 \cdot 5^2 = y^2$$

$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

$$y-45 = 23k$$

$$23k \cdot (23k+90) = 23 \cdot 2^x$$

$$k \cdot (23k+90) = 2^x$$

$$\Rightarrow k = 2^r: 2^r \cdot (23 \cdot 2^r + 90) = 2^x$$

$$y+45 = 23k: (23k-90) \cdot 23k = 23 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2^r \Rightarrow 23k-90 = 2^e \Rightarrow 23k-90 = 2$$

$$\text{или } k=2: 2 \cdot (46-90) = 2^e \quad \left[\begin{array}{l} k=9 \Rightarrow y=47 \\ k=3 \Rightarrow y=3 \end{array} \right]$$

$$f(y) = y^2 - 4y - a \text{ на отрезке } [-a; a];$$

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2, \quad f(2) = 4 - 8 - a = -a - 4$$

$$23 \cdot 2^r + 90 = 2^{x-r} \Rightarrow 23 \cdot 2^r + 90 = 2$$

$$23 + \frac{90}{2^r} = 2^{x-r}$$

$$\text{или } 23 \cdot 2 + 90 = 2^{x-r}$$

$$136 \neq$$

$$f(-a) = a^2 + 4a - a$$

$$f(a) = a^2 - 4a - a$$