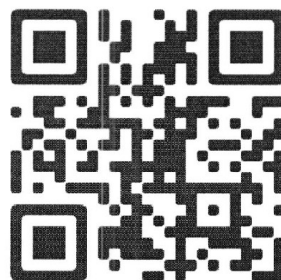


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



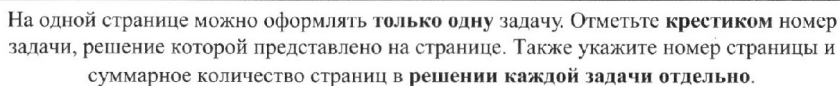
1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча ОР-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! (n+1)^2$$

$(n-1)! : 289$ или $(n+1)^2 : 289$. Из первого следует, что, так как 17 - простое число, ~~то $n-1$ делится на 17~~, а $289 = 17^2$, то $n-1 = 34$ (это наименьшее натуральное число, в факториале которого содержится более одного множителя 17), т.е. $n = 35$.

Цу второго, следует, что $n+1 \leq 17$, т.е. наименьшее значение выражения $n+1 = 17 \Rightarrow n = 16$

Так как $16 < 35$, то наименьшее $n = 16$.

Obs: 16



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Пусть $k, k+1, k+2, \dots, k+6$ — семь последовательных натуральных чисел. Тогда их сумма равна:

$$7k^2 + k(2+4+\dots+12) + (1+4+9+\dots+36) = 7k^2 + 42k + 91;$$

$$7k^2 + 42k + 91 - 28 = 7(k^2 + 6k + 9) = 7(k+3)^2$$

$$7(k+3)^2 = N^5$$

Число N можно представить как

Получается:

$$\text{т.к. } N^5 : 7; \text{ значит } N^5 : 7^{1/5} \quad (\text{т.к. } 7 - \text{простое})$$

$$7^4 \cdot n^5 = 7(k+3)^2 = 7^5 \cdot n^5 \Rightarrow (k+3)^2 = 7^4 \cdot n^5$$

$7^4 \cdot n^5$ — наименьший квадрат, значит $n = x^2$, где $x \in \mathbb{N}$.

Чтобы N было наименьшим, x должно быть наименьшим.

если $x=1$, то $n=1$; $N=7$. То условие $N > 8$, поэтому $N=7$ не подходит.

если $x=2$, то $n=4$, $N=28$. Это наименьшее N , удовлетворяющее условию.

Ответ: 28.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1|+|6-x|$$

Задача 3.

Заметим, что $\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}$, т.е. нерав-во принимает вид:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1|+|6-x|; \text{ Неравенство имеет смысл}$$

при $x^2-x-2 \geq 0$

$$(x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

т.е. $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Если $x \leq -1$:

~~тогда~~ получим, что первое выражение больше 0.

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$x \geq 3. \text{ т.е. на } x \leq -1 \text{ первое}$$

выражение ~~меньше~~ меньше 0;

$$6-x \geq 0$$

$$x \leq 6 \text{ Знаем второе}$$

выражение на $x \leq -1$ больше 0.

Неравенство принимает вид:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq -\sqrt{x^2-x-2}-x+1+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x$$

$$x^2-x-2 \geq x^2-2x+1$$

$$x \geq 3$$

Получаем: $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$

Если $x \geq 2$:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+|6-x|$$

$$|6-x| \leq 6-x$$

т.к. $x \geq 0$: $|6-x|=6-x$, т.е. при $x \geq 2$ нерав-во ~~удовлетворяется~~ удовлетворяется ~~любой~~ любой x .

~~Итого:~~ Итого:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \emptyset \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

Ответ: $[2; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

(с целыми коэффициентами)

Покажем, что для каждой точки на координатной плоскости есть 8 способов построить ромб с вершиной в этой точке так, чтобы сторона ромба была равна 5, а все вершины находились в точках с целыми координатами.

Сторона ромба в данном случае — это гипотенуза прямоугольного треугольника со сторонами — целыми или полуцелыми числами. Справедливо уравнение $x^2 + y^2 = 25$, где $2x$ и $2y$ — целые.

Это уравнение имеет восемь решений: $(3; 4); (3; -4); (-3; 4); (-3; -4); (4; 3); (4; -3); (-4; 3); (-4; -3)$. Таким образом из точки можно построить восемь отрезков длиной 5, с целыми концами.

Каждый из них можно объединить в пару с другим отрезком, симметричным ему относительно отрезка, соединяющего Ox и Oy , пересекающих центр ромба. Каждую пару можно отразить относительно прямой, проходящей через общие концы отрезков и получить ромб.

~~Решение задачи 4. Рассмотрим квадрат 6x6. В нем 8.48 ромбов, если рассмотреть квадрат 8x8, то добавится 8.40 ромбов, если рассмотреть квадрат 10x10, то добавится 8.32 ромбов, если рассмотреть квадрат 12x12, то добавится 8.24 ромбов, если рассмотреть квадрат 14x14, то добавится 8.16 ромбов, если рассмотреть квадрат 16x16, то добавится 8.08 ромбов, если рассмотреть квадрат 18x18, то добавится 8.0 ромбов, если рассмотреть квадрат 20x20, то добавится 7.92 ромбов, если рассмотреть квадрат 22x22, то добавится 7.84 ромбов, если рассмотреть квадрат 24x24, то добавится 7.76 ромбов, если рассмотреть квадрат 26x26, то добавится 7.68 ромбов, если рассмотреть квадрат 28x28, то добавится 7.6 ромбов, если рассмотреть квадрат 30x30, то добавится 7.52 ромбов, если рассмотреть квадрат 32x32, то добавится 7.44 ромбов, если рассмотреть квадрат 34x34, то добавится 7.36 ромбов, если рассмотреть квадрат 36x36, то добавится 7.28 ромбов, если рассмотреть квадрат 38x38, то добавится 7.2 ромбов, если рассмотреть квадрат 40x40, то добавится 7.12 ромбов, если рассмотреть квадрат 42x42, то добавится 7.04 ромбов, если рассмотреть квадрат 44x44, то добавится 6.96 ромбов, если рассмотреть квадрат 46x46, то добавится 6.88 ромбов, если рассмотреть квадрат 48x48, то добавится 6.8 ромбов, если рассмотреть квадрат 50x50, то добавится 6.72 ромбов, если рассмотреть квадрат 52x52, то добавится 6.64 ромбов, если рассмотреть квадрат 54x54, то добавится 6.56 ромбов, если рассмотреть квадрат 56x56, то добавится 6.48 ромбов, если рассмотреть квадрат 58x58, то добавится 6.4 ромбов, если рассмотреть квадрат 60x60, то добавится 6.32 ромбов, если рассмотреть квадрат 62x62, то добавится 6.24 ромбов, если рассмотреть квадрат 64x64, то добавится 6.16 ромбов, если рассмотреть квадрат 66x66, то добавится 6.08 ромбов, если рассмотреть квадрат 68x68, то добавится 6.0 ромбов, если рассмотреть квадрат 70x70, то добавится 5.92 ромбов, если рассмотреть квадрат 72x72, то добавится 5.84 ромбов, если рассмотреть квадрат 74x74, то добавится 5.76 ромбов, если рассмотреть квадрат 76x76, то добавится 5.68 ромбов, если рассмотреть квадрат 78x78, то добавится 5.6 ромбов, если рассмотреть квадрат 80x80, то добавится 5.52 ромбов, если рассмотреть квадрат 82x82, то добавится 5.44 ромбов, если рассмотреть квадрат 84x84, то добавится 5.36 ромбов, если рассмотреть квадрат 86x86, то добавится 5.28 ромбов, если рассмотреть квадрат 88x88, то добавится 5.2 ромбов, если рассмотреть квадрат 90x90, то добавится 5.12 ромбов, если рассмотреть квадрат 92x92, то добавится 5.04 ромбов, если рассмотреть квадрат 94x94, то добавится 4.96 ромбов, если рассмотреть квадрат 96x96, то добавится 4.88 ромбов, если рассмотреть квадрат 98x98, то добавится 4.8 ромбов, если рассмотреть квадрат 100x100, то добавится 4.72 ромбов.~~

Для точек лежащих на или внутри квадрата 6x6 можно построить 8.48 ромбов, если рассмотреть квадрат 8x8, то добавится 8.40 ромбов, если рассмотреть квадрат 10x10, то добавится 8.32 ромбов, если рассмотреть квадрат 12x12, то добавится 8.24 ромбов, если рассмотреть квадрат 14x14, то добавится 8.16 ромбов, если рассмотреть квадрат 16x16, то добавится 8.08 ромбов, если рассмотреть квадрат 18x18, то добавится 8.0 ромбов, если рассмотреть квадрат 20x20, то добавится 7.92 ромбов, если рассмотреть квадрат 22x22, то добавится 7.84 ромбов, если рассмотреть квадрат 24x24, то добавится 7.76 ромбов, если рассмотреть квадрат 26x26, то добавится 7.68 ромбов, если рассмотреть квадрат 28x28, то добавится 7.6 ромбов, если рассмотреть квадрат 30x30, то добавится 7.52 ромбов, если рассмотреть квадрат 32x32, то добавится 7.44 ромбов, если рассмотреть квадрат 34x34, то добавится 7.36 ромбов, если рассмотреть квадрат 36x36, то добавится 7.28 ромбов, если рассмотреть квадрат 38x38, то добавится 7.2 ромбов, если рассмотреть квадрат 40x40, то добавится 7.12 ромбов, если рассмотреть квадрат 42x42, то добавится 7.04 ромбов, если рассмотреть квадрат 44x44, то добавится 6.96 ромбов, если рассмотреть квадрат 46x46, то добавится 6.88 ромбов, если рассмотреть квадрат 48x48, то добавится 6.8 ромбов, если рассмотреть квадрат 50x50, то добавится 6.72 ромбов, если рассмотреть квадрат 52x52, то добавится 6.64 ромбов, если рассмотреть квадрат 54x54, то добавится 6.56 ромбов, если рассмотреть квадрат 56x56, то добавится 6.48 ромбов, если рассмотреть квадрат 58x58, то добавится 6.4 ромбов, если рассмотреть квадрат 60x60, то добавится 6.32 ромбов, если рассмотреть квадрат 62x62, то добавится 6.24 ромбов, если рассмотреть квадрат 64x64, то добавится 6.16 ромбов, если рассмотреть квадрат 66x66, то добавится 6.08 ромбов, если рассмотреть квадрат 68x68, то добавится 6.0 ромбов, если рассмотреть квадрат 70x70, то добавится 5.92 ромбов, если рассмотреть квадрат 72x72, то добавится 5.84 ромбов, если рассмотреть квадрат 74x74, то добавится 5.76 ромбов, если рассмотреть квадрат 76x76, то добавится 5.68 ромбов, если рассмотреть квадрат 78x78, то добавится 5.6 ромбов, если рассмотреть квадрат 80x80, то добавится 5.52 ромбов, если рассмотреть квадрат 82x82, то добавится 5.44 ромбов, если рассмотреть квадрат 84x84, то добавится 5.36 ромбов, если рассмотреть квадрат 86x86, то добавится 5.28 ромбов, если рассмотреть квадрат 88x88, то добавится 5.2 ромбов, если рассмотреть квадрат 90x90, то добавится 5.12 ромбов, если рассмотреть квадрат 92x92, то добавится 5.04 ромбов, если рассмотреть квадрат 94x94, то добавится 4.96 ромбов, если рассмотреть квадрат 96x96, то добавится 4.88 ромбов, если рассмотреть квадрат 98x98, то добавится 4.8 ромбов, если рассмотреть квадрат 100x100, то добавится 4.72 ромбов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

Заметим, что, если $x < 0$, то 2^x не целое, значит y^2 не целое, и y не целое. Если $x = 0$, то $2^x = 1$; $y^2 = 23 + 2025$; y не целое.

Значит $x > 0$. Т.к. $2^x > 0$ при любых целых x , то $y^2 > 2025 \Rightarrow y < -45$
 $y > 45$

При умножении 23 на 2^x , где $x > 0$ последняя цифра произведения может быть $2, 4, 6, 8$. При сложении с 2025 получаются: $7, 9, 1, 3$.

При возведении в квадрат получаются последние цифры $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Совпадают только 1 и 9 . То есть $23 \cdot 2^x$ оканчивается либо на 4 , либо на 6 , а y может оканчиваться на $1, 3, 7$ или 9 , 2^x оканчивается на 2 или 8 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ задает окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом a .

$$y^2 - 4y - a = (y - 2)^2 - a - 4$$

$y = a \sin \alpha$, где α — угол между положительной направленной осью Ox и радиусом к точке с координатами $(x; y)$

Выражение $(y - 2)^2 - a - 4$ принимает наибольшее значение при $|y - 2|$ наибольшим. Т.к. $y = a \sin \alpha$, где $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, то $-a \leq y \leq a$.

если $a \geq 0$, то выражение принимает наибольшее значение при $y = -a$ (т.к. $-a < 0$)

$$-a - 2 < a - 2$$

$$(-a - 2)^2 - a - 4 = a^2 + 4a + 4 - a - 4 = a^2 + 3a$$

$$a^2 + 3a = 6 \Rightarrow a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{\sqrt{33} - 3}{2} > 0$$

$$a = \frac{-3 - \sqrt{9 + 24}}{2} < 0 \text{ не подходит}$$

$$a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$$

если $a < 0$, то выражение принимает наибольшее значение при $y = a$.

$$(a - 2)^2 - a - 4 = 6 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - a - 4 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6 \text{ — не подходит, т.к. } a \text{ должно быть } < 0$$

$$a = -1$$

$$a = -1$$

Ответ: $\frac{\sqrt{33} - 3}{2}; -1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

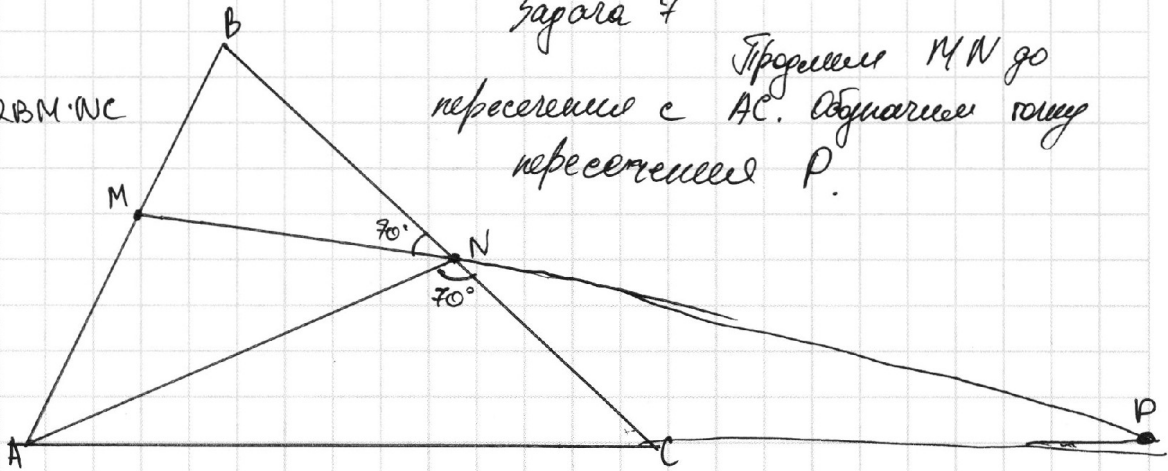
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

Задача 7

Проделим MN до пересечения с AC . Обозначим точку пересечения P .



$$\text{По теореме Менелая: } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{PC}{AP} = 1 \Rightarrow \frac{BN \cdot MA}{BM \cdot NC} \cdot \frac{PC}{AP} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2PC}{AP} = 1 \Rightarrow AP = 2PC \Rightarrow AC = PC \Rightarrow NC - \text{медiana в } \triangle ANP.$$

$$\angle MNB = \angle CNP \text{ как верт. к. } \Rightarrow \angle ANC = \angle ENP \Rightarrow NC - \text{биссектр. в } \triangle ANP.$$

$$\text{Значит } \triangle ANP - \text{р/б } \triangle, \text{ и } NC - \text{высота} \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ.$$

$$\angle CAN = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

Ответ: 20° .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение задачи 4)
и не учитывалось:

при $n=4$: 8 ромбов

~~при $n=5$: 68 ромбов~~

~~при $n=6$: 164 ромба~~

~~при $n > 6$: $32(n-6) + 32(n-5) + 64(n-4)$ ромбов $= 32(n-6+n-5+2n-8) = 32(4n-19)$ ромбов~~

Рассчитаем, ~~если~~ будет учитываться:

при $n=4$: $8 \cdot 31$ ромбов $= 248$

$n=5$: $8 \cdot 40 - 68$ ромбов $= 252$

$n=6$: $8 \cdot 48 - 164$ ромба $= 220$

$n > 6$: ~~$32(n-6) + 32(n-5) + 64(n-4)$~~ $64n - 128n + 32 \cdot 19$ ромбов $=$

$= 32 \cdot 19 - 64n = 32(19-2n)$ ромбов

Получаем, ~~если~~ со всеми ромбов: (новее)

$$8 \cdot 49 + 248 + 252 + 220 + \frac{(32(19-14) + 32(19-2(n-6))) \cdot (n-6)}{2} =$$

$$= 1112 + \frac{32(n-6)(5+19-2n+12)}{2} = 1112 + 16(n-6)(36-2n) =$$

$$= 1112 + 32(n-6)(18-n)$$

В нашем случае квадрат со стороной $45-1=44$, т.е.

$$n=22, \quad \Sigma = 1112 + 32 \cdot 16 \cdot (-4) = 1112 - 2112$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025 \Leftrightarrow 23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

Так как 23 - простое число, то либо $y-45:23$ либо $y+45:23$,

$$y-45 = 23 \cdot 2^n$$

$$y+45 = 23 \cdot 2^m$$

$$y = 23(2^n + 2) - 1$$

$$y+45 = 2^{x-n}$$

$$y+45 = 2^{x-m} \quad (1)$$

$$y-45 = 2^{x-n}$$

$$y-45 = 2^{x-m} \quad (2)$$

$$y+45 = 23 \cdot 2^n$$

$$y = 23(2^n - 2) + 1$$

$$\begin{cases} y-45 = 23k \\ y+45 = 2^{x-n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 23k + 45 \\ 23k + 90 = 2^{x-n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 23k + 45 \\ 23k + 90 = 2^{x-n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 = 2^{x-n} \\ y+45 = 23k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 23k - 45 \\ 23k - 90 = 2^{x-n} \end{cases}$$

Задача 5

$$23 \cdot 2^x + 2025 = 45^2 + 2 \cdot 45k + k^2$$

Выражение

$$k^2 + 90k = 23 \cdot 2^x$$

$$-90 \pm 8100 \pm 9 \cdot 2^x$$

$23 \cdot 2^x + 2025$

должно быть

полным квадратом. $2025 = 45^2$. Имеем $k^2 + 90k = 23 \cdot 2^x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

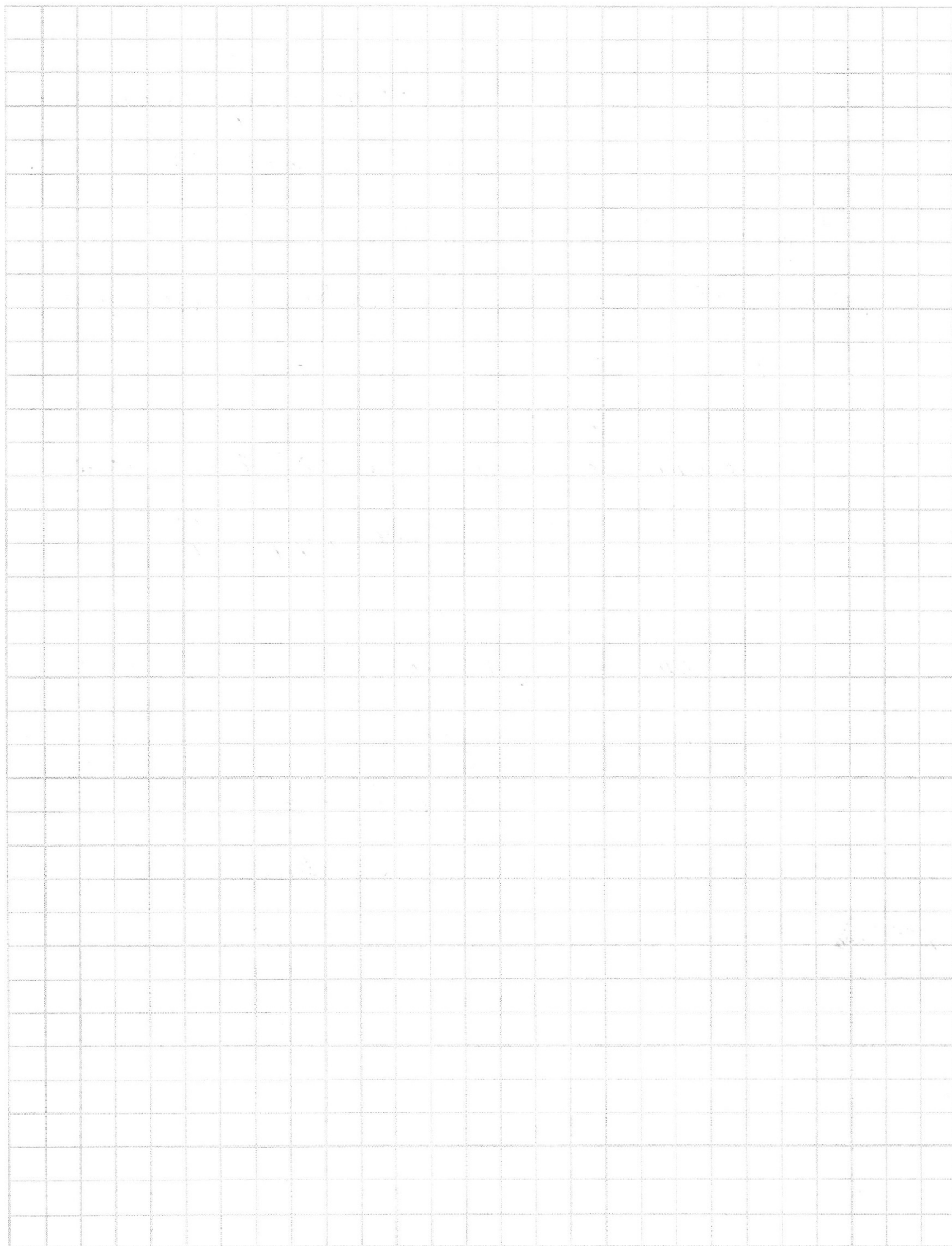
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

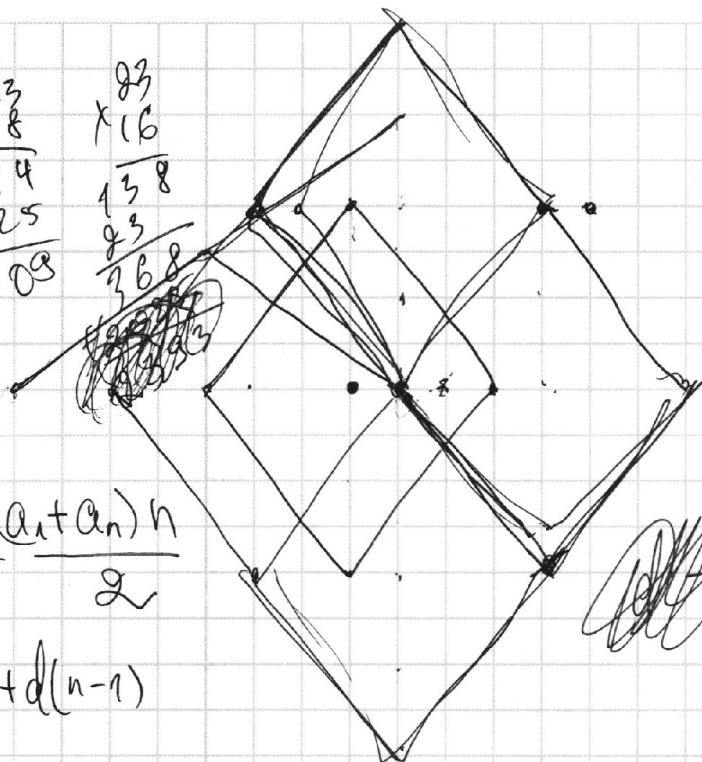
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 184 \\ \hline 184 \\ + 2025 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 16 \\ \hline 138 \\ + 83 \\ \hline 368 \end{array}$$



$$\frac{45+1}{2} \cdot 2^4 = y^2 - 45^2$$

$$2025 = 45 \cdot 45 = (2 \cdot 23 - 1)(2 \cdot 23 - 1)$$

$$\sum = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$a = a_1 + d(n-1)$$

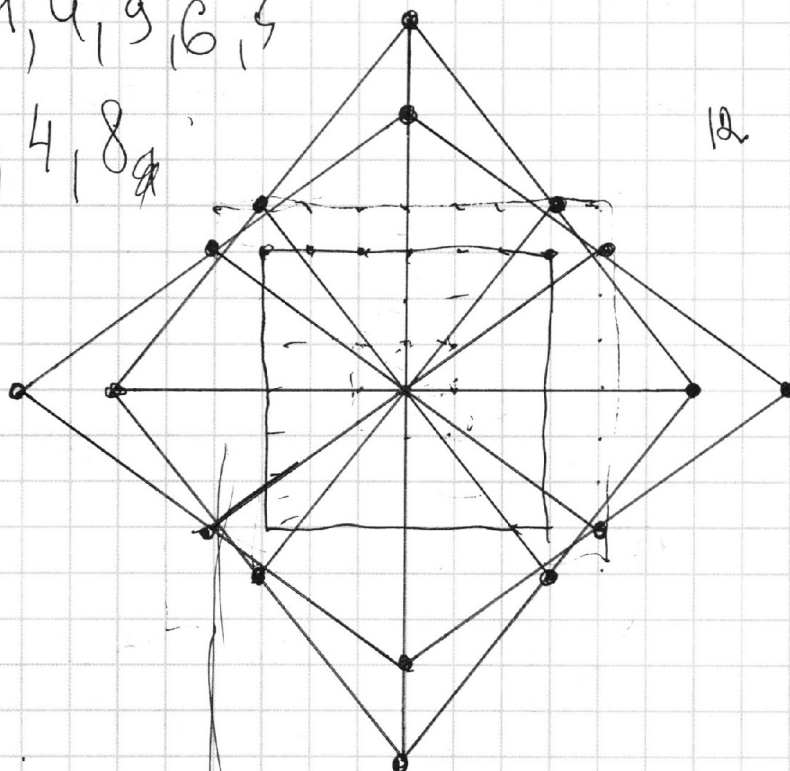
$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ + 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ + 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ + 92 \\ \hline 2117 \\ + 115 \\ \hline 32 \end{array}$$

0, 1, 4, 9, 16, 25

6, 2, 4, 8





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! \cdot (1+n+n(n+1))$$

$$(n-1)! \cdot (n^2+2n+1) = (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} & k^2 + k^2 + 2k + 1 + k^2 + 4k + 4 + k^2 + 6k + 9 + k^2 + 8k + 16 + k^2 + 10k + 25 + \\ & + k^2 + 12k + 36 - 28 = 7k^2 + 42k + 63 = 7(k^2 + 6k + 9) = \\ & = 7(k+3)^2 \end{aligned}$$

$$7(k+3)^2 = N^5$$

$$(k+3)^2 = 7^4 \cdot n^5$$

$$n^5 = \left(\frac{k+3}{49}\right)^2$$

$$(49n^5)^2 = (k+3)^2$$

$$N^5 = 7^3$$

$$49 = (k+3)^2$$

$$7 = k+3$$

$$(k+3)^2 = 7^4 \cdot n^5$$

$$n = 1, \text{ если } k=1, \text{ то } N^5 = 7^5 \Rightarrow N=7$$

$$\text{если } k=2 \Rightarrow n=4$$

$$N^5 = 4^5 \cdot 7^5 = 28^5$$

$$N=28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad D = 1 + 8 = 9; \quad \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$
$$= (x-2)(x+1)$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

если $x \geq 2$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + |6 - x|$$
$$5 \geq x - 1 + |6 - x|$$

если $x \geq 6$:

$$x - 1 + x - 6 \leq 5$$
$$x \leq 6 \quad x \leq 6$$

если $x < 6$:

$$x - 1 + x - 6 \leq 5$$
$$2x - 7 \leq 5$$
$$2x \leq 12$$
$$x \leq 6$$

если $x \leq -1$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -\sqrt{x^2 - x - 2} - x + 1 + |6 - x|$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} - |6 - x| \geq 1 - x - 5$$
$$\geq -x - 4$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq -x - 4 + |6 - x|$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$$
$$x^2 - x - 2 \geq 1 + x^2 - 2x$$

$$x \geq 3$$

